

## BORROMEANITE DU GROUPE PULSATIF

par Jean-Yves DEGOS

*En hommage amical à René Guitart,  
à l'occasion de ses 65 ans.*

**Résumé.** Dans la section 1, nous définissons le groupe pulsatif, noté  $Pul$ , comme le groupe de symétries de la sphère entière de rayon  $\sqrt{5}$ , et donnons une description de ce groupe. Dans la section 2, nous en donnons une présentation borroméenne, et nous faisons le lien avec le groupe spécial orthogonal. Dans la section 3, nous nous intéressons aux possibilités de représenter graphiquement ce groupe, en utilisant la méthode de Newton. Enfin, dans la section 4, nous en proposons une interprétation et une généralisation.

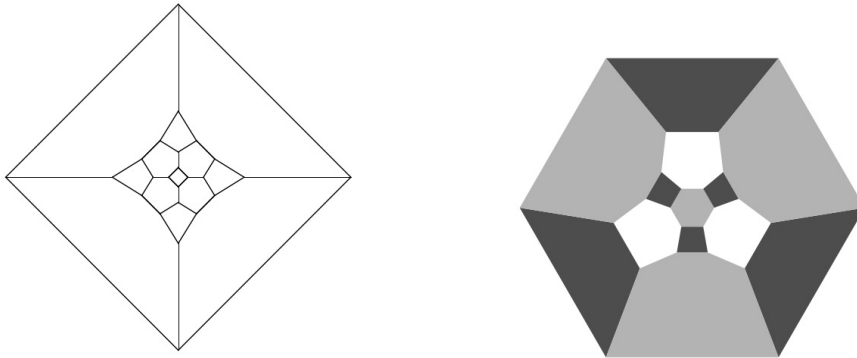
**Abstract.** In the section 1, we define the pulsative group, denoted by  $Pul$ , as the group of symetries of the integral sphere of radius  $\sqrt{5}$ , and we give a description of this group. In the section 2, we give a borromean presentation of it, and we give a link with the special orthogonal group. In the section 3, we focus on different ways of representing this group graphically, using Newton's method. At last, in the section 4, we give an interpretation and a generalization of it.

**Keywords.** borromean groups, brunnian groups, mathematical pulsation, pulsative group.

**Mathematics Subject Classification (2010).** 12Y05, 20H30.

### 1. Introduction : le groupe pulsatif

Dans [6], §13, René Guitart introduit la notion de *site pulsatif*. Pour l'auteur, "un acte mathématique réel est une façon de faire tenir ensemble (...) 24 postures", qu'il place sur un *hexagramme pulsatif*, qui, selon l'auteur "est image dans le plan de l'octaèdre régulier adouci, qui est l'un des 13 solides archimédiens, encore appelé polyèdre de Kelvin".



Les deux figures ci-dessus représentent deux projections du polyèdre de Kelvin dans le plan d'Argand-Cauchy :

- celle de gauche est la projection stéréographique sur le plan d'équation  $z = 0$ , le pôle nord étant le point  $N(0, 0, 1)$ , et le pôle sud le point  $S(0, 0, -1)$  ;
- celle de droite est la projection stéréographique sur le plan d'équation  $x + y + z + \sqrt{15} = 0$ , le pôle nord étant le point  $N\left(\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}\right)$ , et le pôle sud le point  $S\left(-\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}, -\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}, -\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}\right)$ .

**Proposition 1.1.** *Le polyèdre de Kelvin est inscriptible dans une sphère de rayon 1. Ses 24 sommets ont pour coordonnées les éléments de l'ensemble :*

$$\mathcal{S} = \left\{ \left( \frac{x}{\sqrt{5}}, \frac{y}{\sqrt{5}}, \frac{z}{\sqrt{5}} \right) \text{ avec } (x, y, z) \in \mathbb{Z}^3 \text{ et } x^2 + y^2 + z^2 = 5 \right\}. \quad (1)$$

**Définition 1.2.** *On appelle groupe pulsatif le groupe de symétries de la sphère entière de rayon  $\sqrt{5}$ , c'est-à-dire le groupe des isométries qui laissent globalement invariante cette sphère. On note ce groupe Pul.*

Nous allons donner une description matricielle du groupe Pul.

**Définition 1.3.** (i) *On considère les matrices suivantes :*

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ et } G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, V = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, W = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

$$T_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, T_{23} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, T_{31} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(ii) On appelle  $K$  le groupe (isomorphe au groupe de Klein) :

$$K = \{I, U, V, W\}.$$

(iii) On appelle  $S$  le groupe (isomorphe au groupe symétrique  $\mathfrak{S}_3$ ) :

$$S = \{I, T_{12}, T_{23}, T_{31}, G, G^{-1}\}.$$

Ceci nous permet d'énoncer le théorème qui suit.

**Théorème 1.4.** Avec les notations de la Définition 1.3, on a les résultats suivants :

- (i) Le produit  $KS = \{MN, M \in K, N \in S\}$  est un groupe d'ordre 24.
- (ii) Le groupe Pul est égal à  $KS$ .

## 2. Borroméanité du groupe pulsatif et lien avec le groupe spécial orthogonal

Nous allons établir que le groupe Pul a une structure de groupe borroméen ([7]), ou plus exactement de groupe 3-brunnien de type I, pour reprendre la terminologie de [3]. Nous commençons par une définition ; ensuite nous montrons que Pul et  $SO_3(\mathbb{F}_3)$  sont les deux seuls sous-groupes du groupe orthogonal sur  $\mathbb{F}_3$  à satisfaire une certaine propriété (Théorème 2.3).

**Définition 2.1.** On considère les trois matrices suivantes :

$$R_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, R_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ et } R_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Nous donnons le théorème annoncé.

**Théorème 2.2.** *On a les résultats suivants :*

(i)  $R_2 = GR_1G^{-1}, R_3 = GR_2G^{-1}, R_1 = GR_3G^{-1}.$

(ii)  $\text{Pul} = \langle R_1, R_2, R_3 \rangle.$

(iii) *Pul est 3-brunnien de type I.*

*Démonstration.* Le point (i) est évident. Pour le point (ii), on dresse la table de multiplication de  $K$  par  $S$ , et on essaie d'écrire chaque produit, donc chaque élément de Pul, comme un mot sur  $R_1, R_2, R_3$ . La table qu'on obtient, grâce à l'aide un système de calcul formel comme Maple ou Sage, est la suivante :

$\times$	$I$	$T_{12}$	$T_{23}$	$T_{31}$	$G$	$G^{-1}$
$I$	$I$	$R_3R_2^2$	$R_1R_3^2$	$R_2R_1^2$	$R_1R_2$	$R_2^{-1}R_1^{-1}$
$U$	$R_1^2$	$R_3$	$R_1R_2^2$	$R_2^{-1}$	$R_1^{-1}R_2$	$R_1R_3^{-1}$
$V$	$R_2^2$	$R_3^{-1}$	$R_1$	$R_2R_3^2$	$R_2^{-1}R_3$	$R_2R_1^{-1}$
$W$	$R_3^2$	$R_3R_1^2$	$R_1^{-1}$	$R_2$	$R_3^{-1}R_2$	$R_3R_2^{-1}$

ce qu'il fallait démontrer. Pour montrer le point (iii), on remarque que (i) et (ii) entraînent que Pul est 3-cyclable (voir [3]). Il faut donc montrer que :

1. Si  $R_1 = I$  (resp.  $R_2 = I, R_3 = I$ ), le groupe Pul devient trivial.
2. Si on supprime  $R_1$  (resp.  $R_2, R_3$ ) le groupe  $\langle R_2, R_3 \rangle$  (resp.  $\langle R_3, R_1 \rangle, \langle R_1, R_2 \rangle$ ) est quand même Pul.

Cela ne pose aucune difficulté. □

**Théorème 2.3.** *Soit  $H$  un sous-groupe de  $O_3(\mathbb{F}_3)$  (le groupe des isométries d'un cube régulier, c'est-à-dire formé des 48 matrices de permutations signées), vérifiant la propriété que :*

$$\forall N \in O_3(\mathbb{F}_3), N \in H \text{ ou } -N \in H .$$

Alors  $H = \text{Pul}$  ou  $H = \text{SO}_3(\mathbb{F}_3)$ .

*Démonstration.* Le groupe  $H$  est d'indice 2, donc d'ordre 24.

(i) Si  $R_1 \in H$  et  $G \in H$ , alors :

$$R_2 = GR_1G^{-1} \in H, \text{ et } R_3 = GR_2G^{-1} \in H$$

donc  $\text{Pul} = \langle R_1, R_2, R_3 \rangle \subset H$ , et comme les deux groupes ont même ordre, ils sont égaux.

(ii) Si  $R_1 \in H$  et  $-G \in H$ , alors :

$$R_2 = (-G)R_1(-G)^{-1} \in H, \text{ et } R_3 = (-G)R_2(-G)^{-1} \in H$$

donc  $\text{Pul} = \langle R_1, R_2, R_3 \rangle \subset H$ , et comme les deux groupes ont même ordre, ils sont égaux.

(iii) Si  $R_1 \notin H$  alors  $-R_1 \in H$  ; si  $G \in H$ , alors :

$$-R_2 = G(-R_1)G^{-1} \in H, \text{ et } -R_3 = G(-R_2)G^{-1} \in H$$

donc  $\text{SO}_3(\mathbb{F}_3) = \langle -R_1, -R_2, -R_3 \rangle \subset H$ , et comme les deux groupes ont même ordre, ils sont égaux.

(iv) Si  $R_1 \notin H$  alors  $-R_1 \in H$  ; si  $-G \in H$ , alors :

$$-R_2 = (-G)(-R_1)(-G)^{-1} \in H, \text{ et } -R_3 = (-G)(-R_2)(-G)^{-1} \in H$$

donc  $\text{SO}_3(\mathbb{F}_3) = \langle -R_1, -R_2, -R_3 \rangle \subset H$ , et comme les deux groupes ont même ordre, ils sont égaux.  $\square$

### 3. Représentations graphiques du groupe pulsatif

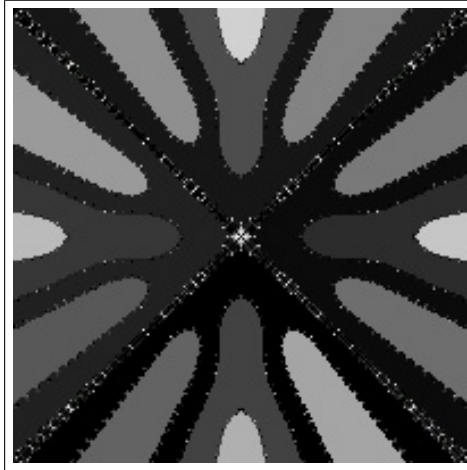
Nous nous intéressons dans cette section à la possibilité de représenter graphiquement le groupe pulsatif, dans le plan (sous-section 3.1) ou dans l'espace (sous-section 3.2). Enfin la sous-section 3.3 comporte un tableau des couleurs utilisées pour produire la figure de la sous-section 3.1.

#### 3.1 Méthode de Newton en dimension 2

Une première solution consiste à effectuer une projection stéréographique (comme indiqué dans [5], pages 318-319) des éléments de  $\mathcal{S}$  (voir l'égalité (1) de la Proposition 1.1). Nous obtenons alors des points du plan, que nous identifions à leurs affixes complexes. Nous formons enfin le polynôme de degré 24 qui admet ces affixes pour racines. Nous obtenons :

$$P(X) = X^{24} - \frac{8211}{25}X^{20} + \frac{51819}{25}X^{16} + \frac{15134}{25}X^{12} + \frac{51819}{25}X^8 - \frac{8211}{25}X^4 + 1.$$

Grâce au tableaux de couleurs de la sous-section 3.3, nous obtenons, avec Fractal Domains 2.0.11 (voir [4]), la figure suivante <sup>1</sup>.



Ce n'est donc pas très satisfaisant : la représentation à plat rend mal compte des symétries que l'on devrait intuitivement visualiser. Il faut donc tâcher de représenter graphiquement le groupe pulsatif en dimension 3. Dans la section suivante, nous allons étudier cette possibilité.

### 3.2 Méthode de Newton en dimension 3

**Proposition 3.1.** *Les éléments de  $\sqrt{5}S$ , la sphère entière de rayon  $\sqrt{5}$ , sont exactement les solutions réelles du système :*

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 5 = 0 \\ ((x + y + z)^2 - 1)((x + y + z)^2 - 9) = 0 \\ xyz = 0 \end{cases} .$$

*Preuve succincte.* Le système d'équation est invariant par permutation circulation sur  $x, y, z$ . On peut donc, en utilisant la troisième équation, supposer que  $z = 0$ . La deuxième équation permet alors d'affirmer que  $x + y$  vaut  $-1, 1, -3$  ou  $3$ . D'autre part, en calculant  $xy = \frac{1}{2}((x + y)^2 - (x^2 + y^2))$ ,

1. Les couleurs à l'écran ont toutefois été remplacées par des niveaux de gris pour une meilleure qualité d'impression. Le lecteur peut obtenir la version colorisée en écrivant à l'auteur.

et en utilisant la première équation, on obtient :  $xy \in \{-2, 2\}$ . Cela laisse pour  $(x, y)$  les seules valeurs possibles :  $(-2, 1)$  ;  $(1, -2)$  ;  $(-1, 2)$  ;  $(2, -1)$  ;  $(-2, -1)$  ;  $(-1, -2)$  ;  $(1, 2)$  ;  $(2, 1)$ .  $\square$

**Théorème 3.2.** *Considérons l'application*

$$F : \quad \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) \longmapsto (f_1(x, y, z), f_2(x, y, z), f_3(x, y, z))$$

avec

$$\begin{aligned} f_1(x, y, z) &= S_1(x, y, z)^2 - 2S_2(x, y, z) - 5, \\ f_2(x, y, z) &= S_1(x, y, z)^4 - 10S_1(x, y, z)^2 + 9, \\ f_3(x, y, z) &= S_3(x, y, z), \end{aligned}$$

où  $S_1, S_2, S_3$  désignent les polynômes symétriques élémentaires en les variables  $X, Y, Z$ . Alors :

(i) *L'application  $F$  est différentiable en tout point de  $\mathbb{R}^3$ .*

(ii) *Au voisinage des zéros de  $F$ , la différentielle  $F'$  est inversible.*

*Démonstration.* Le point (i) est évident, puisque  $f_1, f_2, f_3$  sont des applications polynomiales. Pour vérifier le point (ii), on détermine  $J(F)(x, y, z)$ , la matrice jacobienne de  $F$  au point  $(x, y, z)$ , et on regarde où s'annule son jacobien  $j(F)(x, y, z)$ . Tous calculs faits on trouve :

$$J(F)(x, y, z) = \begin{bmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 4S_1^3 - 20S_1 & 4S_1^3 - 20S_1 & 4S_1^3 - 20S_1 \\ yz & zx & xy \end{bmatrix}$$

puis

$$\begin{aligned} j(F)(x, y, z) &= -2(4S_1(x, y, z)^3 - 20S_1(x, y, z))(y - z)(z - x)(z - y) \\ &= -8S_1(x, y, z)(S_1(x, y, z)^2 - 5)(y - z)(z - x)(z - y). \end{aligned}$$

Il est alors clair que si  $F(x, y, z) = 0$ , alors  $j(F)(x, y, z) \neq 0$ , donc  $F'$  est inversible au voisinage des zéros de  $F$ .  $\square$

Il est donc possible de représenter graphiquement le groupe pulsatif en utilisant la méthode de Newton en dimension 3 appliquée à la fonction  $F$  sur la sphère. Ce sera l'objet d'un travail ultérieur.

### 3.3 Annexe : tableaux associant les codes couleurs aux racines

#	Racine	Codage	#	Racine	Codage
23	(0,1,2)	(0,1,2)	20	(0,2,1)	(0,2,1)
21	(0,-1,2)	(0,5,2)	17	(0,-2,1)	(0,4,1)
3	(0,1,-2)	(0,1,4)	8	(0,2,-1)	(0,2,5)
1	(0,-1,-2)	(0,5,4)	7	(0,-2,-1)	(0,4,5)

#	Racine	Codage	#	Racine	Codage
22	(1,0,2)	(1,0,2)	13	(1,2,0)	(1,2,0)
24	(-1,0,2)	(5,0,2)	14	(-1,2,0)	(5,2,0)
2	(1,0,-2)	(1,0,4)	16	(1,-2,0)	(1,4,0)
4	(-1,0,-2)	(5,0,4)	10	(-1,-2,0)	(5,4,0)

#	Racine	Codage	#	Racine	Codage
19	(2,0,1)	(2,0,1)	12	(2,1,0)	(2,1,0)
18	(-2,0,1)	(4,0,1)	15	(-2,1,0)	(4,1,0)
5	(2,0,-1)	(2,0,5)	11	(2,-1,0)	(2,5,0)
6	(-2,0,-1)	(4,0,5)	9	(-2,-1,0)	(4,5,0)

Les tableaux ci-dessus doivent se décoder de la manière suivante : pour obtenir le “codage”, on prend les composantes de la “racine” et on les réduit modulo 6. Ce codage modulo 6 est celui de la couleur associée à la racine (de façon canonique) : les composantes de ce codage, multipliées chacune par 51, donnent la composition de la couleur en Rouge, Vert, Bleu. Le “#” est le numéro de la racine pour Fractal Domains 2.0.11 ([4]).

## 4. Conclusion : quelques remarques et prolongements

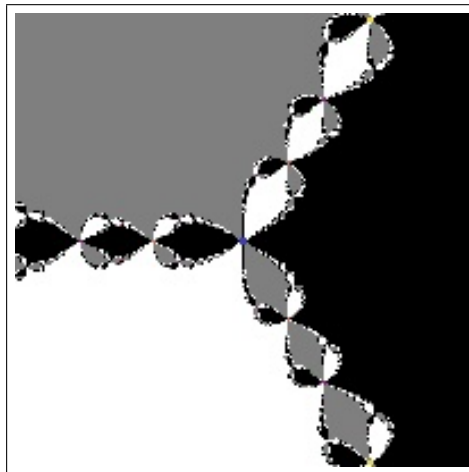
**Remarque 4.1** (Lien Pulsation-Borroméanité). L’intérêt du groupe pulsatif Pul est qu’il établit un lien formel entre deux soucis de René Guitart :

1. la notion de pulsation mathématique (voir [5]) ;
2. la notion de groupe borroméen (voir [7]).

**Remarque 4.2** (Motivation de la section 3). Dans [2], Jean-Guy Degos se sert de la figure ci-dessous pour illustrer la complexité des frontières entre les trois notions de solvabilité, flexibilité et rentabilité d’une entreprise. Il écrit en particulier ([2], page 39) :



Si on approfondit l'analyse des relations "flexibilité et long terme", "solvabilité et moyen terme" et "rentabilité et court terme", elles ne sont pas tout à fait aussi simples que nous les avons exposées. Comme dans beaucoup de domaines du monde réel et comme l'a montré M. F. Barnsley sur le plan théorique en illustrant ses propos par la résolution d'équations à racines complexes par la méthode de Newton<sup>2</sup> il n'y a jamais de frontières nettes entre les causes et les résultats de plusieurs éléments arbitrairement, ou pédagogiquement dissociés.



De la même façon, nous aimerions bien donner à voir la complexité du va-et-vient entre les 24 postures du site pulsatif.

**Remarque 4.3** (Généralisations du groupe pulsatif). On pourrait généraliser le groupe pulsatif dans deux directions.

- La première direction consiste à observer que la sphère entière de rayon  $\sqrt{5}$  se généralise en la notion de *permutoèdre* : le permutoèdre d'ordre  $n$  est un polytope de dimension  $n - 1$  plongé dans un espace de dimension  $n$ , dont les sommets sont obtenus en permutant les coordonnées du vecteur  $(1, 2, \dots, n)$ . On peut montrer que le polyèdre de Kelvin correspond au permutoèdre d'ordre 4. Il serait donc légitime de définir le groupe pulsatif d'ordre  $n$  comme le groupe de symétries du permutoèdre d'ordre  $n$ .

---

2. Voir [1], pp. 280-283.

– La deuxième direction consisterait à définir le groupe pulsatif d'ordre  $n$  comme le groupe de symétries de la sphère entière de rayon  $\sqrt{n+1}$ . Ces deux définitions possibles n'ont pas de raison de coïncider si  $n \neq 4$ . Peut-on décrire ces groupes ? Sont-ils brunniens ? Peut-on déterminer une "fonction F" (voir section 3) pour les représenter graphiquement ?

Certains résultats de cet article ont été utilisés dans [8].

## Références

- [1] [Barnsley M. F., 1988] *Fractals Everywhere*, Academic Press, 1988.
- [2] [Degos J.-G., 1991] Contribution à l'étude du diagnostic financier des petites et moyennes entreprises, *Thèse d'État en Sciences de gestion*, Université Bordeaux I, 1991.
- [3] [Degos J.-Y., 2013] Linear groups and primitive polynomials over  $\mathbb{F}_p$ , *Cah. Top. Géo. Diff. Cat.*, LIV-1 (2013) 56–74.
- [4] [De Mars D. C., 1994] *Fractal Domains 2.0.11*, <http://www.fractaldomains.com>, Copyright 1994–2011.
- [5] [Guitart R., 1999] La pulsation mathématique. Rigueur et ambiguïté, la nature de l'activité mathématique. Ce dont il s'agit d'instruire, *L'Harmattan*, 1999.
- [6] [Guitart R., 2002] Sur les places du sujet et de l'objet dans la pulsation mathématique, *Questions éducatives*, revue du Centre de Recherche en éducation de l'Université Jean Monnet de Saint-Étienne, numéro 22, 2002.
- [7] [Guitart R., 2009] Klein's group as a borromean object, *Cah. Top. Géo. Diff. Cat.*, L-2, (2009) 144–155.
- [8] [Guitart R., 2012] Borromean and Circular Aspects of Rotations and Elliptic Functions, *preprint*, 20 février 2012, 23 pages.

Jean-Yves Degos  
 Rés. Les Lotus, appt 19  
 22, avenue de Chiquet  
 33600 Pessac (France)  
 jydegos@gmail.com