CAHIERS DE TOPOLOGIE ET GEOMETRIE DIFFERENTIELLE CATEGORIQUES
VOLUME LX-3 (2019)

COMPATIBILITÉ ENTRE DEUX CONCEPTIONS D'ALGÈBRE SUR UNE OPÉRADE

Jacques PENON

Résumé. Opérades de May et opérade de Burroni ont chacune leurs algèbres. Nous donnons ici un contexte général qui va nous permettre de montrer, facilement, l'équivalence entre ces deux conceptions d'algèbres.
Abstract. May's operads and Burroni's operads have each one their algebras. Here, we give a general context that enable to prove, easily, the equivalence between two algebra's kinds.
Keywords. Operad. Monoidal category. Monoid. Cartesian monad. Enriched category.
Mathematics Subject Classification (2010). 18D50.

Introduction

Opérade de May (voir [4]) et opérade de Burroni (un cas particulier des $\mathbb{T}$-catégories) (voir [1]), possèdent chacune des algèbres a priori de conception différente et bien qu'une opérade de May puisse être vu comme un cas particulier de celle de Burroni, ses algèbres se généralisent mal dans le cadre de celle de Burroni. Qui plus est, lorsque c'est le cas (comme par exemple dans un topos muni d'une monade cartésienne) l'équivalence entre les deux types d'algèbres n'est pas immédiate à vérifier (voir [3]).
Dans cet article, après avoir rappelé brièvement les définitions des deux types d'opérades et de leurs algèbres (voir la section 1), nous montrons que derrière cette problématique se cache une structure relativement nouvelle (voir [5]) naturellement présente dans la catégorie de base (voir la section 2)

qui permet d'éclairer la question en la généralisant mais encore de trivialiser bon nombre de démonstrations (voir les sections 3 et 4).

Remerciements

Avant de terminer, je voudrai remercier :
- François Metayer, qui m'a permis d'exposer pour la première fois ce travail en novembre 2016 à l'université Paris 7,
- Isar Stubbe, pour m'avoir invité à en parler à l'université du Littoral en octobre 2017,
Je voudrai aussi remercier Eduardo Dubuc qui m'a signalé le travail de Xavier Rochard où figure déjà le concept de catégorie $\mathbb{V}$-tensorisée sous une autre appellation.

1. Rappel des deux conceptions

• En 1972 P.May définit le concept d'opérade dans [4]. Rappelons en ici la définition.

Définition 1.1. : Une *opérade* (de May) $\underline{\Omega}$ est la donnée :
- d'une collection (Ω, π) (c.a.d. $\Omega \in |\underline{\mathbb{E}ns}|$ et $\pi : \Omega \to \mathbb{N}$ une application),
- un élément particulier $e \in \Omega$,
- une application $m : \Omega^{(2)} \to \Omega$ où $\Omega^{(2)}$ est défini par :
$\Omega^{(2)} = \{(s, (s_o, ..., s_{n-1})) \in \Omega \times Mo(\Omega)/\pi(s) = n\}$ ($Mo(\Omega)$ désignant l'ensemble des suites finies (ou listes) d'éléments de Ω).
Toutes ces données devant satisfaire les axiomes suivants :
(Pos) $\pi(e) = 1$ et $\forall(s, (s_o, ..., s_{n-1})) \in \Omega^{(2)}$, $\pi.m(s, (s_o, ..., s_{n-1})) = \sum_{j\in[n]} \pi(s_j)$ (où $[n] = \{0, ..., n-1\}$),
(Ug) $m(e, (s)) = s$,
(Ud) $m(s, (e, ..., e)) = s$, où $(e, ..., e)$ est une liste de longueur $\pi(s)$,
(Ass) $\forall s \in \Omega, \forall(s_o, ..., s_{n-1}) \in \Omega^n, \forall(\bar{s}_o, ..., \bar{s}_{n-1}) \in Mo(\Omega)^n$ tels que $n = \pi(s)$,
$\forall j \in [n]$, $\pi(s_j) = \mathrm{L}(\bar{s_j})$ (où ici $\mathrm{L}(-)$ désigne la fonction longueur d'une liste), alors :

$$m(s, (m(s_0, \bar{s}_0), ..., m(s_{n-1}, \bar{s}_{n-1})) = m(m(s, (s_o, ..., s_{n-1})), \bar{s}_0...\bar{s}_{n-1}).$$

(Ici $\bar{s}_0 ... \bar{s}_{n-1}$ désigne la concaténation des listes $\bar{s}_0, ..., \bar{s}_{n-1}$).

Exemple 1.2. : A chaque ensemble E on associe une opérade $\underline{\Omega}_E$ que P. May appelle *l'opérade des endomorphismes de* E. Elle est donnée par :
- L'ensemble $\Omega_E = \{(n, f)/n \in \mathbb{N}$ et $f : E^n \to E$ une application$\}$ (Dans la suite de la section les éléments de Ω_E seront souvent notés "$f : E^n \to E$" ou, abusivement, f au lieu de (n, f)),
- $\pi : \Omega_E \to \mathbb{N}$ est l'application $(n, f) \mapsto n$,
- $e = (1, Id_E)$, où on identifie E^1 et E,
- Pour tout $(f, (f_0, ..., f_{n-1})) \in \Omega_E^{(2)}$, c.a.d. $f : E^n \to E$ et $\forall j \in [n], f_j : E^{m_j} \to E$, alors :

$$m(f, (f_0, ..., f_{n-1})) =$$

$$(E^{m_0+...+m_{n-1}} \simeq E^{m_0} \times ... \times E^{m_{n-1}} \xrightarrow{f_0\times...\times f_{n-1}} E^n \xrightarrow{f} E).$$

Définition 1.3. : $\underline{\Omega}$ et $\underline{\Omega}'$ étant des opérades, un *morphisme* $\phi : \underline{\Omega} \to \underline{\Omega}'$ est une application $\Omega \to \Omega'$ telle que :
(MP) $\forall s \in \Omega,\ \pi'.\phi(s) = \pi(s)$,
(MU) $\phi(e) = e'$,
(MC) $\forall (s, (s_0, ..., s_{n-1})) \in \Omega^{(2)}, \phi.m(s, (s_0, ..., s_{n-1})) =$
$m'(\phi(s), (\phi(s_0), ..., \phi(s_{n-1})))$

• On en vient maintenant à la première conception d'algèbre sur une opérade.

Définition 1.4. : $\underline{\Omega}$ étant une opérade, une *algèbre* (au sens de P.May) sur $\underline{\Omega}$ est la donnée successivement :
- d'un ensemble A,
- d'un morphisme d'opérade $a : \underline{\Omega} \to \underline{\Omega}_A$.

Remarque 1.5. : Cette définition est assez intuitive car on associe à chaque "opération formelle" $s \in \Omega$ une "opération effective" $a(s) : A^n \to A$, (où $n = \pi(s)$).

Définition 1.6. : (A, a) et (A', a') étant deux algèbres sur une opérade $\underline{\Omega}$, un *morphisme* $(A, a) \to (A', a')$ est une application $f : A \to A'$ telle que, pour tout $s \in \Omega$, le carré suivant commute (où $n = \pi(s)$) :

$$\begin{tikzcd} A^n \arrow[r, "f^n"] \arrow[d, "a(s)"'] & A'^n \arrow[d, "a'(s)"] \\ A \arrow[r, "f"'] & A' \end{tikzcd}$$

• A peu près à la même époque (en 1971), A.Burroni définit le concept de $\mathbb{T}$-catégorie (voir [1]) qui, il ne le savait pas encore, généralise celui d'opérade.

Remarque 1.7. : Dans la définition qui va suivre, on se focalise uniquement sur les $\mathbb{T}$-catégories dont l'objet des objets est égal à 1 (l'objet final de la catégorie de base). Ce sont elles que nous baptiserons (en accord avec l'usage actuel (voir [3])) opérade sur $\mathbb{T}$.

• On se donne une catégorie $\underline{E}$ à limites à gauche finies et $\mathbb{M} = (M, \eta, \mu)$ une monade cartésienne sur $\underline{E}$ (c.a.d. M commute aux produits fibrés et les deux transformations naturelles η et μ sont cartésiennes ce qui signifie qu'elles envoient une flèche quelconque sur un produit fibré (voir [2])) . Dans $\underline{E}$ on choisit un objet final 1 et des produits fibrés. On munit la catégorie $\underline{E}/M(1)$ d'une structure monoïdale pour laquelle :
- l'unité est $I = (1, \eta_1 : 1 \to M(1))$,
- le produit tensoriel est $(C, \pi) \otimes (C', \pi') = (\hat{C}, \hat{\pi})$ où $\hat{C}$ est l'objet de $\underline{E}$ obtenu par le produit fibré suivant:

$$\begin{tikzcd} \hat{C} \arrow[r, "pr_1"] \arrow[d, "pr_0"'] & M(C') \arrow[d, "M(!)"] \\ C \arrow[r, "\pi"'] & M(1) \end{tikzcd}$$

et $\hat{\pi} = (\hat{C} \xrightarrow{pr_1} M(C') \xrightarrow{M(\pi')} M^2(1) \xrightarrow{\mu_1} M(1))$.
Grâce à la cartésianité de $\mathbb{M}$, les isomorphismes naturels $(C, \pi) \simeq (C, \pi) \otimes I$ et $(C, \pi) \otimes ((C', \pi') \otimes (C'', \pi'')) \simeq ((C, \pi) \otimes (C, \pi')) \otimes (C'', \pi'')$ se construisent facilement.
On note $\mathcal{C}oll(\mathbb{M})$ la catégorie monoïdale obtenue. Ces objets sont maintenant appelés des collections sur $\mathbb{M}$.

Définition 1.8. : On appelle *opérade* sur $\mathbb{M}$(selon A.Burroni) un monoïde dans la catégorie monoïdale $\mathcal{C}oll(\mathbb{M})$.

Remarque 1.9. : Cette définition généralise celle de P.May car, si on prend $\mathbb{M} = \mathbb{M}o = (Mo, \eta, \mu)$ la monade des monoïdes où $\underline{E} = \underline{\mathbb{E}ns}$, alors $\underline{\mathbb{E}ns}/Mo(1)$ s'identifie à la catégorie des collections de May. (Ω, π, e, m) étant maintenant une opérade de May, on lui fait correspondre le monoïde dans $\mathcal{C}oll(\mathbb{M}o)$ dont l'unité $I \to (\Omega, \pi)$ est l'application constante sur e et sa multiplication $(\Omega, \pi) \otimes (\Omega, \pi) \to (\Omega, \pi)$, en tant qu'application, s'identifie à $m : \Omega^{(2)} \to \Omega$.

• Le grand intérêt de telles opérades généralisées est qu'on leur associe canoniquement une monade sur $\underline{E}$. Lorsque $\underline{\Omega} = ((\Omega, \pi), e, m)$ est une opérade sur $\mathbb{M}$, la monade $\underline{\tilde{\Omega}} = (\tilde{\Omega}, \tilde{\eta}, \tilde{\mu})$ obtenue a son endofoncteur qui, sur un objet X, est donné par le produit fibré :

$$\begin{tikzcd} \tilde{\Omega}(X) \arrow[r, "\pi'_X"] \arrow[d, "\tilde{\pi}_X"'] & \Omega \arrow[d, "\pi"] \\ M(X) \arrow[r, "M(!)"'] & M(1) \end{tikzcd}$$

$\tilde{\eta}_X$ et $\tilde{\mu}_X$ s'obtiennent respectivement en utilisant les flèches e et m (ce calcul sera repris et généralisé à la section 3).
Dans cette manière de voir les opérades, une *algèbre* sur l'opérade $\underline{\Omega}$ est alors tout simplement une algèbre d'Eilenberg-Moore sur la monade $\underline{\tilde{\Omega}}$.
Dans le cas où $\mathbb{M} = \mathbb{M}o$ (pour $\underline{E} = \underline{\mathbb{E}ns}$) les deux conceptions d'algèbre sur une opérade sont équivalentes (c.a.d. qu'on a une équivalence entre la catégorie des algèbres de May sur $\underline{\Omega}$ et la catégorie des algèbres d'Eilenberg-Moore sur la monade $\underline{\tilde{\Omega}}$).
Dans [3] T.Leinster généralise cette équivalence, dans le cas où $\underline{E}$ est un topos et $\mathbb{M}$ est une monade cartésienne quelconque (Il faut pour cela construire, dans ce cadre, une opérade des endomorphismes associée à un objet quelconque X de $\underline{E}$).

Remarque 1.10. : 1) Nous reviendrons sur ces différentes généralisations dans les sections suivantes.
2) En essayant de reprendre la preuve du résultat de T.Leinster et ayant

buté pendant un moment sur la méthode à suivre, nous nous sommes rendu compte qu'il manquait un ingrédient décisif qui, contre toute attente, allait trivialiser la situation. Nous allons voir, dans le contexte qui va suivre, comment nous abordons la question.

2. Les catégories $\mathbb{V}$-tensorisées

Donnons nous au départ une catégorie monoïdale quelconque
$\mathbb{V} = (\underline{V}, \otimes, I, u_g, u_d, ass)$.

Définition 2.1. On appelle *catégorie* $\mathbb{V}$*-tensorisée* (à gauche) (encore appelée $\mathbb{V}$-module dans [5]) la donnée :
- d'une catégorie $\underline{E}$,
- d'un foncteur $\wedge : \underline{V} \times \underline{E} \to \underline{E}$ (appelé produit tensoriel extérieur),
- d'une première famille, dans $\underline{E}$, d'isomorphismes

$$s_X : I \wedge X \to X$$

qui est naturelle en $X \in |\underline{E}|$(dans la suite on omettra l'indice X de s_X),
- d'une seconde famille, dans $\underline{E}$, d'isomorphismes

$$am_{(A,B,X)} : (A \otimes B) \wedge X \to A \wedge (B \wedge X)$$

qui est naturelle en $(A, B, X) \in |\mathbb{V}| \times |\mathbb{V}| \times |\underline{E}|$ (de même, dorénavant, on omettra A, B, X dans $am_{A,B,X}$), vérifiant les deux axiomes de cohérence suivants, où $A, B, C \in |\mathbb{V}|$ et $X \in |\underline{E}|$:
(UD)

$$\begin{tikzcd}
(A \otimes I) \wedge X \arrow[rr, "am"] \arrow[dr, "u_d \wedge Id"'] & & A \wedge (I \wedge X) \arrow[dl, "Id \wedge s"] \\
& A \wedge X &
\end{tikzcd}$$

(AM)

$$\begin{tikzcd}
((A \otimes B) \otimes C) \wedge X \arrow[rr, "ass \wedge Id"] \arrow[d, "am"'] & & (A \otimes (B \otimes C)) \wedge X \arrow[d, "am"] \\
(A \otimes B) \wedge (C \wedge X) \arrow[dr, "am"'] & & A \wedge ((B \otimes C)) \wedge X) \arrow[dl, "Id \wedge am"] \\
& A \wedge (B \wedge (C \wedge X)) &
\end{tikzcd}$$

Remarque 2.2. (voir [5]): Comme dans le cas des catégories monoïdales, des deux axiomes (UD) et (AM) on en déduit la commutativité (UG) suivante:

$$\begin{tikzcd}
(I \otimes A) \wedge X \arrow[rr, "am"] \arrow[dr, "u_g \wedge Id"'] & & I \wedge (A \wedge X) \arrow[dl, "s"] \\
& A \wedge X &
\end{tikzcd}$$

Exemples 2.3. : 1) Une catégorie monoïdale $\mathbb{V}$ est elle-même $\mathbb{V}$-tensorisée en prenant $\wedge = \otimes,\ s = u_g,\ am = ass.$
2) $\underline{C}$ étant une catégorie, soit $\mathbb{V}$ la catégorie monoïdale stricte $[\underline{C}, \underline{C}]$ des endofoncteurs de $\underline{C}$(où $\otimes$ est la composisition des foncteurs (pour les objets) et la composition horizontale des transformations naturelles (pour les flèches)). $\underline{C}$ devient alors une catégorie $\mathbb{V}$-tensorisée "stricte",où $\wedge$ est le foncteur $[\underline{C}, \underline{C}] \times \underline{C} \to \underline{C},\ (F, X) \mapsto F(X),\ s = Id,\ am = Id.$
3) Soit $\underline{E}$ une catégorie à limites à gauche finies et $\mathbb{M} = (M, \eta, \mu)$ une monade cartésienne sur $\underline{E}$. On considère la catégorie monoïdale $\mathbb{V} = \mathcal{C}oll(\mathbb{M})$ des collections sur $\mathbb{M}$ (voir la section 1). On construit ensuite un foncteur $\wedge : \underline{V} \times \underline{E} \to \underline{E}$ défini sur les objets par $(C, \pi) \wedge X = P$ où P est donné par le produit fibré suivant :

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[r, "pr_1"] \arrow[d, "pr_0"'] & M(X) \arrow[d, "M(!)"] \\
C \arrow[r, "\pi"'] & M(1)
\end{tikzcd}$$

La construction de $s_X : I \wedge X \to X$ provient de la cartésianité du carré suivant :

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\eta_X"] \arrow[d, "!"'] & M(X) \arrow[d, "M(!)"] \\
1 \arrow[r, "\eta_1"'] & M(1)
\end{tikzcd}$$

et celle de $am : (\bar{A} \otimes \bar{B}) \wedge X \to \bar{A} \wedge (\bar{B} \wedge X)$ (où $\bar{A} = (A, \pi),\ \bar{B} = (B, \pi) \in \mathcal{C}oll(\mathbb{M})$ et $X \in |\underline{E}|$), de la cartésianité du composé des carrés cartésiens suivants :

$$\begin{tikzcd}
\bar{A} \wedge (\bar{B} \wedge X) \arrow[r, "pr_1"] \arrow[d, "Id \wedge pr_0"'] & M(\bar{B} \wedge X) \arrow[r, "M(pr_1)"] \arrow[d, "M(pr_0)"'] & M^2(X) \arrow[r, "\mu_X"] \arrow[d, "M^2(!)"'] & M(X) \arrow[d, "M(!)"] \\
\bar{A} \wedge B \arrow[r, "pr_1"'] & M(B) \arrow[r, "M(\pi)"'] & M^2(1) \arrow[r, "\mu_1"'] & M(1)
\end{tikzcd}$$

Définition 2.4. : Soit $\mathbb{E} = (\underline{E}, \wedge, s, am)$ une catégorie $\mathbb{V}$-tensorisée. On dit qu'elle est *enrichissable* si, pour tout $X \in |\underline{E}|$, le foncteur $(-) \wedge X : \underline{V} \to \underline{E}$ admet un adjoint à droite. Dans ce cas, on note $(-)^X : \underline{E} \to \underline{V}$ le choix d'un adjoint à droite et $Ev^X : (-)^X \wedge X \to (-)$, où simplement Ev, la co-unité de l'adjonction.

Proposition 2.5. : Si $\mathbb{E}$ est enrichissable il existe une structure de catégorie $\mathbb{V}$-enrichie canonique sur $\underline{E}$ (notée $\mathcal{E}$).

Preuve : - Tout d'abord on pose $|\mathcal{E}| = |\underline{E}|$.
- Pour $X, Y \in |\underline{E}|$, on pose $\mathcal{E}(X,Y) = (-)^X(Y)$.
- Pour $X \in |\underline{E}|$, on considère $id_X : I \to \mathcal{E}(X,X)$ l'unique flèche de $\underline{V}$ telle que le triangle suivant commute :

$$\begin{tikzcd}
I \wedge X \arrow[rr, "id_X \wedge Id"] \arrow[dr, "s"'] & & \mathcal{E}(X,X) \wedge X \arrow[dl, "Ev"] \\
& X &
\end{tikzcd}$$

- Pour $X, Y, Z \in |\underline{E}|$, la flèche $c_{X,Y,Z} : \mathcal{E}(Y,Z) \otimes \mathcal{E}(X,Y) \to \mathcal{E}(X,Z)$ (la composition) est l'unique flèche de $\underline{V}$ qui fait commuter le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
(\mathcal{E}(Y,Z) \otimes \mathcal{E}(X,Y)) \wedge X \arrow[rr, "c_{X,Y,Z} \wedge Id"] \arrow[d, "am"'] & & \mathcal{E}(X,Z) \wedge X \arrow[dd, "Ev"] \\
\mathcal{E}(Y,Z) \wedge (\mathcal{E}(X,Y)) \wedge X) \arrow[dr, "Id \wedge Ev"'] & & \\
& \mathcal{E}(Y,Z) \wedge Y \arrow[r, "Ev"] & Z
\end{tikzcd}$$

• Reprenons l'exemple 3 dans 2.3 où $\mathbb{V} = \mathcal{C}oll(\mathbb{M})$.

Proposition 2.6. : Si $\underline{V} = \underline{E}/M(1)$ est cartésienne fermée alors, en tant que catégorie $\mathbb{V}$-tensorisée, $\mathbb{E} = (\underline{E}, \wedge, s, am)$ est enrichissable.

Preuve : Pour chaque $X \in |\underline{E}|$, le foncteur $(-) \wedge X : \underline{V} \to \underline{E}$ est le composé suivant :

$$\underline{E}/M(1) \xrightarrow{(-)\times X_*} \underline{E}/M(1) \xrightarrow{U} \underline{E}$$

où U est le foncteur d'oubli canonique, $(-) \times (-)$ est le produit cartésien dans $\underline{V}$, et $X_* = (M(X), M(!)) \in |\underline{V}|$. Or $(-) \times X_*$ et U admettent des adjoints à droite; d'où la conclusion voulue.

Remarque 2.7. : 1) En particulier lorsque $\underline{E}$ est un topos, $\mathbb{E}$ est enrichissable, en tant que catégorie $\mathbb{V}$-tensorisée, où $\mathbb{V} = \mathcal{C}oll(\mathbb{M})$.
2) Si $\mathcal{E}$ désigne la catégorie enrichie dans $\mathbb{V}$ obtenue, on voit que pour chaque $X \in |\underline{E}|$, $\mathcal{E}(X, X)$ a une structure de monoïde dans $\mathbb{V}$. C'est donc une opérade sur $\mathbb{M}$ qui, dans le cas ensembliste (c.a.d. $\underline{E} = \underline{\mathbb{E}ns}$ et $\mathbb{M} = \mathbb{M}o$) n'est autre que l'opérade des endomorphismes de X (voir sa définition en 1.2).

3. Catégorie tensorisée et monade

• Comme à la section précédente, donnons nous une catégorie monoïdale $\mathbb{V} = (\underline{V}, \otimes, ...)$ mais aussi une catégorie $\mathbb{V}$-tensorisée $\mathbb{E} = (\underline{E}, \wedge, s, am)$. Considérons maintenant un monoïde $\mathcal{M} = (M, e, m)$ dans $\mathbb{V}$. On lui associe canoniquement une monade, notée $\mathcal{M}^\wedge$, de la façon suivante :
- L'endofoncteur de $\mathcal{M}^\wedge$ est donné par $M \wedge (-)$.
- La transformation naturelle $\eta : Id \to M \wedge (-)$ est donnée, pour chaque $X \in |\underline{E}|$, par :

$$\eta_X = (X \overset{s^{-1}}{\longrightarrow} I \wedge X \overset{e \wedge Id}{\longrightarrow} M \wedge X)$$

- La transformation naturelle $\mu : M \wedge (M \wedge (-)) \to M \wedge (-)$ est donnée, pour chaque $X \in |\underline{E}|$, par :

$$\mu_X = (M \wedge (M \wedge X) \overset{am^{-1}}{\longrightarrow} (M \otimes M) \wedge X \overset{m \wedge Id}{\longrightarrow} M \wedge X)$$

Remarques 3.1. : 1) Une algèbre sur la monade $\mathcal{M}^\wedge$ est un couple (X, a) où $X \in |\underline{E}|$ et $a : M \wedge X \to X$ est une flèche de $\underline{E}$ faisant commuter les diagrammes suivants :

$$\begin{tikzcd}
I \wedge X \arrow[rr, "a \wedge Id"] \arrow[dr, "s"'] & & M \wedge X \arrow[dl, "a"] \\
& X &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
(M \otimes M) \wedge X \arrow[rr, "am"] \arrow[d, "m \wedge Id"'] & & M \wedge (M \wedge X) \arrow[d, "Id \wedge a"] \\
M \wedge X \arrow[dr, "a"'] & & M \wedge X \arrow[dl, "a"] \\
& X &
\end{tikzcd}$$

2) Si on reprend l'exemple 3 de 2.3, on retrouve la monade associée à une opérade signalée à la section 1 (on a $\underline{\Omega}^\wedge \simeq \tilde{\underline{\Omega}}$).

Si maintenant $h : \mathcal{M} \to \mathcal{M}'$ est un morphisme de monoïde dans $\mathbb{V}$, on lui associe un morphisme de monade $\mathcal{M}^\wedge \to \mathcal{M}'^\wedge$ sur $\underline{E}$, noté $h^\wedge$. Il est défini sur un objet X par $h^\wedge_X = h \wedge Id_X : M \wedge X \to M' \wedge X$.
Supposons maintenant que $\underline{V}$ admette un objet final 1. Alors 1 a une unique structure de monoïde dans $\mathbb{V}$ et, pour tout monoïde $\mathcal{M}$ de $\mathbb{V}$, la flèche unique $! : M \to 1$ est un morphisme de monoïde. Elle induit donc un morphisme de monade $!^\wedge : \mathcal{M}^\wedge \to 1^\wedge$.

Remarque 3.2. : Toujours en reprenant l'exemple 3 de 2.3, on voit que si $\mathbb{V} = \mathcal{C}oll(\mathbb{M})$ où $\mathbb{M}$ est une monade cartésienne sur $\underline{E}$, alors $\underline{V} = \underline{E}/M(1)$ a un objet final $\mathbb{I} = (M(1), Id_{M1})$. Dans ce cas particulier, on a un isomorphisme canonique de monade $\mathbb{I}^\wedge \simeq \mathbb{M}$.

• Le théorème qui suit répond à la problèmatique énoncée dans l'introduction de cet article. Il donne en fait une généralisation du théorème de P. Leinster (voir [3]).

Théorème 3.3. : Soit $\mathbb{V} = (\underline{V}, \otimes, ...)$ est une catégorie monoïdale, soit $\mathbb{E} = (\underline{E}, \wedge, ...)$ une catégorie $\mathbb{V}$-tensorisée enrichissable et $\mathcal{M} = (M, e, m)$ un monoïde dans $\mathbb{V}$. Alors on a un isomorphisme canonique :

$$Alg(\mathcal{M}^\wedge) \simeq \mathbb{V}\text{-}Cat(\mathcal{M}, \mathcal{E})$$

où $\mathcal{E}$ désigne la catégorie enrichie sur $\mathbb{V}$ canonique associée à $\mathbb{E}$.

<u>*Preuve*</u> : Notons γ l'isomorphisme à construire.
- Pour $(X, a) \in |Alg(\mathcal{M}^\wedge)|$, $\gamma(X, a)$ est donné par $\bar{a} : M \to \mathcal{E}(X, X)$, qui est l'unique flèche de $\underline{V}$ rendant commutatif le triangle suivant :

$$\begin{tikzcd}
M \wedge X \arrow[rr, "\bar{a}\wedge Id"] \arrow[dr, "a"'] & & \mathcal{E}(X,X) \wedge X, \arrow[dl, "Ev"] \\
& X &
\end{tikzcd}$$

- Pour une flèche $f : (X, a) \to (X', a')$ de $Alg(\mathcal{M}^\wedge)$, la flèche $\gamma(f) : \gamma(X, a) \to \gamma(X', a')$ est la $\mathbb{V}$-transformation naturelle définie par $\gamma(f) = \bar{f} : I \to \mathcal{E}(X, X')$, qui est l'unique flèche de $\mathbb{V}$ faisant commuter le carré suivant :

$$\begin{tikzcd}
I \wedge X \arrow[r, "\bar{f}\wedge Id"] \arrow[d, "s"'] & \mathcal{E}(X,X') \wedge X \arrow[d, "Ev"] \\
X \arrow[r, "f"'] & X'
\end{tikzcd}$$

Remarques 3.4. : 1) Appliquons le théorème à l'exemple 3 de 2.3, au cas ensembliste (où $\mathbb{M} = \mathbb{M}o$). Un monoïde $\underline{\Omega}$ de $\mathcal{C}oll(\mathbb{M}o)$ peut être vu comme une opérade au sens de May (voir 1.9) et $\underline{\Omega}^\wedge \simeq \tilde{\underline{\Omega}}$ (voir 3.1(2)). Alors $Alg(\underline{\Omega}^\wedge) \simeq Alg(\tilde{\underline{\Omega}})$. Le terme de gauche, dans l'isomorphisme du théorème, correspond donc à la deuxième conception d'algèbre sur une opérade.
2) D'autre part, pour chaque $X \in |\underline{\mathbb{E}ns}|$, puisque $\mathcal{E}(X, X)$ correspond à l'opérade des endomorphismes de X (remarque 2.7), à $(X, a) \in Alg(\tilde{\underline{\Omega}})$ correspond bien, par le théorème précédent et la remarque 1, à une algèbre, au sens de May, sur l'opérade $\underline{\Omega}$.

4. Cartésianité

Définition 4.1. : 1) Soit $F : \underline{A} \times \underline{B} \to \underline{C}$ un foncteur quelconque. On dit que F est *cartésien* si, pour tout couple de flèches $(A \xrightarrow{a} A', B \xrightarrow{b} B')$ de

$\underline{A} \times \underline{B}$ le carré suivant est cartésien :

$$\begin{tikzcd} F(A,B) \arrow[r, "F(a,Id)"] \arrow[d, "F(Id,b)"'] & F(A',B) \arrow[d, "F(Id,b)"] \\ F(A,B') \arrow[r, "F(a,Id)"'] & F(A',B') \end{tikzcd}$$

2) On dit qu'une catégorie $\mathbb{V}$-tensorisée $\mathbb{E} = (\underline{E}, \wedge, ...)$ est *cartésienne* si son produit tensoriel extérieur $\wedge : \underline{V} \times \underline{E} \to \underline{E}$ est cartésien.
3) Lorsque $\mathbb{V}$ possède un objet final 1, on dit qu'une catégorie $\mathbb{V}$-tensorisée $\mathbb{E} = (\underline{E}, \wedge, ...)$ est *fortement cartésienne*, si elle est cartésienne et si $1^\wedge$ est une monade cartésienne.

Exemple 4.2. : Lorsque $\mathbb{V} = \mathcal{C}oll(\mathbb{M})$ où $\mathbb{M}$ est une monade cartésienne sur une catégorie $\underline{E}$ à limites à gauche finies, alors $\mathbb{E} = (\underline{E}, \wedge, ...)$, en tant que catégorie $\mathbb{V}$-tensorisée, est fortement cartésienne.

Proposition 4.3. : Soit $\mathbb{E} = (\underline{E}, \wedge, ...)$ une catégorie $\mathbb{V}$-tensorisée cartésienne et soit $h : \mathcal{M} \to \mathcal{M}'$ un morphisme de monoïdes dans $\mathbb{V}$. Alors à h correspond $h^\wedge : \mathcal{M}^\wedge \to \mathcal{M}'^\wedge$ qui est un morphisme cartésien entre ces deux monades (i.e. La transformation naturelle $h^\wedge : M \wedge (-) \to M' \wedge (-)$ est cartésienne).

Corollaire 4.4. : Si $\mathbb{E}$ est une catégorie $\mathbb{V}$-tensorisée fortement cartésienne, alors pour tout monoïde $\mathcal{M}$ de $\mathbb{V}$, $\mathcal{M}^\wedge$ est une monade cartésienne.

References

[1] A.BURRONI, $\mathbb{T}$-*catégories*, Cahiers de Topologie et Géométrie Différentielle, (1971),Vol.XII, pages 215-321.

[2] A.CARBONI AND P.JOHNSTONE, *Connected limits, familial representability and Artin glueing*, Mathematical Structures in Computer Science (1995) pages 441-459.

[3] T.LEINSTER, *General operads and Multicategories*, arXiv: math /9810053 [math CT],(1998).

[4] J.P.MAY, *The Geometry of Iterated Loop Spaces*, Lect. Notes. in Math. Springer-Verlag,(1972),Vol.271.

[5] X.ROCHARD, *Théorie tannakienne non additive*, Thèse (1998).

Jacques PENON
25, rue Chapsal,
94340, Joinville-le-Pont
France
Email : tryphon.penon@gmail.com