CAHIERS DE TOPOLOGIE ET GEOMETRIE DIFFERENTIELLE CATEGORIQUES

Vol. LIV-4 (2013)

ESQUISSABILITE PROJECTIVE DES ESPACES DIFFEOLOGIQUES

par Jean-Pierre LAFFINEUR

À René Guitart, pour ton soixante cinquième anniversaire, en toute amitié.

Résumé. Dans cet article, nous présentons une esquisse projective des espaces difféologiques.

Abstract. In this article, we describe a projective sketch of diffeological spaces.

Keywords. Diffeological Spaces, Sketches, Locally Presentable Categories.

Mathematics Subject Classification (2010). Primary MSC 58A40, Secondary MSC 18C30 18C35 18F10 18F20.

1. Introduction

Lors du colloque Souriau's 90, à la mémoire de Jean-Marie Souriau, qui s'est tenu à Aix-en-Provence en juin 2012, Enxin Wu [10] a mentionné que la catégorie des espaces difféologiques était localement présentable. Les catégories localement présentables sont projectivement esquissables, ce qui nous a incité à en construire une esquisse projective. Nous présentons cette esquisse, après avoir rappelé la définition des espaces difféologiques.

2. Espaces Difféologiques

Pour les définitions et constructions relatives à la difféologie nous renvoyons à l'ouvrage de Patrick Iglesias-Zemmour [6].

Définition 2.1. *On appelle **domaine** la donnée d'un ouvert $\mathfrak{U}$ d'un $\mathbb{R}^n$.*

Définition 2.2. *Un **espace difféologique** est un ensemble X muni, pour tout domaine $\mathfrak{U}$, d'un ensemble, noté $X_{\mathfrak{U}}$, d'applications $\phi : \mathfrak{U} \to X$ appelées **plaques** et telles que :*

1. *(**Compatibilité**) si ϕ est une plaque de X de domaine $\mathfrak{U}$ et si $f : \mathfrak{U}' \to \mathfrak{U}$ est une application C^∞, alors $\phi \circ f : \mathfrak{U}' \to X$ est une plaque de X,*
2. *(**Localité**) si les $(\mathfrak{U}_j)_{j \in J}$ forment un recouvrement de $\mathfrak{U}$ d'inclusions $i_j : \mathfrak{U}_j \to \mathfrak{U}$ et si, pour tout j, $\phi \circ i_j : \mathfrak{U}_j \to X$ est une plaque, alors $\phi : \mathfrak{U} \to X$ est une plaque,*
3. *(**Recouvrement**) chaque application constante de $\mathfrak{U}$ dans X est une plaque.*

*L'ensemble des plaques est appelé **difféologie**.*

Définition 2.3. *Soient X et Y deux espaces difféologiques et $f : X \to Y$ une application. On dit que f est **lisse** si, pour toute plaque P de X, alors $f \circ P$ est une plaque de Y.*

La catégorie des espaces difféologiques, notée $\mathbb{D}$iff, est la catégorie dont les objets sont les espaces difféologiques et les flèches sont les applications lisses.

3. Une esquisse projective des difféologies

On désigne par $\mathbb{E}_{diff}$ l'esquisse projective construite comme suit.

Définition 3.1 (Les objets). *On se donne :*

- *un objet X, l'objet de base,*
- *pour tout domaine $\mathfrak{U}$, un objet $X^{\mathfrak{U}}$,*
- *pour tout domaine $\mathfrak{U}$, un objet $X_{\mathfrak{U}}$.*

On a donc un objet de base plus deux familles d'objets.

Définition 3.2 (Les flèches)**.** *Outre les identités on se donne :*

- *pour toute application C^∞ $f : \mathfrak{U} \to \mathfrak{U}'$, une flèche $X^f : X^{\mathfrak{U}'} \to X^{\mathfrak{U}}$,*
- *pour toute application C^∞ $f : \mathfrak{U} \to \mathfrak{U}'$, une flèche $X_f : X_{\mathfrak{U}'} \to X_{\mathfrak{U}}$,*
- *pour toute application C^∞ $f : \mathfrak{U} \to \mathfrak{U}'$, une flèche $d_f : X_{\mathfrak{U}'} \to X^{\mathfrak{U}}$,*
- *pour tout domaine $\mathfrak{U}$, une flèche $h_{\mathfrak{u}} : X_{\mathfrak{U}} \to X^{\mathfrak{U}}$.*

On pose désormais $\mathbb{R}^0 = 1$ et on identifie chaque élément $e \in \mathfrak{U}$ avec la flèche e : $1 \to \mathfrak{U}$.

Définition 3.3 (Composition de flèches)**.** *Pour tout domaine $\mathfrak{U}$, pour tout e $\in \mathfrak{U}$ et pour toute application C^∞ $f : \mathfrak{U} \to \mathfrak{U}'$, on déclare que le diagramme suivant est commutatif :*

$$\begin{tikzcd}
X^{\mathfrak{U}'} \arrow[r, "X^f"] \arrow[d, "X^{f(e)}"'] & X^{\mathfrak{U}} \arrow[d, "X^e"] \\
X^1 \arrow[r, equal] & X^1
\end{tikzcd}$$

Définition 3.4 (Composition de flèches bis)**.** *Pour toute application C^∞ $f : \mathfrak{U} \to \mathfrak{U}'$, on déclare que le diagramme suivant est commutatif :*

$$\begin{tikzcd}
X^{\mathfrak{U}'} \arrow[r, "X^f"] & X^{\mathfrak{U}} \\
X_{\mathfrak{U}'} \arrow[u, "h_{\mathfrak{U}'}"] \arrow[ur, "d_{\mathfrak{f}}"] \arrow[r, "X_f"] & X_{\mathfrak{U}} \arrow[u, "h_{\mathfrak{U}}"']
\end{tikzcd}$$

de sorte que pour tout domaine $\mathfrak{U}$ on a $h_{\mathfrak{U}} = d_{Id_{\mathfrak{U}}}$.

Définition 3.5 (Première série de cônes projectifs distingués)**.** *Pour tout domaine $X^{\mathfrak{U}}$ on distingue le cône projectif de sommet $X^{\mathfrak{U}}$:*

$$\{X^e\}_{e\in\mathfrak{U}} : X^{\mathfrak{U}} \xrightarrow{X^e} \{X\}_{e\in\mathfrak{U}}$$

Ainsi, pour tout modèle M de $\mathbb{E}_{diff}$ dans les ensembles :

$$\mathbb{E}_{diff} \xrightarrow{\quad M \quad} \mathbb{E}_{ns}$$

on aura $M(X^{\mathfrak{U}}) = M(\prod_{e\in\mathfrak{U}} X) = \prod_{e\in\mathfrak{U}} M(X)$ en bijection avec $M(X)^{\mathfrak{U}}$ l'ensemble de toutes les applications $f : \mathfrak{U} \to M(X)$.
Désormais on peut poser $X^1 = X$.

Définition 3.6 (Deuxième série de cônes projectifs distingués)**.** *Pour chaque $\mathfrak{U}$, on fait de $h_{\mathfrak{u}}$ un monomorphisme potentiel en distinguant le cône projectif suivant :*

$$\begin{tikzcd}
 & X_{\mathfrak{U}} \arrow[dr, tail, "h_{\mathfrak{u}}"] & \\
X_{\mathfrak{U}} \arrow[ur, equal] \arrow[dr, equal] & & X^{\mathfrak{U}} \\
 & X_{\mathfrak{U}} \arrow[ur, tail, "h_{\mathfrak{u}}"'] &
\end{tikzcd}$$

Ainsi, pour tout modèle M de $\mathbb{E}_{diff}$ dans les ensembles, $M(h_{\mathfrak{u}})$ sera injective. Elle identifie $M(X_{\mathfrak{U}})$ avec un sous-ensemble de $M(X)^{\mathfrak{U}}$ et en fait un ensemble d'applications.

Définition 3.7 (Troisième série de cônes projectifs distingués)**.** *Pour tout recouvrement d'un domaine $\mathfrak{U}$ par des domaines $\mathfrak{U}_i$, on distingue le cône projectif suivant :*

$$\begin{tikzcd}
 & & X_{\mathfrak{U}} \arrow[dddll, "X_i"'] \arrow[dd, "X_j"] \arrow[drr, "h_{\mathfrak{u}}"] \arrow[dddr, bend left, "d_i"] \arrow[ddrrr, bend left, "d_j"] & & & \\
 & & & & X^{\mathfrak{U}} \arrow[dr, "X^j"] \arrow[ddl, "X^i"'] & \\
 & & X_{\mathfrak{U}_j} \arrow[rrr, tail, "h_{\mathfrak{u}_j}"] & & & X^{\mathfrak{U}_j} \\
X_{\mathfrak{U}_i} \arrow[rrr, tail, "h_{\mathfrak{u}_i}"] & & & X^{\mathfrak{U}_i} & &
\end{tikzcd}$$

Définition 3.8 (Une dernière équation)**.** *À tout cela il nous faut rajouter l'équation $h_1 = Id_X$, pour identifier X^1 avec X_1 et ainsi ajouter les flèches constantes :*

$$X_1 \xrightarrow[h_1 = Id_X]{} X^1 = X$$

Théorème 3.9. *La catégorie des modèles de l'esquisse $\mathbb{E}_{diff}$ ainsi construite est équivalente à $\mathbb{D}iff$ la catégorie des espaces difféologiques et des applications lisses.*

Preuve. En effet, par construction :

- les plaques sont des applications, ce que nous avons forcé en définissant $X^{\mathfrak{U}}$ comme produit, par la première série de cônes, et en y injectant $X_{\mathfrak{U}}$ par la deuxième série de cônes,
- la validité de l'axiome de compatibilité vient de la fonctorialité et de la prise en compte dans l'esquisse de toutes les applications C^∞ entre domaines de $\mathbb{R}^n$,
- l'axiome de localité vient de la troisième série de cônes,
- l'axiome de recouvrement vient de l'identité X_1=X^1 que nous avons ajoutée à la fin de la construction,
- les applications lisses sont les transformations naturelles entre espaces difféologiques.

□

Pour les questions relatives aux esquisses et aux catégories localement présentables, le lecteur pourra consulter [4] réédité dans [5], [9], [1], [2] , [7] et [8].

Références

[1] J. Adamek and J. Rosicky. *Locally presentable and accessible categories*. Cambridge University Press, 1994.

[2] M. Barr and C. Wells. *Toposes, Triples and Theories*, volume 278 of *Grundlehren*. Springer, 1985.

[3] M. Barr and C. Wells. Toposes, triples and theories. *Reprints in Theory and App. of Categories*, 1:1–289, 2005.

[4] C. Ehresmann. Esquisses et types de structures algébriques. *Bull. Instit. Polit. Iasi*, XIV:1–14, 1968.

[5] C. Ehresmann. *Oeuvres complètes et commentées*. (Ed. Andrée C. Ehresmann), Part IV-1, Amiens, 1981.

[6] P. Iglesias-Zemmour. *Diffeology*, volume 185 of *Math. Survey and Monograph*. American Mathematical Society, 2005-2012.

[7] C. Lair. Catégories modelables et catégories esquissables. *Diagramme*, 6(5):1–20, 1981.

[8] M. Makkai and R. Paré. *Accessible categories*, volume 104 of *Contemp. Math.* American Mathematical Society, 1989.

[9] F. Ulmer. Locally presentable and locally generated categories. In *Reports of Midwest category seminar V*, volume 191 of *Lecture Notes in Math.*, pages 230–247. Springer, 1971.

[10] E. Wu. *A Homotopy Theory for Diffeological Spaces*. PhD thesis, Toronto, 2012.

Jean-Pierre Laffineur
Institut de Mathématiques de Jussieu
Groupe de Logique Catégorique
Université Paris Diderot
Batiment Sophie Germain
jplaf@algconseil.com