CAHIERS DE TOPOLOGIE ET
GEOMETRIE DIFFERENTIELLE CATEGORIQUES
Vol. LIV-2 (2013)

ESPACES CONNECTIFS : REPRESENTATIONS, FEUILLETAGES, ORDRES ET DIFFEOLOGIES

par Stéphane DUGOWSON

Dédié à René GUITART, en toute amitié

Abstract. This article is a continuation of my former article "On Connectivity Spaces" [8]. After some brief historical references relating to the subject, separation spaces and then adjoint notions of connective representation and connective foliation are developed. The connectivity order previously defined only in the finite case is now generalised to all connectivity spaces, and so to connective foliations. Finally, we start the study of some functorial relations between connectivity and diffeological spaces, and we give a characterization of diffeologisable connectivity spaces.
Résumé. Poursuivant l'étude présentée dans notre article ≪ On connectivity Spaces ≫ [8], nous développons ici, après quelques rapides repères historiques, la notion d'espace de séparation et les notions adjointes de représentation et de feuilletage connectifs. Nous généralisons en outre la notion d'ordre connectif au cas infini, ainsi qu'aux feuilletages connectifs. Finalement, nous étudions certaines relations fonctorielles entre structures connectives et structures difféologiques, caractérisant en particulier les espaces connectifs difféologisables.
Keywords. Connectivity. Links. Borromean. Foliation. Connective representation. Connectivity order. Diffeology
Mathematics Subject Classification (2010). 54A05. 54B30. 57M25. 57R30. 58A99.

Les propriétés connectives du *nœud borroméen* — trois courbes globalement entrelacées mais libres deux à deux — président, dès sa naissance en 1892 avec l'article fondateur du mathématicien allemand Hermann Brunn [3], à l'histoire des espaces connectifs. Peu connu, le résultat de Hermann Brunn concernant la possibilité de représenter par entrelacs toute structure connective finie devra attendre les travaux du Suisse Hans Debrunner [4, 5] dans les années 1960, puis ceux, vingt ans plus tard, du Japonais Taizo Kanenobu [12, 13] pour être rigoureusement établi, constituant ce que j'ai nommé le théorème de Brunn-Debrunner-Kanenobu [1]. Il faut dire que la notion d'espace connectif elle-même n'aura clairement été dégagée en tant que telle qu'au début des années 1980, par le mathématicien allemand Reinhard Börger [1, 2] qui définit la catégorie des espaces connectifs [2] et en donne les premières propriétés, en particulier le fait qu'il s'agit d'une catégorie complète et co-complète, mais sans faire le lien avec les travaux antérieurs de Brunn et Debrunner. Il semble, c'est du moins notre hypothèse, que l'intérêt de Börger pour cette catégorie ait été freiné par le constat qu'elle n'est pas cartésienne fermée [3]. Par ailleurs, il se pourrait qu'en nommant « entrelacs brunniens » les entrelacs effectivement utilisés par Brunn dans sa construction, mais en oubliant de signaler cette construction elle-même, Rolfsen ait, dans son ouvrage publié en 1976 sur la théorie des nœuds[17], rendu à Brunn un hommage un peu paradoxal, en ce sens que le souvenir des briques aura pu contribuer à l'oubli de la bâtisse. En 1988, dans le cadre de travaux sur l'analyse des images et la morphologie mathématique, les Français Georges Matheron et Jean Serra [14, 15], ignorant les travaux antérieurs, posent une définition des espaces connectifs identique à celle de Börger, mais sans les morphismes. En 1998, Jean Serra élargit cette définition à celle de « connections » [4] sur un treillis [18, 19], la définition classique correspondant au cas où le treillis considéré est celui des parties d'un ensemble. Nos propres travaux sur le sujet [5] ont débuté en 2002, à l'occasion d'une réflexion sur la topologie du jeu de go. L'espace borroméen — constitué de trois points globalement connectés sans qu'ils le soient deux à deux, de sorte que sa structure connective est précisément celle du nœud borroméen, raison évidente de cette dénomination — y est l'un des tous premiers exemples que nous considérons, remarquable pour ne pouvoir être défini ni à partir d'une structure topologique sur l'ensemble des trois points, ni à partir de celle d'un graphe à trois som-

1. Voir [8].

2. Plus précisément, Börger considère ce que nous appelons les espaces connectifs intègres, dans lesquels chaque point est nécessairement connexe.

3. C'est par contre une catégorie monoïdale fermée, voir [8].

4. Notion qui, *a priori*, n'a rien à voir avec les notions de connexion en géométrie différentielle.

5. Voir en particulier [6, 7, 8, 10]

mets. Notons au passage que la notion de *connective spaces*, introduite en 2006 par Joseph Muscat et David Buhagiar[16] de façon également indépendante des contributions antérieures, plus proche des espaces topologiques et de ce fait plus restreinte que celle de Börger, est de notre point de vue trop restrictive car elle ne permet pas de rendre compte de la structure connective des entrelacs [6].

Grâce aux espaces de séparation que nous introduisons dans la section 1, la représentation par entrelacs d'un espace connectif fini s'interprète comme un cas particulier de la notion de représentation d'un espace connectif dans un autre (section 2), généralisation que la considération des espaces connectifs infinis nous a conduit à développer afin de clarifier dans ce cas l'idée même de représentation. Or, les premiers exemples de représentation d'espaces connectifs infinis (fibration de Hopf, dynamiques de Lorenz, de Ghrist, etc. [7]) suggèrent fortement la nature dynamique de tels objets. L'idée de dynamique renvoyant, d'un point de vue topologique ou géométrique, à celle de feuilletage, cela nous a conduit à développer la notion de feuilletage connectif, objet de la section 3 du présent article. Les notions de feuilletages connectifs et de représentations connectives se révèlent alors, sous certaines conditions, adjointes l'une de l'autre. Une telle adjonction est traitée en section 4. L'étude des feuilletages connectifs annonçant d'autres travaux portant plus spécifiquement sur l'aspect connectif des systèmes dynamiques [8], il est devenu nécessaire d'élargir la notion d'ordre connectif, introduite dans [8] dans le cas des espaces finis, aux espaces connectifs infinis. C'est ce que nous faisons dans la section 5, où nous définissons en particulier l'ordre connectif d'un feuilletage connectif.

Enfin, un peu à part, la section 6, qui aborde la question des relations fonctorielles entre espaces connectifs et espaces difféologiques, trouve néanmoins à s'articuler de plusieurs façons avec les thèmes précédents. En particulier, le fait que la théorie des espaces connectifs tende à s'orienter d'elle-même vers des notions dynamiques constitue une incitation à explorer les relations entre espaces connectifs et espaces difféo-

6. Voir plus loin la remarque 2.
7. Voir [10], dont [9] constitue une version antérieure disponible en ligne.
8. Voir [10] pour une première introduction aux dynamiques catégoriques connectives.

logiques, dans la mesure où, parce qu'elle généralise et unifie diverses constructions liées à la géométrie différentielle, la difféologie devrait jouer un rôle croissant dans l'étude de diverses classes de systèmes dynamiques. Il pourrait en particulier être intéressant d'explorer le thème des feuilletages en adoptant un double point de vue connectif et difféologique. Nous ne le ferons pas ici, nous contentant d'une question plus élémentaire, celle de préciser, en mettant à jour les foncteurs en jeu dans ces questions, les conditions sous lesquelles un espace connectif est « difféologisable », au sens où sa structure peut être associée à une structure difféologique sur le même ensemble de points, à l'exemple de la structure borroméenne, par laquelle nous avons vu qu'aura commencé l'exploration connective, et qui se rencontre aussi bien en difféologie.

Notations et rappels Conformément aux définitions et aux notations introduites dans notre article [8], rappelons ou précisons notamment les points suivants :

- si f est une application $A \to B$, nous notons f ou $f^{\mathcal{P}}$ l'application de $\mathcal{P}A$ dans $\mathcal{P}B$ définie pour toute partie U de A par $f^{\mathcal{P}}(U) = \{f(u), u \in U\}$,
- si ρ est une application $A \to \mathcal{P}B$, nous notons ${}^{\mu}\rho$ l'application de $\mathcal{P}A$ dans $\mathcal{P}B$ définie pour toute partie U de A par ${}^{\mu}\rho(U) = \bigcup_{u \in U} \rho(u)$,
- pour toute catégorie $\mathbf{C}$, nous désignons par $\overrightarrow{\mathbf{C}}$ la classe de ses flèches, et par $\dot{\mathbf{C}}$ ou $\mathbf{C}_0$ la classe de ses objets.
- un espace connectif X consiste en un couple noté $X = (|X|, \kappa(X))$, $|X|$ étant le support de l'espace, et $\kappa(X)$ sa structure,
- on note **Cnc** la catégorie des espaces connectifs, et **Cnct** celle des espaces connectifs intègres,
- l'ensemble des structures connectives définies sur un ensemble constitue un treillis complet pour l'inclusion,
- sur toute partie du support d'un espace connectif se trouve définie une structure connective dite *induite*, qui est la moins fine faisant de l'injection canonique un morphisme connectif,
- la structure connective engendrée par un ensemble de parties $\mathcal{A}$ d'un ensemble donné est notée $[\mathcal{A}]_0$, tandis que la structure connective intègre engendrée par $\mathcal{A}$ est notée $[\mathcal{A}]_1$ ou simplement $[\mathcal{A}]$,

– étant donné un espace connectif X, nous dirons en outre qu'un ensemble $\mathcal{A}$ de parties de $|X|$ constitue un système de générateurs de X (ou de sa structure $\kappa(X)$) si $[\mathcal{A}]_0 = \kappa(X)$,
– U_T : **Top** $\longrightarrow$ **Cnct** désigne le « foncteur d'oubli » de la catégorie des espaces topologiques dans la catégorie des espaces connectifs intègres.

1 Espaces de séparation

Les espaces de séparation sont une manière de présenter les espaces connectifs intègres. Ils nous permettront d'interpréter les représentations par entrelacs comme des représentations connectives particulières (voir l'exemple 3). Dans la suite, E désigne un ensemble quelconque.

Définition 1. *On appelle* dispositif de séparation *sur E tout ensemble $\mathcal{S}$ de paires $\{S, T\}$ de parties non vides et disjointes de E. Les paires $\{S, T\}$ d'un tel dispositif sont appelés* paires séparatrices*.*

Définition 2. *Soit $\mathcal{S}$ un dispositif de séparation sur E. On dit qu'une partie A de E est* séparée par $\mathcal{S}$*, et l'on note $(\mathcal{S} : A)$, s'il existe dans $\mathcal{S}$ une paire séparatrice $\{S, T\}$ qui recouvre A et dont chaque membre rencontre A : $A \subset S \cup T$, $A \cap S \neq \emptyset$ et $A \cap T \neq \emptyset$.*

Remarque 1. Pour tout groupe G de permutations de E et tout dispositif de séparation $\mathcal{S}$ sur E, on a alors $(G\mathcal{S} : A) \Leftrightarrow \exists \varphi \in G$ tel que $(\mathcal{S} : \varphi(A))$, où $G\mathcal{S}$ est le dispositif de séparation défini par $G\mathcal{S} = \{\{\varphi(S), \varphi(T)\}, \varphi \in G, (S, T) \in \mathcal{S}\}$.

Définition 3. *Soit $\mathcal{S}$ un dispositif de séparation sur E. L'ensemble $\kappa(\mathcal{S}) = \{K \in \mathcal{P}(E), \neg(\mathcal{S} : K)\}$ constitue une structure connective intègre sur E. On note $E[\mathcal{S}]$* l'espace connectif défini sur E par le dispositif de séparation $\mathcal{S}$*, de sorte que l'on a : $|E[\mathcal{S}]| = E$ et $\kappa(E[\mathcal{S}]) = \kappa(\mathcal{S})$.*

Théorème 1. *Tout espace connectif intègre peut être défini par un dispositif de séparation.*

Preuve. On forme un dispositif de séparation adéquat en prenant tous les couples de parties disjointes non vides (A, B) telles que toute composante connexe de $A \cup B$ soit contenue soit dans A, soit dans B.

□

Exemple 1 (Foncteur V_T). On définit un foncteur $V_T : \mathbf{Top} \to \mathbf{Cnct}$ en posant, pour tout $X = (|X|, \mathcal{T}_X) \in \mathbf{Top}_0 : V_T(X) = |X|[\mathcal{S}_X]$, où $\mathcal{S}_X = \{\{S,T\} \in (\mathcal{T} \setminus \emptyset)^2, S \cap T = \emptyset\}$, et pour toute application continue $f : X \to Y$, $V_T(f) = f$. En effet, une application continue transforme nécessairement une partie non séparable par ouverts disjoints de l'espace de départ en partie non séparable par ouverts disjoints de l'espace d'arrivée. Remarquons que toute partie connexe au sens topologique est nécessairement connexe au sens de cette nouvelle structure connective. Autrement dit, le foncteur U_T est connectivement plus fin que le foncteur V_T. Par exemple, pour $|X| = \{1,2,3\}$ admettant pour ouverts non triviaux $\{1,2\}$ et $\{1,3\}$, $\{2,3\}$ est non connexe dans $U_T(X)$ mais connexe dans $V_T(X)$. Par contre, dans un espace *métrique* X, la connexité d'une partie est équivalente à l'impossibilité de la séparer par des ouverts *disjoints* : $U_T(X) = V_T(X)$ (nous en donnons une preuve dans [10], page 18).

Une classe d'espaces de séparation importants est constituée des espaces affines réels : on munit l'espace affine réel E_n de dimension n d'une structure connective notée σ_n ou σ, et appelée la *structure connective usuelle de séparation* sur E_n, en prenant pour dispositif de séparation $G\mathcal{S}$ avec G le groupe des homéomorphismes de l'espace topologique $E_n \simeq \mathbf{R}^n$ et pour $\mathcal{S}$ le singleton $\{\{S,T\}\}$, avec S et T les deux demi-espaces ouverts définis par un hyperplan quelconque.

Définition 4. *L'espace connectif* (E_n, σ) *est appelé* l'espace usuel de séparation n-dimensionnel.

Proposition 2. *La structure connective de l'espace usuel de séparation* (E_n, σ) *n'est pas celle d'un espace topologique.*

Preuve. On vérifie facilement que dans tout espace topologique, si A et B sont deux parties connexes non vides et que x est un point de l'espace tel que $x \notin A \cup B$ et que $A \cup \{x\}$ et $B \cup \{x\}$ soient non connexes, alors $A \cup B \cup \{x\}$ est encore non connexe. Or, dans (E_n, σ), si l'on prend par exemple pour A une demi-sphère, pour B la demi-sphère complémentaire et pour x le centre de la sphère $A \cup B$, la propriété précédente est contredite.

$\square$

À noter que l'espace connectif (E_n, σ) est moins fin (il a plus de connexes) que l'espace connectif (E_n, τ) associé par U_T à l'espace topologique usuel E_n.

On définit de même la sphère (réelle) usuelle de séparation n-dimensionnelle (S^n, σ) en prenant pour dispositif de séparation $G\mathcal{S}$ avec G le groupe des homéomorphismes de l'espace topologique S^n et pour $\mathcal{S}$ le singleton $\{\{S, T\}\}$, avec S et T les deux ouverts séparés par une sphère $(n-1)$-dimensionnelle plongée dans S^n.

Remarque 2. La propriété des espaces topologiques utilisée dans la preuve ci-dessus pour montrer que les espaces (E_n, σ) ne sont pas topologiques fait partie de celles incorporées par Muscat et Buhagiar dans leur définition des *connective spaces* [16]. Pour cette raison, les espaces de Muscat et Buhagiar ne permettent pas de rendre compte de la structure connective des entrelacs (voir ci-dessous l'exemple 3).

2 Représentations connectives

Le théorème de Brunn-Debrunner-Kanenobu (voir [8, 10]) concerne la représentation *par entrelacs* des espaces connectifs finis. Le point de vue que nous soutenons ici est que la représentation d'un espace connectif fini par entrelacs doit être comprise comme un cas particulier de la notion générale de représentation d'un espace connectif dans un autre, objet de la présente section.

L'idée des représentations connectives est d'associer à tout *point* de l'espace représenté une *partie* non vide de l'espace dans lequel a lieu la représentation. Pour cela, nous aurons besoin de faire appel au foncteur $\mathcal{P}^*$ ainsi défini :

Définition 5. *On définit un endofoncteur $\mathcal{P}^*$ de la catégorie* **Cnc**, *appelé* puissance connective générale *ou* espace connectif des parties non vides, *en associant à tout espace connectif X l'espace connectif, noté $\mathcal{P}^*_X$ (ou $\mathcal{P}^*(X)$, ou $\mathcal{P}^*X$) défini par*

– *son support* $|\mathcal{P}^*_X| = \mathcal{P}^*_{|X|}$,

– *et sa structure connective* $\kappa(\mathcal{P}^*_X) = \{\mathcal{A} \in \mathcal{P}\mathcal{P}^*_{|X|}, \bigcup \mathcal{A} \in \kappa(X)\}$,

et en associant à tout morphisme connectif $f : X \to Y$*, le morphisme connectif noté* $f^{\mathcal{P}}$ *ou simplement* f*, défini pour toute partie non vide* A *de* $|X|$ *par* $f(A) = \{f(a), a \in A\}$.

Remarque 3. L'espace connectif $\mathcal{P}^*X$ n'est pas intègre en général, même lorsque X l'est.

Remarque 4. On définit de même un endofoncteur $\mathcal{K}^*$ de la catégorie **Cnct**, appelé *puissance connective intègre* ou *espace des parties connexes non vides*, en associant à tout espace connectif intègre X l'espace connectif $\mathcal{K}^*_X$ de ses parties connexes non vides, de structure connective $\kappa(\mathcal{K}^*_X) = \{\mathcal{A} \in \mathcal{P}(|\mathcal{K}^*_X|), \bigcup \mathcal{A} \in \kappa(X)\}$, et à tout morphisme connectif $f : X \to Y$, le morphisme connectif encore noté $f^{\mathcal{P}}$ ou f, défini pour toute partie connexe non vide K de $|X|$ par $f(K) = \{f(a), a \in K\}$.

Définition 6 (Représentation connective)**.** *On appelle* représentation *connective d'un espace connectif* X *dans un espace connectif* Y *tout morphisme connectif de* X *dans l'espace connectif* $\mathcal{P}^*(Y)$*. On écrira* $\rho : X \rightsquigarrow Y$ *pour exprimer que* ρ *est une représentation de* X *dans* Y*. Étant donnée* ρ *une telle représentation,* Y *sera appelé l'*espace *de* ρ*, et sera noté* $Y = sp(\rho)$ *;* X *sera appelé l'*objet *de* ρ*, et sera noté* $ob(\rho)$.

Dans le cas où X est intègre, une représentation $\rho : X \rightsquigarrow Y$ s'identifie à un morphisme connectif de X dans l'espace intègre $\mathcal{K}^*(Y)$.

Définition 7. *On dit qu'une représentation* $f : X \rightsquigarrow Y$ *est* intègre *si son objet et son espace sont tous deux intègres.*

Soit maintenant ϵ la transformation naturelle $Id_{\mathbf{Cnc}} \to \mathcal{P}^*$ définie pour tout espace connectif X par $\forall x \in |X|, \epsilon_X(x) = \{x\}$, et μ la transformation naturelle $\mathcal{Q}^* = \mathcal{P}^* \circ \mathcal{P}^* \to \mathcal{P}^*$ définie par $\forall \mathcal{A} \in \mathcal{Q}^*_{|X|}, \mu_X(\mathcal{A}) = \bigcup \mathcal{A}$. Le triplet $(\mathcal{P}^*, \epsilon, \mu)$ constitue alors une monade sur **Cnc**. La catégorie de Kleisli associée à cette monade a pour objets les espaces connectifs, et pour morphismes les représentations, la composée de deux représentations $\rho : X \rightsquigarrow Y$ et $\tau : Y \rightsquigarrow Z$ étant définie pour tout $x \in X$ par $\tau \odot \rho(x) = \mu_Z(\tau^{\mathcal{P}}(\rho(x))) \subset Z$.

Étant donnée une représentation $\rho : X \rightsquigarrow Y$, on notera ${}^{\mu}\rho$ l'application de $\mathcal{P}^*X$ dans $\mathcal{P}^*Y$ définie par ${}^{\mu}\rho = \mu_Y \circ \rho^{\mathcal{P}}$. Une représentation de X dans Y est donc une application ρ de X dans $\mathcal{P}^*_Y$ telle que ${}^{\mu}\rho$ transforme toute partie connexe non vide de X en une partie connexe non vide de Y.

Pour toute partie non vide A de X, on a donc

$$ {}^{\mu}\rho(A) = \mu_Y(\rho^{\mathcal{P}}(A)) = \mu_Y(\{\rho(a), a \in A\}) = \bigcup_{a \in A} \rho(a) \subset Y $$

tandis que la composée de deux représentations s'écrit

$$ \tau \odot \rho = {}^{\mu}\tau \circ \rho. $$

Remarque 5. En prenant $\epsilon : Id_{\mathbf{Cnct}} \to \mathcal{K}^*$ et $\mu : \mathcal{K}^*\mathcal{K}^* \to \mathcal{K}^*$ définis comme ci-dessus, le triplet $(\mathcal{K}^*, \epsilon, \mu)$ constitue de même une monade sur **Cnct**, dont la catégorie de Kleisli associée a pour objets les espaces connectifs intègres, et pour morphismes les représentations intègres, avec la composition des représentations définie comme pour le cas général.

Définition 8 (Représentations claires et distinctes)**.** *Soit $\rho : X \rightsquigarrow Y$ une représentation d'un espace X dans un espace Y. On dit que ρ est* claire *si $\forall A \in \mathcal{P}_{|X|}, A \notin \kappa(X) \Rightarrow {}^{\mu}\rho(A) \notin \kappa(Y)$. On dit que ρ est* distincte *si $\forall (x, y) \in X^2, x \neq y \Rightarrow \rho(x) \cap \rho(y) = \emptyset$.*

Exemple 2. Une représentation claire et distincte de l'espace borroméen $\mathcal{B}_3$ est obtenue en associant à chacun de ses points une des trois composantes d'un *noeud borroméen* plongé dans (E_3, σ_3). Plus généralement, les entrelacs brunniens constituent, dans (E_3, σ_3), des représentations claires et distinctes des espaces connectifs brunniens.

On vérifie facilement la première partie du théorème suivant (voir [10], théorème 10), et le théorème de Brunn-Debrunner-Kanenobu entraîne alors la seconde partie :

Théorème 3. *Tout espace connectif admet une représentation claire et distincte dans un espace intègre. En particulier, tout espace connectif fini admet une représentation par entrelacs, les points non connexes étant représentés par deux ou plusieurs composantes séparables de tels entrelacs.*

Définition 9 (Représentations de type $\mathcal{S}$)**.** *Soit $\mathcal{S}$ un dispositif de séparation sur un ensemble Y. On appelle* représentation de type $\mathcal{S}$ *toute représentation claire et distincte d'un espace connectif X dans l'espace $Y[\mathcal{S}]$.*

Exemple 3. Toute représentation par entrelacs d'un espace connectif est une représentation de type $\mathcal{S}$, où $\mathcal{S}$ est un dispositif de séparation engendrant l'espace de séparation usuel (E_3, σ_3).

Définition 10. *[Catégorie des représentations] On définit une catégorie* $\mathbf{RC}$, *dite* catégorie des représentations connectives *en prenant pour objets les représentations connectives, et pour morphismes d'une représentation $\rho : A \rightsquigarrow B$ vers une représentation $\rho' : A' \rightsquigarrow B'$ les couples (α, β) où $\alpha : A \to A'$ et $\beta : B \to B'$ sont des morphismes connectifs tels que $\beta^{\mathcal{P}} \circ \rho \subset \rho' \circ \alpha$, au sens où, pour tout $a \in A$, $\beta^{\mathcal{P}}(\rho(a)) \subset \rho'(\alpha(a))$. La sous-catégorie pleine de* $\mathbf{RC}$ *admettant pour objets les représentations claires et distinctes sera notée* $\mathbf{RCD}$.

Exemple 4 (points d'une représentation). La catégorie $\mathbf{RC}$ admet comme objet final l'unique représentation $\mathbf{1_{RC}} : \bullet \mapsto \{\bullet\}$ d'un singleton connecté dans lui-même. Un point d'une représentation $\rho : A \rightsquigarrow B$ est alors un morphisme $\mathbf{1_{RC}} \to \rho$, c'est-à-dire la donnée d'un point connecté p de A et d'un point connecté q de $\rho(p) \subset B$. En particulier, si l'objet ou l'espace d'une représentation ne possède pas de point intègre, celle-ci n'a pas de point.

3 Feuilletages connectifs

Définition 11 (Feuilletage connectif)**.** *Un* feuilletage connectif *est un triplet (E, κ_0, κ_1) constitué d'un ensemble E appelé le* support *du feuilletage, et d'un couple (κ_0, κ_1) de structures connectives sur E, la première, κ_0, étant dite structure connective* interne*, et la seconde, κ_1, structure connective* externe*. Lorsque que $\kappa_0 \subset \kappa_1$, le feuilletage est dit* régulier*.*

Lorsqu'une partie de E est connexe pour κ_0 (resp. κ_1), on dit aussi qu'elle est κ_0-connexe, ou encore qu'elle est *connexe interne*, ou encore *intérieurement connexe* (resp. κ_1-connexe, ou *connexe externe*, ou encore *extérieurement connexe*). Étant donné un feuilletage connectif Z, on notera $|Z|$ son support, $\kappa_0(Z)$ sa structure connective interne et $\kappa_1(Z)$ sa structure connective externe, de sorte que $Z = (|Z|, \kappa_0(Z), \kappa_1(Z))$. Souvent, on notera Z_0 l'espace connectif intérieur $Z_0 = (|Z|, \kappa_0(Z))$, et Z_1 l'espace connectif extérieur $Z_1 = (|Z|, \kappa_1(Z))$.

Définition 12. *La* catégorie des feuilletages connectifs **FC** *a pour objets les feuilletages connectifs, et pour morphismes d'un feuilletage Z vers un feuilletage Z' les applications $|Z| \to |Z'|$ qui sont connectives de $Z_i = (|Z|, \kappa_i(Z))$ vers $Z'_i = (|Z'|, \kappa_i(Z'))$ pour chacun des deux indices $i \in \{0, 1\}$.*

Définition 13 (Feuilles)**.** *Soit Z un feuilletage. On appelle* domaine *de Z, et on note $dom(Z)$, la partie présente de la structure interne $\kappa_0(Z)$. On appelle* feuilles *de Z les composantes connexes non vides de la structure interne $\kappa_0(Z)$. La* structure interne *d'une feuille F est la structure connective induite sur F par $\kappa_0(Z)$. La structure externe de F est la structure induite sur F par $\kappa_1(Z)$.*

Pour tout feuilletage Z, on note $\mathcal{F}(Z)$ l'ensemble des feuilles de Z. Si $dom(Z)$ est non vide, $\mathcal{F}(Z)$ en constitue une partition.

Remarque 6. Par définition, chaque feuille est intérieurement connexe. Par contre, si le feuilletage n'est pas régulier, une feuille peut ne pas être extérieurement connexe.

Définition 14. *On dira qu'un morphisme de feuilletages $\phi : Z \to Z'$ est* strict *si $\phi^{\mathcal{P}}$ transforme toute feuille de Z en une feuille de Z'. La catégorie ayant pour objets les feuilletages connectifs et pour morphismes les morphismes de feuilletages stricts sera notée* **FS**.

Exemple 5. Un espace topologique Y muni d'une relation d'equivalence ρ définit un feuilletage connectif, en prenant $(|Z|, \kappa_1(Z)) = U_T(Y)$ et $\kappa_0(Z) = \rho$, la structure connective associée à la relation d'équivalence ρ.

Exemple 6. À toute variété feuilletée on associe le feuilletage connectif régulier défini sur le même ensemble de points en prenant pour structure connective interne celle associée à la topologie la plus fine du feuilletage (celle de plus faible dimension), et pour structure connective externe celle associée à la topologie la moins fine du feuilletage.

Définition 15 (Espace induit des feuilles)**.** *Soit $Z = (|Z|, \kappa_0(Z), \kappa_1(Z))$ un feuilletage connectif. L'*espace induit *des feuilles de Z est l'espace connectif noté $\mathcal{F}^{\downarrow}(Z)$, ou plus simplement $Z^{\downarrow}$, de support $|Z^{\downarrow}|$ l'ensemble $\mathcal{F}(Z)$ des feuilles de Z, et de structure connective celle qui y est induite par l'espace connectif des parties non vides $\mathcal{P}^*(Z_1)$, où $Z_1 = (|Z|, \kappa_1(Z))$, de sorte qu'un ensemble $\mathcal{A}$ de feuilles est $\kappa(Z^{\downarrow})$-connexe si et seulement si $\bigcup_{F\in\mathcal{A}} F \in \kappa_1(Z)$.*

Remarque 7. Si une κ_0-composante connexe n'est pas κ_1-connexe, elle définit un point non connexe de l'espace $Z^{\downarrow}$. Ainsi, l'espace induit des feuilles d'un feuilletage Z est-il intègre si et seulement si toute composante connexe de la structure interne de Z est extérieurement connexe.

Remarque 8. Il existe une autre façon, qui pourrait d'ailleurs sembler plus naturelle, de munir l'espace des feuilles d'une structure connective. En effet, les feuilles d'un feuilletage étant les composantes connexes de sa structure interne, elles sont également les classes d'une certaine relation d'équivalence partielle, d'où il découle très naturellement la définition de l'espace *quotient* des feuilles. La structure quotient ainsi obtenue (appelée également structure *sortante*) est moins fine que celle de l'espace induit (également appelé espace *entrant*). Nous ne développerons pas ici la notion d'espace quotient des feuilles, renvoyant le lecteur intéressé aux sections § 1.8 et § 2.2.2. de [10].

4 Une adjonction entre représentations et feuilletages

4.1 Une famille de foncteurs RC → FC

À toute représentation connective $\rho : ob(\rho) \rightsquigarrow sp(\rho)$ on souhaite associer fonctoriellement un feuilletage $\Phi(\rho)$. Si, pour la structure externe du feuilletage, la structure de l'espace $sp(\rho)$ de la représentation s'impose, il y a par contre plusieurs choix possibles, *a priori* légitimes, pour la structure interne. Pour préciser ces choix, nous aurons besoin de faire appel à ce que nous appellerons des structures connectives fonctorielles :

Définition 16. *Une* structure connective fonctorielle *est une application γ définie sur la classe des espaces connectifs et qui à tout espace connectif B associe une structure connective $\gamma(B)$ sur $|B|$ qui soit fonctorielle au sens où il existe un endofoncteur Γ de* **Cnc** *défini sur les objets par $\Gamma(B) = (|B|, \gamma(B))$, et sur les flèches par $\Gamma(f) = f$. Nous dirons qu'une structure connective fonctorielle γ est plus fine qu'une autre, γ', et l'on notera $\gamma \subset \gamma'$, si pour tout espace connectif B on a $\gamma(B) \subset \gamma'(B)$.*

Par exemple, notons respectivement $\kappa_D(B)$ et $\kappa_G(B)$ la structure connective désintégrée[9] et la structure connective grossière sur $|B|$. Alors κ_D et κ_G sont des structures connectives fonctorielles. De même, l'application κ qui à tout espace connectif B associe sa structure connective $\kappa(B)$ est une structure connective fonctorielle, et l'on a :

$$\kappa_D \subset \kappa \subset \kappa_G.$$

Soit maintenant (γ_0, γ_1) un couple de structures connectives fonctorielles tel que $\gamma_0 \subset \gamma_1$. À toute représentation connective $\rho : A \rightsquigarrow B$, on associe le feuilletage $Z = \Phi_{(\gamma_0,\gamma_1)}(\rho) = \Phi(\rho)$ de support $|Z| = |B|$, de structure externe $\kappa_1(Z) = \kappa(B)$ et de structure interne

$$\kappa_0(Z) = [\bigcup_{i\in\{0,1\}} \bigcup_{a\in A_i} (\gamma_i(B) \cap \mathcal{P}_{\rho(a)})]_0,$$

où A_0 désigne la partie absente de A et A_1 sa partie présente.

Proposition 4. *Soit $(\alpha, \beta) : \rho \to \rho'$ un morphisme de représentations connectives. Alors l'application $\beta : |sp(\rho)| \to |sp(\rho')|$ est un morphisme de feuilletages $\beta : \Phi(\rho) \to \Phi(\rho')$.*

Preuve. Posons $A = ob(\rho)$, $B = sp(\rho)$, $A' = ob(\rho')$ et $B' = sp(\rho')$. Si K est une partie extérieurement connexe du feuilletage $Z = \Phi(\rho)$, alors $\beta^{\mathcal{P}}(K)$ est une partie extérieurement connexe de $Z' = \Phi(\rho')$ puisque les structures extérieures des feuilletages coïncident avec les structures des espaces de représentation que respecte β. Soit maintenant $K \in$

9. C'est-à-dire la structure discrète non intègre, pour laquelle seul le vide est connexe.

$\bigcup_{i\in\{0,1\}}\bigcup_{a\in A_i}(\gamma_i(B)\cap\mathcal{P}_{\rho(a)})$. Il faut et il suffit de montrer que $\beta^{\mathcal{P}}(K)$ est intérieurement connexe dans Z'. Si $K\in\gamma_0(B)\cap\mathcal{P}_{\rho(a)}$ avec $a\in A_0$, alors $\beta(K)\in\gamma_0(B')$ puisque γ_0 est fonctoriel. Et $K\subset\rho(a)\Longrightarrow\beta^{\mathcal{P}}(K)\subset\beta^{\mathcal{P}}(\rho(a))\subset\rho'(\alpha(a))$. Si $a'=\alpha(a)\in A'_0$, on a alors $\beta^{\mathcal{P}}(K)\in\gamma_0(B')\cap\mathcal{P}_{\rho(a')}\subset\kappa_0(Z')$, tandis que si $a'\in A'_1$, on a $\beta^{\mathcal{P}}(K)\in\gamma_1(B')\cap\mathcal{P}_{\rho(a')}\subset\kappa_0(Z')$, puisque $\gamma_0\subset\gamma_1$. Si $K\in\gamma_1(B)\cap\mathcal{P}_{\rho(a)}$ avec $a\in A_1$, on a nécessairement $a'=\alpha(a)\in A'_1$, et comme précédemment le fait que $\beta^{\mathcal{P}}(\rho(a))\subset\rho'(a')$ permet de conclure que $\beta^{\mathcal{P}}(K)\in\gamma_1(B')\cap\mathcal{P}_{\rho(a')}\subset\kappa_0(Z')$, puisque γ_1 est fonctoriel.

□

On en déduit que l'application $\Phi=\Phi_{(\gamma_0,\gamma_1)}$ qui à toute représentation ρ associe le feuilletage $\Phi(\rho)$ et à tout morphisme de représentations (α,β) associe β est un foncteur $\mathbf{RC}\to\mathbf{FC}$. Dans le cas où $\gamma_0=\gamma_1=\gamma$, on le notera simplement Φ_γ. Lorsque $\gamma=\kappa_G$ (resp. $\gamma=\kappa_D$), on notera simplement Φ_G (resp. Φ_D) le foncteur Φ_γ.

Proposition 5. *Pour toute représentation connective ρ, le feuilletage $\Phi_\kappa(\rho)$ est régulier.*

Preuve. La structure interne de $\Phi_\kappa(\rho)$ étant, par définition, engendrée par des parties extérieurement connexes, elle est nécessairement plus fine que la structure externe.

□

La proposition suivante découle immédiatement des définitions.

Proposition 6. *Soient (γ_0,γ_1) un couple de structures connectives fonctorielles, tel que $\gamma_0\subset\gamma_1$, et soit $\Phi=\Phi_{(\gamma_0,\gamma_1)}$ le foncteur* $\mathbf{RC}\to\mathbf{FC}$ *associé. Si ρ est une représentation distincte alors, pour $Z=\Phi(\rho)$, on a*

$$\kappa_0(Z)=\bigcup_{i\in\{0,1\}}\bigcup_{a\in A_i}(\gamma_i(B)\cap\mathcal{P}_{\rho(a)}),$$

de sorte que si $\gamma_1\supset\kappa$ et que a est un point connecté de $ob(\rho)$, alors $\rho(a)$ est une feuille de Z.

Corollaire 7. *Si ρ est une représentation distincte d'un objet intègre, les feuilles de $\Phi_\kappa(\rho)$ sont les parties de $sp(\rho)$ de la forme $\rho(a)$:*

$$\mathcal{F}(\Phi_\kappa(\rho))=\{\rho(a),a\in ob(\rho)\}.$$

4.2 Le foncteur $\mathcal{R}^{\downarrow}$: **FC** $\to$ **RCD**

On définit de la manière suivante un foncteur **FC** $\to$ **RCD**, appelé *représentation induite* et noté $\mathcal{R}^{\downarrow}$.

Définition de $\mathcal{R}^{\downarrow}$ sur les objets. À tout feuilletage Z, $\mathcal{R}^{\downarrow}$ associe la représentation $\mathcal{R}^{\downarrow}(Z) : Z^{\downarrow} \rightsquigarrow Z_1$ de l'espace induit des feuilles $Z^{\downarrow}$, définie pour toute feuille $F \in \mathcal{F}(Z) = |Z^{\downarrow}|$ par

$$\mathcal{R}^{\downarrow}(Z)(F) = F \subset |Z_1|.$$

$\mathcal{R}^{\downarrow}(Z)$ est bien une représentation connective puisque, par définition, un ensemble de feuilles est connexe dans $\mathcal{P}_{Z_1}$ si et seulement si son union est connexe dans Z_1, et que cette dernière propriété caractérise la structure connective de l'espace induit $Z^{\downarrow}$. Il est en outre immédiat que la représentation $\mathcal{R}^{\downarrow}(Z)$ est claire (si un ensemble de feuilles est non connexe dans $Z^{\downarrow}$, alors leur union est également non connexe dans l'espace externe du feuilletage), et distincte (deux point différents, c'est-à-dire deux feuilles différentes, sont représentées par deux composantes connexes internes nécessairement disjointes).

Proposition 8. *Si le feuilletage $\mathcal{Z}$ est régulier, l'objet de la représentation $\mathcal{R}^{\downarrow}\mathcal{Z}$ est intègre.*

Preuve. Toute feuille étant extérieurement connexe, elle constitue un singleton connexe de $ob(\mathcal{R}^{\downarrow}\mathcal{Z})$.

$\square$

Définition de $\mathcal{R}^{\downarrow}$ sur les flèches. $\mathcal{R}^{\downarrow}$ est défini sur les flèches de **FC** en associant à tout morphisme de feuilletages $\phi : Z \to Z'$ le morphisme de représentations (ϕ_0, ϕ_1), où $\phi_0 : Z^{\downarrow} \to Z'^{\downarrow}$ est défini pour toute feuille $F \in \mathcal{F}(Z)$ par : $\phi_0(F)$ est celle des composantes connexes de l'espace interne $(|Z'|, \kappa_0(Z')$ qui contient le $\kappa_0(Z')$-connexe $\phi^{\mathcal{P}}(F)$, et où $\phi_1 : Z_1 \to Z'_1$ est le morphisme connectif qui en tant qu'application ensembliste coïncide avec ϕ.

Remarque 9 (Représentation quotient $\mathcal{R}^{\uparrow}$). À tout feuilletage on peut aussi associer fonctoriellement une représentation claire et distincte de son espace quotient de feuilles dans l'ensemble ambiant muni d'une structure connective adaptée. Le lecteur intéressé pourra se rapporter à la section § 2.3.2. de [10].

4.3 L'adjonction $\mathcal{R}^{\downarrow} \dashv \Phi_{\kappa}$

Pour établir cette adjonction entre les foncteurs $\mathcal{R}^{\downarrow}$ et Φ_{κ} lorsqu'ils sont restreints à certaines catégories de feuilletages et de représentations, nous faisons appel aux trois lemmes suivants (lemme 9 à lemme 11).

Lemme 9. *Soit Z un feuilletage* régulier*, ρ une représentation quelconque, et $(\alpha, \beta) : \mathcal{R}^{\downarrow}Z \to \rho$ un morphisme de représentations. Alors β est un morphisme de feuilletages $Z \to \Phi_{\kappa}(\rho)$.*

Preuve. Par définition d'un morphisme de représentations, β est un morphisme connectif $sp(\mathcal{R}^{\downarrow}Z) \to sp(\rho)$, autrement dit un morphisme connectif $Z_1 \to (\Phi_{\kappa}(\rho))_1$. D'autre part, en appliquant le foncteur Φ_{κ} au morphisme (α, β) (proposition 4), on en déduit que β est un morphisme de feuilletages $\Phi_{\kappa}(\mathcal{R}^{\downarrow}Z) \to \Phi_{\kappa}(\rho)$, donc en particulier un morphisme pour les structures internes $(\Phi_{\kappa}(\mathcal{R}^{\downarrow}Z))_0 \to (\Phi_{\kappa}(\rho))_0$. Mais Z étant régulier, $\kappa_0(Z) \subset \kappa_0(\Phi_{\kappa}(\mathcal{R}^{\downarrow}Z))$. En effet, tout connexe intérieur est trivialement inclus dans une composante connexe intérieur et, par la régularité de Z, est aussi un connexe extérieur, de sorte que, par définition de la structure $\kappa_0(\Phi_{\kappa}(\mathcal{R}^{\downarrow}Z))$, se trouve bien appartenir à celle-ci. Finalement, on a à la fois $\beta : Z_1 \to (\Phi_{\kappa}(\rho))_1$ et $\beta : Z_0 \to (\Phi_{\kappa}(\rho))_0$, autrement dit β est bien un morphisme $Z \to \Phi_{\kappa}(\rho)$.

□

Lemme 10. *Soient $\mathcal{Z}$ un feuilletage connectif, ρ une représentation connective* distincte *et $(\alpha, \beta) : \mathcal{R}^{\downarrow}(Z) \to \rho$ un morphisme de représentations. Alors la connaissance de β détermine celle de α. Autrement dit, si $(\alpha', \beta) : \mathcal{R}^{\downarrow}(Z) \to \rho$ est également un morphisme de représentations, on a nécessairement $\alpha = \alpha'$.*

Preuve. Par définition, α est un morphisme connectif de $ob(\mathcal{R}^{\downarrow}Z) = \mathcal{F}^{\downarrow}(Z) = Z^{\downarrow}$ dans $ob(\rho)$. Soit $F \in ob(\mathcal{R}^{\downarrow}(Z))$, autrement dit une composante connexe de $Z_0 = (|Z|, \kappa_0(Z))$. Par définition d'un morphisme de représentations, on a l'inclusion $\beta^{\mathcal{P}}(\mathcal{R}^{\downarrow}Z(F)) \subset \rho(\alpha(F))$. Or, $\mathcal{R}^{\downarrow}Z(F) = F \subset |Z|$, d'où $\beta^{\mathcal{P}}(F) \subset \rho(\alpha(F))$. La représentation ρ étant distincte, il n'y a au plus qu'un point a de $ob(\rho)$ pouvant vérifier $\beta^{\mathcal{P}}(F) \subset \rho(a)$, d'où l'unicité annoncée.

□

Lemme 11. *Soit Z un feuilletage, ρ une représentation claire et distincte, d'objet $ob(\rho)$ intègre, et soit $\beta : Z \to \Phi_\kappa(\rho)$ un morphisme de feuilletages. Alors il existe un et un seul morphisme connectif $\alpha : \mathcal{F}^{\downarrow}Z \to ob(\rho)$ tel que (α, β) soit un morphisme de représentations $\mathcal{R}^{\downarrow}Z \to \rho$.*

Preuve. S'il existe, le morphisme α est unique d'après le lemme 10. Précisons l'application ensembliste $\alpha : \mathcal{F}Z \to |ob(\rho)|$ dont, nécessairement, il s'agit. Pour $F \in \mathcal{F}Z$, on a $\beta^{\mathcal{P}}(F) \in \overline{\kappa_0(\Phi_\kappa(\rho))}$, puisque β préserve aussi les morphismes internes. Notons $\overline{\beta^{\mathcal{P}}(F)}$ la composante $\kappa_0(\Phi_\kappa(\rho)$-connexe contenant $\beta^{\mathcal{P}}(F)$. Alors $\overline{\beta^{\mathcal{P}}(F)} \in \mathcal{F}(\Phi_\kappa(\rho))$. D'après le corollaire 7, il existe alors un élément unique $a_F \in ob(\rho)$ tel que $\overline{\beta^{\mathcal{P}}(F)} = \rho(a_F)$. L'application α est donc définie par $\alpha(F) = a_F$. Autrement dit,

$$\alpha(F) = a \Leftrightarrow \beta^{\mathcal{P}}(F) \subset \rho(A) \Leftrightarrow \beta^{\mathcal{P}}(F) \subset \overline{\beta^{\mathcal{P}}(F)} = \rho(A).$$

Il s'agit de prouver que l'application α ainsi définie est un morphisme connectif $\mathcal{F}^{\downarrow}Z \to ob(\rho)$, et que le couple (α, β) est bien un morphisme de représentations. Soit donc $\mathcal{L}$ un ensemble $\kappa(Z^{\downarrow})$-connexe de feuilles. Par définition de $Z^{\downarrow}$, on a $\bigcup_{F\in\mathcal{L}} F \in \kappa_1(Z)$, donc l'ensemble $W = \bigcup_{F\in\mathcal{L}} \beta^{\mathcal{P}}(F)$ vérifie $W \in \kappa_1(\Phi_\kappa(\rho))$. Posons

$$\mathcal{A} = \alpha^{\mathcal{P}}(\mathcal{L}) = \{a \in ob(\rho), \exists F \in \mathcal{L}, \rho(a) \supset \beta^{\mathcal{P}}(F)\}.$$

On veut montrer que $\mathcal{A}$ est une partie connexe de $ob(\rho)$. Or, ρ étant claire, il suffit pour cela de prouver que ${}^{\mu}\rho(\mathcal{A}) = \bigcup_{F\in\mathcal{L}} \overline{\beta^{\mathcal{P}}(F)}$ est connexe dans $sp(\rho)$. Par définition, les $\overline{\beta^{\mathcal{P}}(F)}$ sont $\kappa_0(\Phi_\kappa(\rho))$-connexes.

Mais, le feuilletage $\Phi_\kappa(\rho)$ étant régulier (proposition 5), les $\overline{\beta^{\mathcal{P}}(F)}$ sont également $\kappa_1(\Phi_\kappa(\rho))$-connexes. Il en découle que

$$\bigcup_{F\in\mathcal{L}} \overline{\beta^{\mathcal{P}}(F)} = \bigcup_{F\in\mathcal{L}} (\overline{\beta^{\mathcal{P}}(F)} \cup W)$$

est l'union de $\kappa_1(\Phi_\kappa(\rho))$-connexes d'intersection non vide.

Ainsi, $\bigcup_{F\in\mathcal{L}} \overline{\beta^{\mathcal{P}}(F)}$ est $\kappa_1(\Phi_\kappa(\rho))$-connexe, autrement dit $\kappa_1(sp(\rho))$-connexe, de sorte que $\mathcal{A}$ est connexe dans $ob(\rho)$. Reste à vérifier que $\beta^{\mathcal{P}} \circ \mathcal{R}^{\downarrow}Z \subset \rho\circ\alpha$, mais c'est là une conséquence immédiate de la construction même de α.

□

Soit maintenant **FR** la sous-catégorie pleine de **FC** constituée des feuilletages connectifs réguliers, et soit **RIO** la sous-catégorie pleine de **RCD** constituée des représentations claires et distinctes dont l'objet est intègre. Reprenons les notations $\mathcal{R}^{\downarrow}$ et Φ_κ employées précédemment, mais pour désigner cette fois les restrictions de ces foncteurs à **FR** et à **RIO**. D'après la proposition 8, on obtient bien de cette manière un foncteur $\mathcal{R}^{\downarrow} : \mathbf{FR} \to \mathbf{RIO}$. Et d'après la proposition 5, on obtient de même un foncteur $\Phi_\kappa : \mathbf{RIO} \to \mathbf{FR}$.

Soit Z un feuilletage régulier, et ρ une représentation claire et distincte d'un objet intègre. À tout morphisme de représentations $(\alpha, \beta) : \mathcal{R}^{\downarrow}Z \to \rho$, on associe, d'après le lemme 9, le morphisme de feuilletages $\beta : Z \to \Phi_\kappa(\rho)$. Réciproquement, à tout morphisme de feuilletages $\beta : Z \to \Phi_\kappa(\rho)$, on associe d'après le lemme 11, un unique morphisme de représentations $(\alpha, \beta) : \mathcal{R}^{\downarrow}Z \to \rho$. On a ainsi construit des applications réciproques, donc bijectives, entre $Hom_{\mathbf{RIO}}(\mathcal{R}^{\downarrow}Z, \rho)$ et $Hom_{\mathbf{FR}}(Z, \Phi_\kappa(\rho))$, et le lecteur pourra vérifier que ces bijections sont naturelles par rapport à Z et ρ. On peut ainsi énoncer :

Théorème 12. *Le foncteur* $\mathcal{R}^{\downarrow} : \mathbf{FR} \to \mathbf{RIO}$ *est adjoint à gauche du foncteur* $\Phi_\kappa : \mathbf{RIO} \to \mathbf{FR}$ *:*

$$\mathcal{R}^{\downarrow} \dashv \Phi_\kappa$$

Remarque 10. Par composition, les divers foncteurs considérés plus haut entre catégories de feuilletages connectifs et catégories de représentations connectives donnent lieu à d'autres foncteurs intéressants. Par exemple, notant $\rho_G^{\downarrow} = \mathcal{R}^{\downarrow}(\Phi_G(\rho))$ la représentation associée à une représentation ρ par l'endofoncteur $\mathcal{R}^{\downarrow} \circ \Phi_G$, on démontre [10] la proposition suivante :

Proposition 13. *Si ρ est une représentation claire et distincte, alors le couple d'applications (α, β) défini par $\alpha(a) = \rho(a) \in ob(\rho_G^{\downarrow})$ et $\beta = Id_{sp(\rho)}$ constitue un isomorphisme entre les représentations ρ et $\rho_G^{\downarrow}$.*

5 Ordre d'un espace connectif

On note Ord la classe des ordinaux, ω_0 ou $\aleph_0$ le plus petit ordinal infini, et $\aleph_1$ le plus petit ordinal non dénombrable, *i.e.* l'ensemble des ordinaux dénombrables. Pour tout ordinal α, nous notons en outre α^- l'ordinal défini par $\alpha^- = \beta$ si β est prédécesseur de α, et $\alpha^- = \alpha$ si α n'a pas de prédécesseur.

Définition 17. *Soit $\alpha \in Ord$ un ordinal. Un ensemble (partiellement) ordonné $(R, \preceq)$ est dit* supérieur ou égal *à α, et l'on note $\alpha \leq R$, s'il existe une application strictement croissante de α dans $(R, \preceq)$.*

Bien entendu, la définition précédente est compatible avec la relation d'ordre entre ordinaux. Soit maintenant $(R, \preceq)$ un ensemble ordonné. La classe des ordinaux α tels que $\alpha \leq R$ est bornée (en fonction du cardinal de R), c'est donc un ensemble, et c'est un ordinal puisque $\alpha \leq R \Rightarrow \beta \leq R$ pour tout $\beta \leq \alpha$.

Définition 18. *On appelle* hauteur *de l'ensemble partiellement ordonné $(R, \preceq)$, et on note $\Gamma(R)$, l'ordinal*

$$\Gamma(R) = \{\alpha \in Ord, \alpha \leq R\}$$

Exemple 7. $\mathbf{R}$ désignant la droite réelle munie de l'ordre usuel, on a [11] $\Gamma(\mathbf{R}) = \aleph_1$.

10. Voir [10], proposition 18.
11. On trouvera une preuve de ce fait dans [10].

Rappelons qu'une partie connexe non vide $K \in \kappa_X$ d'un espace connectif $X = (|X|, \kappa_X)$ est dite *irréductible* si et seulement si elle n'appartient pas à la structure connective engendrée par les autres parties (voir [8], section 2.2). La définition du graphe générique d'un espace connectif, donnée dans le cas fini dans [8] (section 7.1), s'étend immédiatement à tout espace connectif :

Définition 19 (Graphe générique)**.** *Soit $X = (|X|, \kappa_X)$ un espace connectif. On appelle graphe générique de X, et l'on note $(G_X, \subset)$, l'ensemble ordonné par l'inclusion des parties connexes irréductibles de X.*

Définition 20. *Soit X un espace connectif. On appelle* ordre connectif *de X l'ordinal $\Omega(X) = \Gamma(G_X)^{--} = \{\alpha \in Ord, \alpha + 2 \leq G_X\}$.*

Bien entendu, comme on le vérifie facilement, l'ordre connectif $\Omega(X)$ d'un espace connectif fini intègre X coïncide avec l'ordre connectif défini dans [8]. Plusieurs exemples d'ordres connectifs infinis sont donnés dans [10].

À tout entrelacs, qu'il comporte ou non un nombre fini de composantes, se trouve associé un espace connectif (voir l'exemple 3 dans [8] ou l'exemple 4 dans [10]). La notion d'ordre connectif conduit dès lors à la définition d'un nouvel invariant d'entrelacs :

Définition 21. L'ordre connectif d'un entrelacs *est l'ordre connectif de l'espace connectif associé à cet entrelacs.*

Exemple 8. L'ensemble des (classes d'équivalence d') entrelacs finis réguliers dans $\mathbf{R}^3$ étant dénombrable, on construit facilement un entrelacs dans $\mathbf{R}^3$ qui réalise l'union disjointe de tous les entrelacs finis réguliers. L'ordre connectif de l'entrelacs obtenu est ω_0.

La définition suivante est appelée à jouer un rôle important dans l'étude des dynamiques catégoriques connectives, puisqu'elle permet de définir l'ordre connectif d'une telle dynamique (voir [10]) :

Définition 22 (Ordre d'un feuilletage connectif)**.** *On appelle ordre, ou ordre connectif, d'un feuilletage connectif Z l'ordre connectif de son espace induit de feuilles $Z^{\downarrow}$.*

6 Relations avec les espaces difféologiques

On se propose dans cette section de préciser certaines relations fonctorielles entre espaces connectifs et espaces difféologiques, et en particulier de caractériser les espaces connectifs difféologisables. Nous commençons, après quelques rappels terminologiques, par préciser la notion de difféologisabilité d'un espace connectif en définissant un foncteur d'oubli U_{DC} de la catégorie des espaces difféologiques dans celle des espaces connectifs, puis nous donnons des conditions nécessaires de difféologisabilité d'un espace connectif avant de montrer, grâce à certains foncteurs de difféologisation, que ces conditions sont en fait suffisantes. Nous montrons ensuite que l'un de ces foncteurs est adjoint à droite du foncteur d'oubli, avant de conclure avec quelques remarques sur la notion d'application localement connective.

Pour tout ce qui concerne la difféologie, nous renvoyons à l'ouvrage [11] de Patrick Iglesias-Zemmour. Rappelons néanmoins ici quelques notions et notations :

- on note $Param(E)$ l'ensemble des paramétrisations d'un ensemble E ([11], art. 1.3) ;
- une difféologie sur E est une partie $\mathcal{D} \subset Param(E)$ vérifiant certains axiomes ; les éléments de $\mathcal{D}$ s'appellent les plaques (*plots*), une plaque p de l'espace difféologique $(E, \mathcal{D})$ s'identifiant à une application lisse (*smooth map*) définie sur un ouvert U_p d'un espace de la forme $\mathbf{R}^{n_p}$ et à valeur dans E ; en particulier, une plaque définie sur $\mathbf{R}$ s'appelle un chemin (ou un chemin lisse), et l'ensemble des chemins dans $(E, \mathcal{D})$ est noté $Paths(E, \mathcal{D})$;
- pour tout ensemble $\mathcal{L}$ de paramétrisations $p : \mathbf{R}^{n_p} \supset U_p \to E$, autrement dit d'applications p dans E, chacune étant définie sur un ouvert U_p d'un espace de la forme $\mathbf{R}^{n_p}$ avec n_p un entier naturel, on note $< \mathcal{L} >$ la difféologie engendrée par $\mathcal{L}$, c'est-à-dire la difféologie la plus fine sur E contenant $\mathcal{L}$ ([11], art. 1.66) ;
- on dit d'un ensemble de paramétrisations $\mathcal{L}$ de E qu'il couvre E si pour tout $a \in E$, il existe $p \in \mathcal{L}$ telle que $a \in p(U_p) = val(p)$;
- une application $\sigma : \mathbf{R} \to E$ est dite *stationnaire aux bords* s'il existe $\epsilon > 0$ tel que pour tout $t \in]-\infty, \epsilon[$, $\sigma(t) = \sigma(0)$, et pour tout $t \in]1-\epsilon, +\infty[$, $\sigma(t) = \sigma(1)$; on note $stPaths(E, \mathcal{D})$ l'ensemble des

chemins $\sigma \in Paths(E,\mathcal{D})$ qui sont stationnaires aux bords (voir [11], art. 5.4).

– une partie A d'un espace difféologique $(E,\mathcal{D})$ est dite connectée si pour tout couple (a_0,a_1) de points de A, il existe un chemin $\sigma \in Paths(E,\mathcal{D})$ reliant a_0 à a_1 en restant dans A au sens où : $\sigma(0) = a_0$, $\sigma(1) = a_1$ et, pour tout $t \in \mathbf{R}$, $\sigma(t) \in A$ (voir [11], art. 5.9) ; par « smashisation » ([11], art. 5.5.), on peut remplacer $Paths(E,\mathcal{D})$ par $stPaths(E,\mathcal{D})$ dans la définition des parties connectées d'un espace difféologique.

Proposition 14. *L'ensemble $\mathcal{K}_\mathcal{D}$ des* parties connectées *d'un espace difféologique $(E,\mathcal{D})$ constitue une structure connective intègre sur l'ensemble E.*

Preuve. Étant donnée $(K_i)_{i\in I}$ une famille de parties connectées de $(E,\mathcal{D})$, telle que $\bigcap_{i\in I} K_i \neq \emptyset$, deux points quelconques a_1 et a_2 de $L = \bigcup_{i\in I} K_i$ peuvent toujours être reliés par un chemin $\sigma \in Paths(E,\mathcal{D})$: en effet, il existe un élément $a_0 \in \bigcap_{i\in I} K_i$ et, pour chaque $k \in \{1,2\}$, un chemin $\sigma_k \in \mathcal{D}$ reliant a_k à a_0 en restant dans L. La *smashed concatenation*[12] de σ_1 et σ_2 produit alors le chemin lisse σ annoncé. En outre, il est clair que tout singleton est une partie connectée, puisque par définition d'une difféologie toutes les paramétrisations constantes, en particulier celles définies sur $\mathbf{R}$, appartiennent à $\mathcal{D}$.

□

La proposition précédente, puisque par ailleurs toute application lisse entre espaces difféologiques transforme les parties connectées du premier en parties connectées du second ([11], art. 5.9), permet de définir un foncteur d'oubli[13] U_{DC} de la catégorie **Diff** des espaces difféologiques dans celle, **Cnct**, des espaces connectifs intègres, en posant :

– pour tout espace $(E,\mathcal{D}) \in \mathbf{Diff}_0$: $U_{DC}(E,\mathcal{D}) = (E,\mathcal{K}_\mathcal{D})$,

– pour tout morphisme $f \in \overrightarrow{\mathbf{Diff}}$: $U_{DC}(f) = f$.

Dans la suite, nous étendons l'usage de l'expression U_{DC}, permettant que la structure connective $\mathcal{K}_\mathcal{D}$ associée à la difféologie $\mathcal{D}$ soit également

12. Voir [11], art. 5.5.
13. Au sens où il s'agit d'un foncteur fidèle entre catégories concrètes.

notée $U_{DC}(\mathcal{D})$. Ainsi, avec cette convention, on a, pour tout espace difféologique $(E, \mathcal{D})$,

$$U_{DC}(E, \mathcal{D}) = (E, U_{DC}(\mathcal{D})).$$

Définition 23. *Un espace connectif* $(E, \mathcal{K})$ *est dit* difféologisable *s'il existe une structure difféologique* $\mathcal{D}$ *sur* E *telle que* $U_{DC}(\mathcal{D}) = \mathcal{K}$. *On notera* **Cncd** *la sous-catégorie pleine de* **Cnct** *ayant pour objets les espaces connectifs difféologisables.*

Lemme 15 (Engendrement des connexes d'un espace difféologique)**.** *Pour tout espace difféologique* $(E, \mathcal{D})$*, on a*

$$U_{DC}(\mathcal{D}) = [\{\sigma([0, 1]), \sigma \in stPaths(E, \mathcal{D})\}].$$

Preuve. Les chemins lisses étant des plaques, la connexité de l'intervalle réel $[0, 1]$ entraîne celle des $\sigma([0, 1])$, d'où $\mathcal{G} \subset \mathcal{K}_{\mathcal{D}}$, ce qui implique $[\mathcal{G}] \subset \mathcal{K}_{\mathcal{D}}$. Soit maintenant une partie connectée non vide quelconque $K \in \mathcal{K}_{\mathcal{D}}$ et $a_0 \in K$. Par définition de $\mathcal{K}_{\mathcal{D}}$, il existe, pour tout $a \in K$, un chemin σ_a tel que $\sigma_a(0) = a_0$, $\sigma_a(1) = a$ et $\sigma_a(\mathbf{R}) \subset K$, chemin que, par ≪ *smashisation* ≫([11], art. 5.5) on peut prendre stationnaire aux bords : $\sigma_a \in stPaths(E, \mathcal{D})$. On a alors $K = \bigcup_{a \in K} \sigma_a([0, 1])$, mais puisque $\bigcap_{a \in K} \sigma_a([0, 1]) \supset \{a_0\} \neq \emptyset$, cela prouve que

$$K \in [\{\sigma([0, 1]), \sigma \in stPaths(E, \mathcal{D})\}].$$

$\square$

Lemme 16 (Chemins d'une difféologie engendrée)**.** *Soit* $\mathcal{L}$ *un ensemble couvrant de paramétrisations de* E*, et soit* $\sigma : \mathbf{R} \to E$ *une paramétrisation définie sur* $\mathbf{R}$. *On a* $\sigma \in stPaths(E, <\mathcal{L}>)$ *si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites :*

1. σ *est stationnaire au bord,*
2. *il existe un entier* $n \geq 1$ *et une suite finie* $(]a_k, b_k[, p_k, q_k)_{k \in \{1,...,n\}}$*, avec* a_k *et* b_k *des réels vérifiant*

   $(a_1 < 0)$ et $(\forall k \in \{1, ..., n-1\}, a_k < a_{k+1} < b_k < b_{k+1})$ et $(b_n > 1)$,

   et telle que pour tout $k \in \{1, ..., n\}$*, on ait*

– $(p_k : \mathbf{R}^{n_k} \supset U_k \to E) \in \mathcal{L}$,
– $q_k \in C^\infty(]a_k, b_k[, U_k)$,
– $\sigma_{|]a_k,b_k[} = p_k \circ q_k$,
où $n_k = n_{p_k}$ *désigne la dimension de la paramétrisation* p_k, $U_k = U_{p_k}$ *est le domaine de* p_k *et* $\sigma_{|]a_k,b_k[}$ *désigne la restriction de* σ *à* $]a_k, b_k[$.

Preuve. D'après les axiomes qui définissent une difféologie, les conditions données sont clairement suffisantes pour avoir $\sigma \in< \mathcal{L} >$, les $p_k \circ q_k$ étant lisses par composition, et σ étant lisse, puisque localement lisse, sur $[0, 1]$ et constante, donc lisse, sur $] - \infty, \epsilon[$ et sur $]1 - \epsilon, +\infty[$ pour un certain $\epsilon > 0$. Stationnaire aux bord, σ est donc bien dans $stPaths(E, < \mathcal{L} >)$. Réciproquement, étant donné un chemin stationnaire aux bords $\sigma \in stPaths(E, < \mathcal{L} >)$, la caractérisation des plaques d'une difféologie engendrée par une famille couvrante de paramétrisations donnée en [11] (art. 1.68) implique que, pour tout $t \in \mathbf{R}$, il existe un voisinage ouvert $V_t \subset \mathbf{R}$ de t, une application de classe C^∞ $q_t : V_t \to \mathbf{R}$ et une paramétrisation $p_t : \mathbf{R} \to E$ appartenant à $\mathcal{L}$ tels que $\sigma_{|V_t} = p_t \circ q_t$. Par restriction, on peut remplacer les ouverts V_t par des intervalles ouverts $J_t \ni t$. La famille $(J_t)_{t\in[0,1]}$ est alors un recouvrement ouvert du compact $[0, 1]$, on peut donc en extraire un sous-recouvrement fini, qu'après ré-indexation nous notons $(J_m)_{m\in\{1,...,N\}}$. Par récurrence finie, on construit alors de la façon suivante la suite des intervalles $]a_k, b_k[= I_k$ annoncés : parmi les intervalles J_m qui contiennent 0, on prend celui dont la borne supérieure est maximale, cela nous donne I_1, et l'on continue ainsi : ayant choisi les intervalles $I_1 =]a_1, b_1[, ..., I_k =]a_k, b_k[$, si $b_k > 1$, on pose $n = k$ et l'on s'arrête, sinon on considère, parmi les intervalles J_m qui contiennent b_k, celui dont la borne supérieure est maximale, ce qui nous donne I_{k+1}. Cette construction se poursuit tant que $b_k \leq 1$, puisqu'il existe alors un intervalle J_m contenant b_k, mais elle s'achève nécessairement en un nombre fini n d'étapes, d'où l'existence de n tel que $b_n > 1$. On vérifie alors aisément que les réels a_k et b_k ainsi obtenus satisfont les inégalités indiquées, d'où le résultat.

□

Proposition 17. *Pour tout espace difféologique* $(E, \mathcal{D})$*, la structure connective intègre* $U_{DC}(\mathcal{D}) = \mathcal{K}_{\mathcal{D}}$ *admet un système de générateurs*[14] $\mathcal{G} \subset \mathcal{K}_{\mathcal{D}}$ *tel que*

$$\forall G \in \mathcal{G}, card(G) \leq \mathfrak{c},$$

où $\mathfrak{c}$ *désigne la puissance du continu.*

Preuve. Posons $\mathcal{G} = \{\sigma([0,1]), \sigma \in stPaths(E, \mathcal{D})\}$. Le lemme 15 dit que $\mathcal{G}$ est un système de générateurs de $\mathcal{K}_{\mathcal{D}}$, et puisque $card([0,1]) = \mathfrak{c}$, tout élément $G \in \mathcal{G}$ vérifie la condition de cardinalité indiquée.

□

Pour toute paramétrisation $(p : R^{n_p} \supset U_p \to E) \in Param(E)$, nous noterons $\mathcal{KA}_p$ la structure connective sur U_p constituée des parties de U_p connexes par arcs, $\mathcal{T}_p$ la topologie sur U_p induite par la topologie usuelle de R^{n_p}, et $\mathcal{KT}_p = U_T(\mathcal{T}_p)$ la structure connective sur U_p associée à $\mathcal{T}_p$ par le foncteur d'oubli U_T : **Top** $\to$ **Cnct**. On a donc, pour toute paramétrisation p, $\mathcal{KA}_p \subset \mathcal{KT}_p$.

Proposition 18 (Trois procédés de difféologisation des espaces connectifs[15])**.** *Soit* $(E, \mathcal{K})$ *un espace connectif intègre. On note* $\mathcal{LA}_{\mathcal{K}}$ *l'ensemble des paramétrisations de* E *qui transforment tout connexe par arcs en partie connexe de* E*, et* $\mathcal{LT}_{\mathcal{K}}$ *l'ensemble des paramétrisations de* E *qui transforment tout connexe pour la topologie usuelle en partie connexe de* E*, autrement dit :*

$$\mathcal{LA}_{\mathcal{K}} = \{p \in Param(E), p \in \mathbf{Cnct}((U_p, \mathcal{KA}_p), (E, \mathcal{K}))\}$$

et

$$\mathcal{LT}_{\mathcal{K}} = \{p \in Param(E), p \in \mathbf{Cnct}((U_p, \mathcal{KT}_p), (E, \mathcal{K}))\}.$$

Si $\mathcal{K}$ *admet un système* $\mathcal{G}$ *de générateurs qui soient tous de cardinal inférieur ou égal à la puissance du continu, autrement dit s'il existe un ensemble* $\mathcal{G} \subset \mathcal{K}$ *tel que*

$$\begin{cases} \mathcal{K} = [\mathcal{G}], \\ et \\ \forall G \in \mathcal{G}, card(G) \leq \mathfrak{c}, \end{cases}$$

14. Rappelons qu'un système de générateurs $\mathcal{G}$ d'une structure connective $\mathcal{K}$ est une partie $\mathcal{G} \subset \mathcal{K}$ telle que la structure connective engendrée par $\mathcal{G}$ vérifie $[\mathcal{G}]_0 = \mathcal{K}$.
15. Une partie de ce qui est avancé ici nous a été suggéré par Anatole Khélif.

alors

$$U_{DC}(<\mathcal{W}_{\mathcal{G}}>) = U_{DC}(<\mathcal{LT}_{\mathcal{K}}>) = U_{DC}(<\mathcal{LA}_{\mathcal{K}}>) = \mathcal{K},$$

où, $\mathcal{G}$ désignant un système de générateurs ayant la propriété indiquée, on a posé

$$\mathcal{W}_{\mathcal{G}} = \bigcup_{G\in\mathcal{G}} \mathcal{W}_G$$

avec, pour tout $G \in \mathcal{G}$,

$$\mathcal{W}_G = \{p : \mathbf{R} \to E, p(\mathbf{R}) = G \,\mathrm{et}\, \forall a \in G, \overline{p^{-1}(a)} = \mathbf{R}\}.$$

Preuve. De l'inclusion $\mathcal{KA}_p \subset \mathcal{KT}_p$, valable pour toute paramétrisation p de E, on déduit $\mathcal{LT}_{\mathcal{K}} \subset \mathcal{LA}_{\mathcal{K}}$. Supposant à partir de maintenant l'existence d'un système de générateurs de $\mathcal{K}$ ayant les propriétés voulues, et désignant par $\mathcal{G}$ un tel système, on a en outre $\mathcal{W}_{\mathcal{G}} \subset \mathcal{M}_{\mathcal{K}}$: en effet, pour toute paramétrisation $p \in \mathcal{W}_{\mathcal{G}}$, il existe $G \in \mathcal{G} \subset \mathcal{K}$ tel que pour tout connexe [16] I non réduit à un point et inclus dans $U_p = \mathbf{R}$, on ait $p(I) = G$. Par conséquent, le foncteur U_{DC} étant trivialement croissant [17], on a

$$U_{DC}(<\mathcal{W}_{\mathcal{G}}>) \subset U_{DC}(<\mathcal{LT}_{\mathcal{K}}>) \subset U_{DC}(<\mathcal{LA}_{\mathcal{K}}>).$$

Il nous suffit donc, pour établir la proposition 18 de montrer que, sous les hypothèses faites, on a nécessairement $\mathcal{K} \subset U_{DC}(<\mathcal{W}_{\mathcal{G}}>)$ et $U_{DC}(<\mathcal{LA}_{\mathcal{K}}>) \subset \mathcal{K}$. Commençons par établir l'inclusion

$$\mathcal{K} \subset U_{DC}(<\mathcal{W}_{\mathcal{G}}>).$$

Il suffit pour cela de vérifier que l'on a $\mathcal{G} \subset U_{DC}(<\mathcal{W}_{\mathcal{G}}>)$, puisqu'on aura alors $\mathcal{K} = [\mathcal{G}] \subset [U_{DC}(<\mathcal{W}_{\mathcal{G}}>)] = U_{DC}(<\mathcal{W}_{\mathcal{G}}>)$. Soit donc $G \in \mathcal{G}$, avec G non vide, de sorte que $0 < card(G) \leq \mathfrak{c}$. L'ensemble $\mathbf{R}/\mathbf{Q}$, obtenu en quotientant les groupes additifs correspondants, ayant la puissance du continu, on en déduit l'existence d'une surjection $\pi_G : \mathbf{R}/\mathbf{Q} \twoheadrightarrow G$. En composant avec la surjection canonique

16. Ou connexe par arcs, puisque dans $\mathbf{R}$ les deux notions sont équivalentes.
17. Plus il y a de paramétrisations, plus il y a de connexes par arcs.

$s : \mathbf{R} \twoheadrightarrow \mathbf{R}/\mathbf{Q}$, on obtient d'abord une application $p_G = \pi_G \circ s : \mathbf{R} \twoheadrightarrow G$ puis, par extension du codomaine à E, une paramétrisation de E que nous noterons encore $p_G : \mathbf{R} \to E$. Or, $p_G \in \mathcal{W}_\mathcal{G}$, car la densité des ensembles $s^{-1}(c)$ pour tout $c \in \mathbf{R}/\mathbf{Q}$ implique $\overline{p_G^{-1}(g)} = \mathbf{R}$ pour tout $g \in G$. *A fortiori* $p_G \in < \mathcal{W}_\mathcal{G} >$: p_G est une plaque de l'espace difféologique $(E, < \mathcal{W}_\mathcal{G} >)$, et par conséquent ([11], art. 5.9) p_G transforme tout connexe par arcs[18] en partie connectée de $(E, < \mathcal{W}_\mathcal{G} >)$. En particulier, $p_G(\mathbf{R}) = G$ est donc une partie connectée de $(E, < \mathcal{W}_\mathcal{G} >)$, autrement dit : $G \in U_{DC}(< \mathcal{W}_\mathcal{G} >)$. Et puisque ce résultat reste trivialement vérifié dans le cas où G est vide, on a bien $\mathcal{K} \subset U_{DC}(< \mathcal{W}_\mathcal{G} >)$.

Pour établir la deuxième inclusion dont nous avons besoin,

$$U_{DC}(< \mathcal{LA}_\mathcal{K} >) \subset \mathcal{K},$$

remarquons d'abord que, d'après le lemme 15 appliqué à $\mathcal{D} =< \mathcal{LA}_\mathcal{K} >$ on a

$$U_{DC}(< \mathcal{LA}_\mathcal{K} >) = [\{\sigma([0,1]), \sigma \in stPaths(E, < \mathcal{LA}_\mathcal{K} >)\}]. \quad (1)$$

Or, pour tout $\sigma \in stPaths(E, < \mathcal{LA}_\mathcal{K} >)$, on peut écrire d'après le lemme 16 l'ensemble $\sigma([0,1]) \subset E$ sous la forme

$$\sigma([0,1]) = \bigcup_{1 \le k \le n} p_k(q_k(]a_k, b_k[)),$$

avec, pour tout k, q_k de classe C^∞ et $p_k \in \mathcal{LA}_\mathcal{K}$. Par continuité de q_k, et par la définition de $\mathcal{LA}_\mathcal{K}$ qui implique que p_k transforme les connexes par arcs en connexes de E, on a $\sigma(]a_k, b_k[) = p_k(q_k(]a_k, b_k[)) \in \mathcal{K}$. En outre, d'après les propriétés des intervalles $]a_k, b_k[$, on a pour tout $k \in \{1, ..., n-1\}$: $]a_k, b_k[\cap]a_{k+1}, b_{k+1}[\neq \emptyset$, d'où $\sigma(]a_k, b_k[) \cap \sigma(]a_{k+1}, b_{k+1}[) \neq \emptyset$. Ainsi, $\sigma([0,1])$ peut-il s'écrire comme l'union d'une suite finie de connexes $\in \mathcal{K}$ telle que deux connexes successifs de cette suite soit non vide. On en déduit que $\sigma([0,1]) \in \mathcal{K}$, d'où

$$\{\sigma([0,1]), \sigma \in stPaths(E, < \mathcal{LA}_\mathcal{K} >)\} \subset \mathcal{K},$$

18. Les parties connectées des ouverts $U \subset \mathbf{R}^n$ munis de leur structure difféologique canonique sont les connexes par arcs.

de sorte que

$$[\{\sigma([0,1]), \sigma \in stPaths(E, < \mathcal{LA}_{\mathcal{K}} >)\}] \subset \mathcal{K}. \tag{2}$$

Des relations (1) et (2), on déduit $U_{DC}(< \mathcal{LA}_{\mathcal{K}} >) \subset \mathcal{K}$, ce qui achève la démonstration.

□

Des propositions 17 et 18, on déduit immédiatement le théorème suivant :

Théorème 19. *Un espace connectif $(E, \mathcal{K})$ est difféologisable si et seulement s'il est intègre et qu'il admet un système $\mathcal{G} \subset \mathcal{K}$ de générateurs $G \in \mathcal{G}$ qui soient tous de cardinal $card(G) \leq \mathfrak{c}$. En particulier, tout espace connectif intègre $(E, \mathcal{K})$ de support E tel que $card(E) \leq \mathfrak{c}$ est difféologisable.*

Exemple 9. Tout espace discret intègre est difféologisable ; tout espace connectif grossier est difféologisable. Les espaces connectifs usuels [19] $\mathbf{R}^n$ sont difféologisables, mais non pas par la difféologie usuelle sur $\mathbf{R}^n$ puisque pour celle-ci les parties connectées sont uniquement les connexes par arcs de $\mathbf{R}^n$. Aucun espace brunnien dont le support est de cardinal strictement plus grand que $\mathfrak{c}$ n'est difféologisable, un tel espace ne vérifiant pas les conditions nécessaires de la proposition 17.

Pour tout espace connectif difféologisable $(E, \mathcal{K})$ posons

$$\mathcal{G}_{\mathcal{K}} = \{K \in \mathcal{K}, card(K) \leq \mathfrak{c}\} \text{ et } \mathcal{LW}_{\mathcal{K}} = \mathcal{W}_{\mathcal{G}_{\mathcal{K}}},$$

où $\mathcal{W}_{\mathcal{G}_{\mathcal{K}}}$ désigne la famille de paramétrisations de E qui a été associée à un tel ensemble $\mathcal{G} = \mathcal{G}_{\mathcal{K}}$ dans la proposition 18. Autrement dit,

$$\mathcal{LW}_{\mathcal{K}} = \{f : \mathbf{R} \to E, \exists K \in \mathcal{G}_{\mathcal{K}}, f(\mathbf{R}) = K \,\text{et}\, \forall a \in K, \overline{f^{-1}(a)} = \mathbf{R}\}.$$

Posons de plus

$$LW((E, \mathcal{K})) = (E, < \mathcal{LW}_{\mathcal{K}} >),$$

19. C'est-à-dire ceux qui sont associés à la topologie usuelle par le foncteur d'oubli U_T.

$$LT((E,\mathcal{K})) = (E, <\mathcal{LT}_{\mathcal{K}}>),$$
$$LA((E,\mathcal{K})) = (E, <\mathcal{LA}_{\mathcal{K}}>),$$

et, pour tout morphisme connectif $(f : (E,\mathcal{K}) \to (E',\mathcal{K}')) \in \overrightarrow{\mathbf{Cncd}}$,

$$LW(f) = LT(f) = LA(f) = f.$$

Proposition 20. *Les opérateurs LW, LT et LA définis ci-dessus sur les objets et sur les flèches de la catégorie* **Cncd** *et à valeurs dans* **Diff** *sont des foncteurs* **Cncd** $\to$ **Diff**.

Preuve. Pour prouver que LW est un foncteur, il suffit de vérifier que tout morphisme connectif $(f : (E,\mathcal{K}) \to (E',\mathcal{K}')) \in \overrightarrow{\mathbf{Cncd}}$ est une application lisse de $(E, \mathcal{LW}_{\mathcal{K}})$ dans $(E', \mathcal{LW}_{\mathcal{K}'})$. La vérification de ce qu'en outre f est lisse de $(E, \mathcal{LT}_{\mathcal{K}})$ dans $(E', \mathcal{LT}_{\mathcal{K}'})$ et de $(E, \mathcal{LA}_{\mathcal{K}})$ dans $(E', \mathcal{LA}_{\mathcal{K}'})$ prouvera de même la fonctorialité de LT et de LA. Or, pour toute paramétrisation $(p : \mathbf{R} \to E) \in \mathcal{LW}_{\mathcal{K}}$, on a $f \circ p : \mathbf{R} \to E'$ qui vérifie $f \circ p(\mathbf{R}) \in \mathcal{G}_{\mathcal{K}'}$ et, pour tout $b \in f \circ p(\mathbf{R})$, $f^{-1}(b) \neq \emptyset \Rightarrow (f \circ p)^{-1}(b) = \mathbf{R}$, de sorte que $f \circ p \in \mathcal{LW}_{\mathcal{K}'}$. On se trouve alors dans un cas d'application triviale du critère 1.73 de [11] concernant les applications lisses entre espaces difféologiques dont les structures sont engendrées par des familles données de paramétrisations, à savoir le cas où pour toute paramétrisation p de la première famille, $f \circ p$ appartient à la seconde famille. De même, pour toute paramétrisation $(p : \mathbf{R}^n \supset U \to E) \in \mathcal{LT}_{\mathcal{K}}$, on a $(f \circ p) \in \mathcal{LT}_{\mathcal{K}'}$ puisque toute partie connexe (pour la topologie usuelle) de U est transformée par composition en une partie connexe de l'espace connectif $(E', \mathcal{K}')$. Enfin, pour toute paramétrisation $(p : \mathbf{R}^n \supset U \to E) \in \mathcal{LA}_{\mathcal{K}}$, on a $(f \circ p) \in \mathcal{LA}_{\mathcal{K}'}$ puisque toute partie connexe par arcs de U est transformée par composition avec f en une partie connexe de l'espace connectif $(E', \mathcal{K}')$.

$\square$

La fonctorialité des opérateurs considérés ci-dessus conduit à s'interroger sur l'existence d'adjonctions. Commençons par remarquer que U_{DC} n'admet pas d'adjoint à gauche. En effet, on vérifie facilement que le foncteur U_{DC} ne préserve pas les produits [20]. Considérons par exemple

20. Il est connu que tout foncteur qui admet un adjoint à gauche préserve toute les limites inverses, en particulier les produits.

l'espace difféologique $\mathbf{R}$ muni de la difféologie usuelle. Alors $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ est le plan $\mathbf{R}^2$ muni de la difféologie usuelle [21], dont la structure connective est constituée des connexes par arcs, qui sont en particulier connexes au sens de la topologie usuelle du plan, tandis que le carré cartésien de l'espace connectif usuel $\mathbf{R}$ admet pour connexe toute partie de $\mathbf{R}^2$ dont les deux projections sont connexes, ce qui n'implique même pas la connexité au sens de la topologie usuelle du plan [22].

Remarque 11. Nous avons qualifié U_{DC} de « foncteur d'oubli », car il s'agit d'un foncteur fidèle entre catégories concrètes et qu'il ne retient qu'une partie des informations contenues dans une difféologie, à savoir la donnée des parties connectées. Mais il faut remarquer que, n'admettant pas d'adjoint à gauche, ce foncteur d'oubli U_{DC} a un statut bien différent des foncteurs d'oubli que l'on rencontre notamment en algèbre.

Proposition 21. *LA : $\mathbf{Cncd} \to \mathbf{Diff}$ est adjoint à droite de U_{DC} : $\mathbf{Diff} \to \mathbf{Cncd}$:*

$$U_{DC} \dashv LA.$$

Preuve. Étant donnés $(X, \mathcal{D})$ un espace difféologique, (Y, κ_Y) un espace connectif difféologisable, et $f : U_{DC}(X, \mathcal{D}) \to (Y, \kappa_Y)$ une application connective, montrons que f est lisse de $(X, \mathcal{D})$ dans $LA((Y, \kappa_Y))$: pour toute plaque $(p : U_p \to X) \in \mathcal{D}$ et tout connexe par arcs $A \subset U_p$, on a $p(A) \in \mathcal{K}_{\mathcal{D}} = U_{DC}(\mathcal{D})$, et donc $f \circ p(A) \in \kappa_Y$, ce qui prouve que $(f \circ p) \in \mathcal{LA}_{\kappa_Y}$. Ceci établit la lisseté [23] de f. D'un autre coté, donnons-nous à présent une application lisse $g : (X, \mathcal{D}) \to LA(Y, \kappa_Y)$. En appliquant le foncteur U_{DC} à g, on obtient que $g = U_{DC}(g)$ est une application connective de $U_{DC}(X, \mathcal{D})$ dans $U_{DC}(LA(Y, \kappa_Y)) = (Y, \kappa_Y)$. On a ainsi établi que $f \mapsto f$ est une bijection de $\mathbf{Cncd}(U_{DC}(X, \mathcal{D}), (Y, \kappa_Y))$ sur $\mathbf{Diff}((X, \mathcal{D}), LA(Y, \kappa_Y))$, et puisque cette bijection est trivialement na-

21. Puisqu'une plaque de cet espace produit est une paramétrisation dont les deux projections sont elles-mêmes des plaques. Sur le produit des espaces difféologiques, voir [11], art. 1.55.

22. Voir [8].

23. *Je m'aperçois à l'instant qu'à l'adjectif lisse ne correspond aucun substantif [...] Qu'il me soit permis de créer le mot « lisseté » pour donner une idée, aux encombrés de toute nature, de ce que peut être un corps heureux.* Amélie Nothomb, *Le Sabotage amoureux*, 1993.

turelle, cela prouve l'adjonction annoncée.

□

Remarque 12. L'adjonction $U_{DC} \dashv LA$ peut être comparée à celle qui a lieu entre le foncteur d'oubli de la structure topologique d'une part, et d'autre part le foncteur qui consiste à munir tout ensemble de la topologie grossière. Et, de fait, la difféologie définie par LA est la plus grossière de celles qui préservent la structure connective des espaces auxquels on applique ce foncteur.

Les résultats précédents nous donnent l'occasion d'introduire la notion d'application localement connective définie sur un espace topologique et à valeurs dans un espace connectif, et de faire quelques remarques à ce sujet.

Proposition 22. *Soit $(E, \mathcal{K})$ un espace connectif difféologisable, et soit $\mathcal{LA}_{\mathcal{K}} \subset Param(E)$ l'ensemble des paramétrisations connectives de E tel que défini dans la proposition 18. Alors*

$$\mathcal{LA}_{\mathcal{K}} =< \mathcal{LA}_{\mathcal{K}} > .$$

Preuve. Soit $p \in< \mathcal{LA}_{\mathcal{K}} >$, une plaque de l'espace difféologique $(E, < \mathcal{LA}_{\mathcal{K}} >)$. Pour tout connexe par arcs $A \subset U_p$, $p(A)$ est une partie connectée de $(E, < \mathcal{LA}_{\mathcal{K}} >)$, autrement dit $p(A) \in U_{DC}(< \mathcal{LA}_{\mathcal{K}} >)$ d'où, d'après la proposition 18, $p(A) \in \mathcal{K}$. On en déduit que p vérifie la propriété qui caractérise les élements de $\mathcal{LA}_{\mathcal{K}}$, d'où l'égalité annoncée.

□

Remarque 13. Étant donné $(E, \mathcal{K})$ un espace connectif difféologisable, la proposition précédente entraine que l'ensemble $\mathcal{LA}_{\mathcal{K}}$ est une difféologie, de sorte qu'il vérifie en particulier l'axiome de localité ([11], art. 1.5) : pour qu'une paramétrisation $p : \mathbf{R}^n \supset U \to E$ transforme tout connexe par arcs de U en connexe de E, il faut et il suffit qu'il existe un recouvrement ouvert de U tel que la restriction de p à chacun des ouverts de ce recouvrement vérifie encore la même propriété, ce qui peut d'ailleurs se vérifier directement sans difficulté. Par contre, si on remplace « connexe par arcs » par « connexe », on obtient un énoncé qui n'est pas satisfait pour tout espace topologique. Plus précisément, étant donné $(X, \mathcal{T}_X)$ un espace topologique, disons qu'une application $f : X \to E$ est *localement connective* s'il existe un recouvrement ouvert $(X_i)_{i \in I}$ de X tel que, pour tout $i \in I$, $f_{|X_i}$ est un morphisme connectif $X_i \to E$, où X_i est muni de la structure connective induite [24] par $U_T(\mathcal{T}_X)$. On constate alors, comme le montre le contre-exemple suivant, qu'une application localement connective n'est pas nécessairement connective : on prend pour $(X, \mathcal{T}_X)$ le sous-espace topologique du plan $\mathbf{R}^2$ induit par la topologie usuelle sur l'ensemble $X \subset \mathbf{R}^2$ défini par

$$X = (\bigcup_{x \in \mathbf{Q}^*} D_x) \cup \Delta \cup \{(0, 0)\},$$

où l'on a posé $\Delta = \mathbf{R} \times \{1\}$ et, $\mathbf{Q}^*$ désignant l'ensemble des rationnels non nuls, $D_x = \{x\} \times \mathbf{R} \subset$ pour tout $x \in \mathbf{Q}^*$; pour espace connectif $(E, \mathcal{K})$, on prend $E = \{0, 1\}$ muni de la structure connective discrète ; et pour application $f : X \to E$, on prend celle définie par $f((0, 0)) = 0$ et, pour tout $x \neq \{(0, 0)\}$, $f(x) = 1$. Cette application n'est pas connective, car $f(X)$ n'est pas connexe alors que X l'est, comme on peut le vérifier ainsi : s'agissant d'un espace métrique, il suffit [25] de vérifier que X ne peut être recouvert par deux ouverts non vides disjoints. Soient donc A et B deux ouverts disjoints qui recouvrent X, avec par exemple $A \ni (0, 0)$. Alors $A \backslash \{(0, 0)\}$ et B sont deux ouverts disjoints qui recouvrent le connexe par arcs $(\bigcup_{x \in \mathbf{Q}^*} D_x) \cup \Delta$, et l'on a alors $A \setminus \{(0, 0)\} \neq \emptyset \Rightarrow B = \emptyset$. Donc X est connexe. Maintenant, vérifions que f est localement connective. Considérons pour cela $(U_i)_{i \in \{1,2\}}$ le recouvrement ouvert de X défini par $U_1 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2, y > 1/4\} \cap X$ et $U_2 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2, y < 3/4\} \cap X$. L'application f étant constante sur U_1, elle y est nécessairement connective. La connectivité de f sur U_2 résulte du fait que f est constante sur chacune des composantes connexes de U_2, à savoir d'une part les segments $D_x \cap U_2$, et d'autre part le singleton $\{0\}$. Finalement, on a bien montré que f est localement connective mais n'est pas connective. Remarquons que l'espace

24. On vérifie facilement que la structure connective induite sur une partie $Y \subset X$ par la structure connective $U_T(\mathcal{T}_X)$ coïncide avec la structure connective $U_T(\mathcal{T}_Y)$ associée à la topologie $\mathcal{T}_Y$ induite par $\mathcal{T}_X$ sur Y.

25. Voir l'exemple 1 relatif au foncteur V_T.

métrique X de cet exemple n'est pas localement connexe ; nous laissons ici ouvert le problème de savoir si, dans le cas où l'on suppose X localement connexe, en particulier si X est un ouvert d'un espace $\mathbf{R}^n$, toute application localement connective $f : (X, \mathcal{T}) \to (E, \mathcal{K})$ est, ou non, nécessairement connective de $U_T(X, \mathcal{T})$ dans $(E, \mathcal{K})$.

Remerciements. La rédaction de cet article a bénéficié des discussions que j'ai pu avoir avec de nombreuses personnes, et je souhaite en particulier remercier ici Anatole Khélif, Patrick Iglesias-Zemmour, Jacques Riguet, Saab Abou-Jaoudé et Andrée Ehresmann, ainsi que les participants du séminaire CLE (Catégories, Logique, Etc...) dirigé à Paris VII par Anatole Khélif.

Références

[1] Reinhard Börger. *Kategorielle Beschreibungen von Zusammenhangsbegriffen*. PhD thesis, Fernuniversität, Hagen, 1981.

[2] Reinhard Börger. Connectivity spaces and component categories. In *Categorical topology, International Conference on Categorical Topology (1983)*, Berlin, 1984. Heldermann.

[3] Hermann Brunn. Ueber verkettung. *Sitzungsberichte der Bayerische Akad. Wiss., MathPhys. Klasse*, 22 :77–99, 1892.

[4] Hans Debrunner. Links of Brunnian type. *Duke Math. J.*, 28 :17–23, 1961.

[5] Hans Debrunner. Über den Zerfall von Verkettungen. *Mathematische Zeitschrift*, 85 :154–168, 1964.

[6] Stéphane Dugowson. Espaces connectifs et espaces de partage, 2003. Unpublished.

[7] Stéphane Dugowson. Les frontières dialectiques. *Mathematics and Social Sciences*, 177 :87–152, 2007.

[8] Stéphane Dugowson. On connectivity spaces. *Cahiers de Topologie et Géométrie Différentielle Catégoriques*, LI(4) :282–315, 2010. http ://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00446998/fr.

[9] Stéphane Dugowson. Introduction aux dynamiques catégoriques connectives, décembre 2011. http ://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00654494/fr/.

[10] Stéphane Dugowson. *Dynamiques connectives (Une introduction aux notions connectives : espaces, représentations, feuilletages et dynamiques catégoriques).* Éditions Universitaires Européennes, 2012.

[11] Patrick Iglesias-Zemmour. *Diffeology.* Mathematical Surveys and Monographs 185. Providence, RI : American Mathematical Society (AMS). xxiii, 439 p., 2013.

[12] Taizo Kanenobu. Satellite links with Brunnian properties. *Arch. Math.*, 44(4) :369–372, 1985.

[13] Taizo Kanenobu. Hyperbolic links with Brunnian properties. *J. Math. Soc. Japan*, 38 :295–308, 1986.

[14] Georges Matheron and Jean Serra. *Image analysis and Mathematical morphology*, volume 2. Academic Press, London, 1988.

[15] Georges Matheron and Jean Serra. Strong filters and connectivity. In *Image analysis and Mathematical morphology*, volume 2, pages 141–157. Academic Press, London, 1988.

[16] Joseph Muscat and David Buhagiar. Connective space. *Mem. Fac. Sci. Eng. Shimane Univ. (Series B : Mathematical Science)*, (39) :1–13, 2006.

[17] Dale Rolfsen. *Knots and links.* Publish or Perish, Inc., Houston, 1976, sec. ed. 1990.

[18] J. Serra. Connectivity on complete lattices. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 9(3) :231–251, 1998.

[19] J. Serra. Connections for sets and functions. *Fundamenta Informaticae*, 41(1-2) :147–186, 2000.