CAHIERS DE TOPOLOGIE ET
GEOMETRIE DIFFERENTIELLE
CATEGORIQUES

VOLUME LXI-1 (2020)

PURETÉ DE LA MONADE DE BATANIN, I

Jacques PENON

Résumé. Nous montrons que la monade de Batanin $\mathbb{B}$ a une propriété très forte appelée "pureté". Dans une prochaine publication nous verrons que cette propriété nous permet de donner un ensemble d'exemples de ses algèbres (appelées ω-catégories faibles par M.Batanin). Avant de le montrer nous caractérisons $\mathbb{B}$ avec un matériel syntaxique.

Abstract. We prove that the Batanin's monad $\mathbb{B}$ has a very strong property called "purity". In a next publication we'll see that this property enables us to give a set of examples for its algebras (called weak ω-categories by M.Batanin). Before proving it, we characterize $\mathbb{B}$ with a syntactic equipment.

Keywords. Weak ω-category. Globular set. Cartesian monad. Operad. Tree. Syntax.

Mathematics Subject Classification (2010). 18D05.

Introduction aux deux parties

• Ce travail ayant une taille trop importante a été divisé en deux parties. Dans la partie I, après avoir introduit en toute généralité les concepts de monade concrète syntaxique puis de monade pure, on construit plusieurs familles de monades, toutes sur la catégorie des ensembles. Elles sont à la base de toutes les constructions ultérieures.

Dans la partie II, seront construites de nouvelles monades. Mais cette fois principalement sur $\mathbb{G}lob$, la catégorie des "ensembles globulaires". Finalement on aboutit à la monade de Batanin.

• Pour nous, la monade de Batanin (notée ici $\mathbb{B}$) désigne la monade (sur la catégorie des ensembles globulaires) associée à l'ω-opérade de Batanin (voir [1]). Le but de ce travail est de montrer que cette monade possède une propriété très forte qui nous permettra, dans un article ultérieur (voir [10]), de donner une classe d'exemples de ses algèbres (appelées ω-catégories faibles par Batanin). Cette propriété, dite de "pureté", présuppose celle de monade concrète syntaxique, autre concept plus général, que nous définirons préalablement (voir la première partie, section 1). Pour arriver à montrer la pureté de $\mathbb{B}$ nous allons commencer par la caractériser, c'est-à-dire par la reconstruire, avec un outillage syntaxique (d'où le terme "monade concrète syntaxique") comme nous l'avions fait pour construire la monade des prolixes (voir [9]). Rappelons que la monade des prolixes (version non-réflexive, voir [3] et [6]) peut se construire à l'aide d'un langage dont les symboles sont, en plus de ceux de composition $\star_n$, d'un symbole $\square$ représentant la propriété d'étirement (ou de contraction dans la conception de Batanin). Mais la monade $\mathbb{P}$ n'est pas pure (voir la deuxième partie, section 3). Pour remédier à cette imperfection on construit la monade $\mathbb{B}$ en ajoutant à ces précédents symboles un nouveau symbole Δ qui permet de différencier des termes (ou arbres) qui auraient été confondus dans la monade $\mathbb{P}$. Cependant, ce nouveau symbole Δ ne représente pas une nouvelle opération (c'est d'ailleurs la critique que nous avait faite C.Kachour à l'époque de sa découverte). Il nous a conduit au concept d'arbre feuillu où c'est le couple de symboles $(\square, \Delta)$ qui produit une méta-opération universelle sur ces mêmes arbres (voir la première partie section 5). Finalement, on obtient la monade $\mathbb{B}$ qui est syntaxique cartésienne et surtout pure. On montre enfin, en grande partie grâce à sa pureté, que cette monade $\mathbb{B}$ n'est autre que la monade de Batanin; ce qui achève de montrer ce qu'on avait annoncé ici (voir la deuxième partie, section 5). On voit aussi, au passage, le lien très étroit qui existe entre la monade de Batanin et celle des prolixes.

PARTIE I
(QUELQUES MONADES ENSEMBLISTES DE BASE)

Table des matières

Introduction de la partie I

L'opérade de Batanin(voir [2]) est assez proche d'une opérade libre. Le concept de monade *pure* que l'on va définir maintenant est précisément fait pour exprimer de façon rigoureuse cette très puissante propriété. Elle nous servira, entre autre, dans un prochain article (voir [10]) à montrer que les multi-spans forment, dans leur ensemble, un exemple d'ω-catégorie faible au sens de Batanin (voir [2]).

1. Monades pures

1.1 Monades concrètes syntaxiques

Définition 1.1. : Appelons *monade concrète* la donnée :
1) d'une catégorie concrète $(\mathbb{C}, U)$ (où $\mathbb{C}$ est une catégorie quelconque et $U : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{E}ns$ est un foncteur fidèle),
2) d'une monade $\mathbb{M} = (M, \eta, \mu)$ sur la catégorie $\mathbb{C}$.

Définition 1.2. : On appelle *monade concrète syntaxique* la donnée d'une monade concrète $(\mathbb{C}, U, \mathbb{M})$ et d'une transformation naturelle $L : UM \longrightarrow \bar{\mathbb{N}}$ (où $\bar{\mathbb{N}}$ désigne le foncteur constant sur $\mathbb{N}$) vérifiant les axiomes suivants:

(MS0) $\mathbb{C}$ a un objet final 1.
(MS1) $\forall C \in |\mathbb{C}|, \forall x \in U(C),\ L_C.U\eta_C(x) = 1$.
(MS'1) $\forall C \in |\mathbb{C}|, \forall t \in UM(C),\ L_C(t) \leq 1 \Longrightarrow \exists! x \in U(C)$, $U\eta_C(x) = t$.
(MS2) $\forall C \in |\mathbb{C}|, \forall T \in UM^2(C),\ L_{MC}(T) \leq L_C.U\mu_C(T)$.
(MS'2) $\forall C \in |\mathbb{C}|, \forall T \in UM^2(C),\ L_{MC}(T) = L_C.U\mu_C(T) \Longrightarrow$ $\exists t \in UM(C),\ T = UM\eta_C(t)$.
(MS3) Pour tout $C \in |\mathbb{C}|$, l'application suivante est injective :

$$(UM!_{MC}, U\mu_C) : UM^2(C) \longrightarrow UM(1) \times UM(C).$$

Remarques 1.3. : Cela implique déjà les conséquences suivantes :
1) $\forall t \in UM(C),\ L_C(t) \geq 1$.
2) L'application $U\eta_C : U(C) \longrightarrow UM(C)$ est injective,
3) Dans (MS'2) l'élément $t \in UM(C)$ tel que $T = UM\eta_C(t)$ est unique et ne peut être que $t = U\mu_C(T)$.

Exemples et contre-exemples 1.4. : 1) Nous verrons dans la section 3 que tout langage (S, ar), a priori sans constante, produit une monade $\mathbb{A} = (A, \eta, \mu)$ sur $\mathbb{E}ns$ qui, munie du foncteur $U = Id_{\mathbb{E}ns}$ et de la transformation naturelle $L : A \to \bar{\mathbb{N}}$ "longueur d'un terme", devient une monade concrète syntaxique. Nous en verrons ensuite bien d'autres au cours des sections suivantes, comme les monades $\mathbb{P}$ et $\mathbb{B}$ (voir la deuxième partie les sections 3 et 4), sur $\mathbb{G}lob$, la catégorie des "ensembles globulaires" (voir la deuxième partie section 2), munies du foncteur d'oubli évident $\mathbb{G}lob \to \mathbb{E}ns$ et d'une transformation naturelle L construite à partir de l'exemple précédent.
2) Les monades $\mathbb{M}o$ des monoïdes, sur $\mathbb{E}ns$, et ω des ∞-catégories strictes, sur $\mathbb{G}lob$, ne peuvent produire des monades concrètes syntaxiques car leur morphisme $(UM!_{M1}, U\mu_1) : UM^2(1) \longrightarrow UM(1) \times UM(1)$ n'est pas un monomorphisme.

Proposition 1.5. (stabilité des monades concrètes syntaxiques):
Soient $\mathcal{M} = (\mathbb{C}, U, \mathbb{M})$ et $\mathcal{M}' = (\mathbb{C}', U', \mathbb{M}')$ deux monades concrètes et $(F, m) : \mathcal{M} \to \mathcal{M}'$ un morphisme entre monades concrètes, (i.e. $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}'$ est un foncteur tel que $U'F = U$, $m : FM \to M'F$ est transformation naturelle tels que $m.F\eta = \eta' F$ et $m.F\mu = \mu' F.M'm.mM$), $L : UM \to \bar{\mathbb{N}}$ et $L' : U'M' \to \bar{\mathbb{N}}$ deux transformations naturelles telles

que :
1) $\mathbb{C}$ a un objet final,
2) F est fidèle.
3) $\forall C \in |\mathbb{C}|$, $U'm_C$ et $U'M'm_C$ sont injectifs,
4) $L = L'F.U'm$.
Alors, si $\mathcal{M}'$ muni de L' est une monade syntaxique, il en est de même de $\mathcal{M}$ muni de L.

<u>Preuve</u> : $(MS1)$ est immédiat. Pour $(MS'1)$ on utilise l'injectivité de $U'm_C$.
Pour $(MS2)$ Soient $C \in |\mathbb{C}|$ et $T \in UM^2(C)$, alors : $L_{MC}(T) = L'_{M'FC}.U'M'm_C.U'm_{MC}(T) \leq L'_{FC}.U'\mu'_{FC}.U'M'm_C.U'm_{MC}(T) = L_C.U\mu_C(T)$. Pour $(MS'2)$ Si $L_{MC}(T) = L_C.U\mu_C(T)$ alors $L'_{M'FC}.U'M'm_C.U'm_{MC}(T) = L'_{FC}.U'\mu'_{FC}.U'M'm_C.U'm_C(T)$ il existe donc $t \in U'M'F(C)$ tel que $U'M'm_C.U'm_{MC}(T) = U'M'\eta'_{FC}(t)$. Posons $t' = U\mu_C(T)$ Alors $U'm_C(t') = t$ et $U'M'm_C.U'm_{MC}(T) = U'M'm_C.U'm_{MC}.U'FM\eta_C(t')$ et donc, comme $U'm_{MC}$ et $U'M'm_C$ sont injectifs, on obtient $T = UM\eta_C(t')$.
Pour $(MS3)$, cela résulte de l'identité :
$(U'M'!_{F1} \times Id_{U'M'FC}).(U'm_1 \times U'm_C).(UM!_{MC}, U\mu_C) = (U'M'!_{M'FC}, U'\mu'_{FC}).U'M'm_C.U'm_{MC}$

1.2 Monades concrètes cartésiennes

Définition 1.6. : Une monade concrète $(\mathbb{C}, U, \mathbb{M})$ est dite *cartésienne* si :
1) $\mathbb{C}$ est à limites projectives finies,
2) U commute aux produits fibrés,
3) $\mathbb{M} = (M, \eta, \mu)$ est cartésienne (i.e. M commute aux produits fibrés et η et μ sont des transformations naturelles cartésiennes - voir [5]).

• Soit $(\mathbb{C}, U, \mathbb{M})$ une monade concrète cartésienne. On constate que

Proposition 1.7. :(voir 1.16) Le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} UM(1) \arrow[r, "UM\eta_1"] & UM^2(1) \arrow[l, bend right, "U\mu_1"'] \arrow[l, bend left, "UM!"] & UM^3(1) \arrow[l, "UM\mu_1"'] \arrow[l, bend right, "U\mu_{M1}"'] \arrow[l, bend left, "UM^2!"] \end{tikzcd}$$

est sous-jacent à une catégorie interne dans $\mathbb{E}ns$ (c'est donc une catégorie).

Notation 1.8. : Cette catégorie ayant une importance centrale par la suite on la note $UDec(\mathbb{M})$.

Remarque 1.9. : Elle a les propriétés suivantes :
- Les composantes connexes de $UDec(\mathbb{M})$ sont exactement de la forme $(U!_{M1})^{-1}(\{u\})$ où $u \in U(1)$.
- Elles possèdent chacune un objet final qui est $U\eta_1(u)$.

Proposition 1.10. : Soit $(\mathbb{C}, U, \mathbb{M})$ une monade concrète cartésienne et $L : UM \to \bar{\mathbb{N}}$ une transformation naturelle alors :
$(\mathbb{C}, U, \mathbb{M}, L)$ est une monade concrète syntaxique ssi on a les propriétés $(MCCS1) \to (MCCS4)$ suivantes :

$(MCCS1)$ $UDec(\mathbb{M})$ est un ensemble ordonné,
$(MCCS2)$ $\lambda = L_1 : UM1 \to \mathbb{N}$ est une application croissante (où $UM(1)$ est muni de l'ordre opposé à celui provenant de la catégorie $UDec(\mathbb{M})$ et $\mathbb{N}$ est muni de l'ordre naturel),
$(MCCS3)$ λ est conservateur (i.e. $\forall t, t' \in UM(1)$, si $t \leq t'$ et $\lambda(t) = \lambda(t')$ alors $t = t'$),
$(MCCS4)$ $\forall t \in UM(1), \lambda(t) \geq 1$ et, sur chaque composante connexe de $UM(1), \lambda$ préserve le plus petit élément dans $\mathbb{N}^*$.

Preuve : $(MCCS1)$ résulte de $(MS3)$, $(MCCS2)$ de $(MS2)$,$(MCCS3)$ de $(MS'2)$. Pour le début du $(MCCS4)$, voir la remarque 1.9. La suite résulte de $(MS1)$, modulo la même remarque.
Réciproquement, pour $(MS1)$ on utilise la remarque 1.9. Pour $(MS'1)$ on s'appuie sur le fait que λ est conservateur et que η est cartésienne. Pour $(MS2)$ cela résulte de la croissance de λ. Enfin pour $(MS3)$ on utilise la cartésianité de μ.

Exemples 1.11. Les monades concrètes syntaxiques signalées précédemment (au 1.4) sont aussi cartésiennes.

Remarque 1.12. On donnera dans [10] un plus ample développement aux monades concrètes cartésiennes et aux catégories $UDec(\mathbb{M})$ ainsi que des références aux auteurs traitant de ce sujet.

1.3 pureté d'une monade concrète cartésienne syntaxique

• Donnons nous maintenant $\mathcal{M} = (\mathbb{C}, U, \mathbb{M}, L)$ une monade concrète cartésienne syntaxique (en abrégé MCCS).

Définition 1.13. : 1) La relation d'ordre sur $UM(1)$ provenant de structure de catégorie sur $UDec(\mathbb{M})$ est appelée la relation de *postériorité*. Son ordre opposé (corespondant à $UDec(\mathbb{M})^{op}$) est appelé la relation d'*antériorité*. On le note $\underset{\mathbb{M}}{\leq}$ (ou encore pour simplifier $\leq$). Ainsi, pour $t, t' \in UM(1)$, on écrit $t \leq t'$ s'il existe une flèche $t' \to t$ dans $UDec(\mathbb{M})$.
2) Soit $t \in UM(1)$. On dit que t est *primitif* si, t_0 étant le plus petit élément (pour $\leq$) de sa composante connexe, alors $t \neq t_0$ et, pour tout $t' \in UM(1)$ tel que $t_0 \leq t' \leq t$, alors $t' = t_0$ ou $t' = t$.

Proposition 1.14. : Soit $t \in UM(1)$. Alors t est primitif ssi $L_1(t) > 1$ et $\forall T \in UM^2(1),\ U\mu_1(T) = t \quad \Rightarrow \quad T = U\eta_{M1}(t)$ ou $T = UM\eta_1(t)$.

Preuve : Sans difficulté.

Définition 1.15. : 1) une monade *pure* est une MCCS telle que :
$\forall t \in UM(1),\ \lambda(t) \geq 1 \Rightarrow \exists! \theta \in UM(1),\ \theta \leq t$ et θ est primitif.
2) $\mathcal{M}$ étant supposée pure, pour chaque objet $C \in |\mathbb{C}|$ et $t \in UM(C)$ tel que $L_C(t) > 1$ alors :
- l'unique élément $\theta \in UM(1)$ primitif tel que $\theta \leq UM!_C(t)$ s'appelle la *composante primitive* de t et,
- L'unique $T \in UM^2(C)$ tel que $UM!_{MC}(T) = \theta$ et $U\mu_C(T) = t$ est appelé la *décomposition primitive* de t.

Remarque 1.16. : 1) Nous verrons au 3.42 que la monade $\mathbb{A}$ (munie de $U = Id_{\mathbb{E}ns}$ et L) est pure.
2) Par contre $\mathbb{P}$ (muni de U et L) n'est pas pure (voir la partie 2, section 3).
3) Enfin, et c'est le but de cet article, la monade $\mathbb{B}$ (munie de U et L) est pure (voir la partie 2, section 5).

2. Arbres sur un langage

Introduction : La notion d'arbre est l'outil de base sur lequel repose l'ensemble de ce travail. Avant d'aller plus loin, il nous faut explorer ce concept pour mettre en place un ensemble de techniques que nous utiliserons en permanence tout du long des différentes sections. Remarquons qu'il est présent dans toutes les monades concrètes syntaxiques construites ici mais pas seulement. Il apparait aussi dans la construction de la monade ω (voir la deuxième partie, section 2) qui n'est pas syntaxique (des précisions ont été données au 1.4).

2.1 Fonctions élémentaires sur les arbres

Conventions 2.1. : Comme on le fait en logique, considérons un langage constitué d'un ensemble S dit de "symboles fonctionnels" et d'une application $ar : S \to \mathbb{N}$ qui, à chaque symbole associe son "arité". Si $ar(s) = 0$, on dit que s est une constante. On note $\mathrm{Cons}(S, ar)$ l'ensemble des constantes de (S, ar).
Les termes de ce langage (ou plus exactement les termes clos, puisque nous n'utilisons pas de variable) sont appelés ici des *arbres* sur le langage (S, ar). (Les termes ayant plutôt un caractère uni-dimensionnel contrairement aux arbres qui sont eux deux-dimensionnels, nous préférons donc la seconde terminologie). Notons $\mathbb{A}rb(S, ar)$ l'ensemble des arbres sur le langage (S, ar). Un arbre constitué de la seule constante c est noté $c(\varnothing)$.

Notations et définitions 2.2. : - Soit $a \in \mathbb{A}rb(S, ar)$, on note $\mathrm{L}(a)$ la longueur du terme correspondant. On sait que $\mathrm{L}(c(\varnothing)) = 1$ et que
$\mathrm{L}(s(a_0, ..., a_{n-1})) = 1 + \sum_{j\in[n]} \mathrm{L}(a_j)$ (où ici $s \in S$ est d'arité $n \geq 1$ et où $[n] = \{0, ..., n-1\}$).
- On définit la *largeur* $l(a)$ et la *hauteur* $\mathrm{h}(a)$ d'un arbre $a \in \mathbb{A}rb(S, ar)$ par induction sur $\mathrm{L}(a)$ en posant :
$l(c(\varnothing)) = 1$ et $l(s(a_0, ..., a_{n-1})) = \sum_{j\in[n]} l(a_j)$ (où $n = ar(s) \geq 1$).
$\mathrm{h}(c(\varnothing)) = 1$ et $\mathrm{h}(s(a_0, ..., a_{n-1})) = 1 + \sup_{j\in[n]} \mathrm{h}(a_j)$.
- On affine maintenant la hauteur d'un arbre en définissant la hauteur (ou longueur) d'une branche d'un arbre. Soient $a \in \mathbb{A}rb(S, ar)$ et $j \in [l(a)]$. On définit $\mathrm{h}_j(a) \in \mathbb{N}$, par induction sur $\mathrm{L}(a)$.
.. Si $a = c(\varnothing)$ (ici $l(a) = 1$ et donc $j = 0$) alors on pose $\mathrm{h}_0(a) = 1$.
.. Si $a = s(a_0, ..., a_{n-1})$, où $n \geq 1$, commençons par noter, pour $i \in [n]$, $\hat{i} = \sum_{x\in[i]} l(a_x)$, puis considérons l'unique $j_0 \in [n]$ tel que
$\hat{j_0} \leq j < \widehat{j_0 + 1}$. Alors on pose $\mathrm{h}_j(a) = 1 + \mathrm{h}_{j-\hat{j_0}}(a_{j_0})$.

Proposition 2.3. : $\mathrm{h}(a) = \sup_{j \in [la]} \mathrm{h}_j(a)$.

Preuve : Par induction sur $\mathrm{L}(a)$.

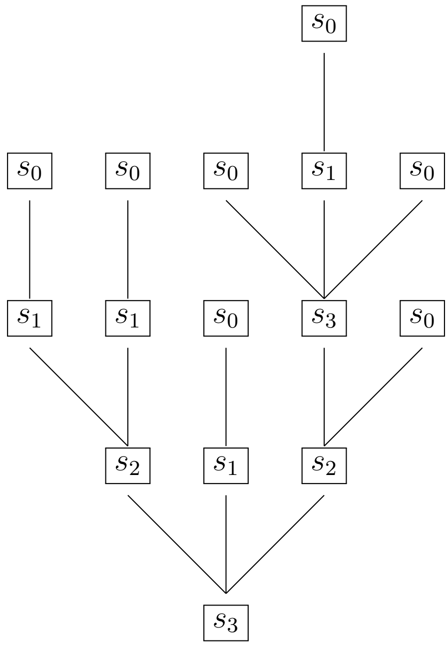
Notations et définitions 2.4. : On va maintenant avoir une approche plus descriptive d'un arbre. Soit $a \in \mathbb{A}rb(S, ar)$. On définit $\mathrm{cons}(a)$, $\mathrm{sym}(a)$ et $\mathrm{sym}_j(a)$ (où $j \in [la]$) par induction sur $\mathrm{L}(a)$.
1) $\mathrm{cons}(a) \in Mo(S)$ est la liste des constantes apparaissant dans a. On la définit précisément par :
.. Si $a = c(\varnothing)$, $\mathrm{cons}(a) = (c)$,
.. Si $a = s(a_0, ..., a_{n-1})$, $\mathrm{cons}(a) = \mathrm{cons}(a_0)...\mathrm{cons}(a_{n-1})$ (i.e. la concaténation des listes $\mathrm{cons}(a_0), ..., \mathrm{cons}(a_{n-1})$).
2) $\mathrm{sym}(a)$ est le symbole placé au pied de l'arbre a.
.. Si $a = c(\varnothing)$, $\mathrm{sym}(a) = c$.
.. Si $a = s(a_0, ..., a_{n-1})$, $\mathrm{sym}(a) = s$.
3) $\mathrm{sym}_j(a) \in Mo(S)$ (où $j \in [la]$) est la liste des symboles de la j^e branche de a. On la définit par :
.. Si $a = c(\varnothing)$ (alors $j = 0$), $\mathrm{sym}_0(a) = (c)$.
.. Si $a = s(a_0, ..., a_{n-1})$, on pose $\mathrm{sym}_j(a) = (s).\mathrm{sym}_{j-\hat{j_0}}(a_{j_0})$ (où le "point" désigne la concaténation des deux listes et où l'entier $\hat{j_0}$ a été défini au 2.2).
4) Dans la suite on aura encore besoin de la notation $\mathrm{sym}_j^-(a)$. Lorsque $\mathrm{sym}_j(a) = (s_0, ..., s_{n-1})$ on pose $\mathrm{sym}_j^-(a) = (s_0, ..., s_{n-2})$ (lorsque a est réduit à une constante $\mathrm{sym}_j^-(a)$ est la liste vide).

Proposition 2.5. : Soit $a \in \mathbb{A}rb(S, ar)$.
1) $\mathrm{L}\,\mathrm{cons}(a) = l(a)$ (où L désigne ici la longueur d'une liste).
2) $\forall j \in [la]$, $\mathrm{L}\,\mathrm{sym}_j(a) = \mathrm{h}_j(a)$.
3) Pour tout $j \in [la]$, posons $n = \mathrm{h}_j(a)$ et écrivons $\mathrm{sym}_j(a) = (s_0, ..., s_{n-1})$, alors $s_{n-1} \in \mathrm{Cons}(S, ar)$.

Preuve : Par induction sur $\mathrm{L}(a)$.

Exemple 2.6. : • Afin de mieux visualiser les arbres sur un langage et les différentes fonctions définies sur ces arbres, donnons un exemple concret d'arbre (l'arbre a ci-dessous), et sa représentation graphique. Puis, nous passerons en revue, sur cet exemple, son image par les différentes fonctions spécifiques aux arbres.
• Fixons déjà un langage (S, ar), où $S = \{s_0, s_1, s_2, s_3\}$ et $ar(s_i) = i$. On

définit ensuite les arbres (intermédiaires) $a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{A}rb(S, ar)$ par :
$a_0 = s_1(s_0(\varnothing)),\ a_1 = s_2(a_0, a_0),\ a_2 = s_3(s_0(\varnothing), a_0, s_0(\varnothing)),$
$a_3 = s_2(a_2, s_0(\varnothing))$. Puis enfin : $a = s_3(a_1, a_0, a_3)$.
L'arbre a est représenté par le dessin suivant :

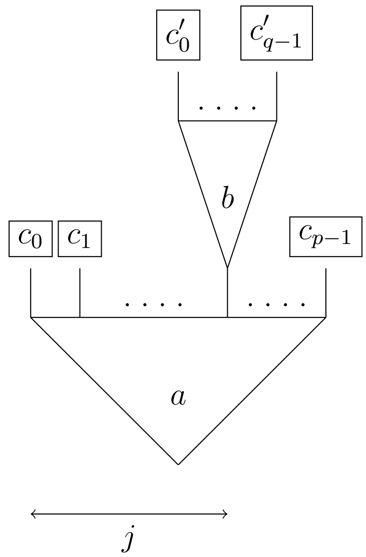


$Fig : a$

Pour cet exemple, on vérifie que :
$\mathrm{L}(a) = 15,\ l(a) = 7,\ \mathrm{h}(a) = 5,$
$\mathrm{h}_0(a) = \mathrm{h}_1(a) = \mathrm{h}_3(a) = \mathrm{h}_5(a) = 4,$
$\mathrm{h}_2(a) = \mathrm{h}_6(a) = 3,\ \mathrm{h}_4(a) = 5$
$\mathrm{cons}(a) = (s_0, s_0, s_0, s_0, s_0, s_0, s_0),$
$\mathrm{sym}(a) = s_3,$
$\mathrm{sym}_0(a) = \mathrm{sym}_1(a) = (s_3, s_2, s_1, s_0),$
$\mathrm{sym}_2(a) = (s_3, s_1, s_0),$
$\mathrm{sym}_3(a) = \mathrm{sym}_5(a) = (s_3, s_2, s_3, s_0),$
$\mathrm{sym}_4(a) = (s_3, s_2, s_3, s_1, s_0),$
$\mathrm{sym}_6(a) = (s_3, s_2, s_0).$

2.2 Branchement de deux arbres

Notations et définitions 2.7. : Soient $a, b \in \mathbb{A}rb(S, ar)$ et $j \in [la]$. On définit, par induction sur $\mathrm{L}(a)$, l'arbre $\mathrm{Br}(a, j, b)$ appelé le *branchement sur* a, *au niveau* j, *de* b.
.. Si $a = c(\varnothing)$, alors $j = 0$. On pose $\mathrm{Br}(a, j, b) = b$.
.. Si $a = s(a_0, ..., a_{n-1})$, on pose $\mathrm{Br}(a, j, b) = s(a'_0, ..., a'_{n-1})$ où, pour tout $i \in [n]$, $a'_i = a_i$ si $i \neq j_0$ et $a'_{j_0} = \mathrm{Br}(a_{j_0}, j - \hat{j}_0, b)$ et où les entiers j_0 et $\hat{j}_0$ ont été définis au 2.2.
On peut donner, pour le branchement de ces deux arbres a et b au niveau j, la représentation graphique suivante :



où $\mathrm{cons}(a) = (c_0, c_1, ..., c_{p-1})$ et $\mathrm{cons}(b) = (c'_0, c'_1, ..., c'_{q-1})$.

Remarque 2.8. : On voit qu'on a obtenu $\mathrm{Br}(a, j, b)$ en substituant dans a l'arbre b à la j^e constante de a. Cette j^e constante ayant disparue dans $\mathrm{Br}(a, j, b)$ elle a donc plutôt un statut de "variable". A la section 3 nous allons redresser cette incohérence apparente en introduisant la constante 0 qui joue plus spécifiquement ce rôle de "variable".

Proposition 2.9. : Fixons $a, b \in \mathbb{A}rb(S, ar)$ et $j \in [la]$ et posons pour simplifier $\hat{a} = \mathrm{Br}(a, j, b)$. Alors :
1) $\mathrm{L}(\hat{a}) = \mathrm{L}(a) + \mathrm{L}(b) - 1$.

2) $l(\hat{a}) = l(a) + l(b) - 1$.
3) Soit $k \in [l\hat{a}]$. Alors :
- Si $k < j,\ \mathrm{h}_k(\hat{a}) = \mathrm{h}_k(a)$.
- Si $j \leq k < j + l(b),\ \mathrm{h}_k(\hat{a}) = \mathrm{h}_j(a) + \mathrm{h}_{k-j}(b) - 1$.
- Si $j + l(b) \leq k < l(\hat{a}),\ \mathrm{h}_k(\hat{a}) = \mathrm{h}_{k+1-l(b)}(a)$.
4) $\mathrm{h}(\hat{a}) = \sup(\mathrm{h}(a), \mathrm{h}_j(a) + \mathrm{h}(b) - 1)$.

Preuve : On le fait par induction sur $\mathrm{L}(a)$. Pour le (3), lorsque $a = s(a_0, ..., a_{n-1})$ on introduit les deux fonctions données pour $i \in [n]$ par $\hat{i} = \sum_{x \in [i]} l(a_x)$ et $\check{i} = \sum_{x \in [i]} l(a'_x)$ (où a'_x apparait dans la définition de $\hat{a}$). On considère ensuite les deux nombres $j_0, k_1 \in [n]$ tels que $\hat{j_0} \leq j < \widehat{j_0 + 1}$ et $\check{k_1} \leq k < (k_1 + 1)^{\vee}$. On remarque que :
- Si $k < j$, alors $k_1 \leq j_0$,
- Si $j \leq k < j + l(b)$, alors $k_1 = j_0$,
- Si $j + l(b) \leq k < l(\hat{a})$, alors $k_1 > j_0$.
On conclut ensuite facilement.

Proposition 2.10. : Sous les mêmes hypothèses que la proposition précédente
1) Écrivons $(c_o, ..., c_{n-1}) = \mathrm{cons}(a)$, puis posons $A_j = (c_o, ..., c_{j-1})$, $A'_j = (c_{j+1}, ..., c_{n-1})$ et $B = \mathrm{cons}(b)$. Alors $\mathrm{cons}(\hat{a}) = A_j.B.A'_j$.
2) Si $\mathrm{L}(a) > 1$ on a $\mathrm{sym}(\hat{a}) = \mathrm{sym}(a)$.
3) Soit $k \in [l(\hat{a})]$, alors :
- Si $k < j,\ \mathrm{sym}_k(\hat{a}) = \mathrm{sym}_k(a)$.
- Si $j \leq k < j + l(b),\ \mathrm{sym}_k(\hat{a}) = \mathrm{sym}_j^-(a).\mathrm{sym}_{k-j}(b)$.
- Si $j + l(b) \leq k < l(\hat{a}),\ \mathrm{sym}_k(\hat{a}) = \mathrm{sym}_{k+1-l(b)}(a)$.

Preuve : Pour le (1), on le fait par induction sur $\mathrm{L}(a)$. lorsque $a = s(a_0, ..., a_{n-1})$ on introduit, comme à la proposition précédente, les notations $\hat{i}, \check{i}$ (où encore $i^{\vee}$), j_0 et k_1, puis, après avoir noté $(\hat{c}_0, ..., \hat{c}_{m-1}) = \mathrm{cons}(\hat{a})$, on montre que, pour $k \in [l(\hat{a})]$,
- Si $k < \check{j_0}$, alors $k_1 < j_0$ et $\hat{c_k} = c_k$,
- Si $\check{j_0} \leq k < (j_0 + 1)^{\vee},\ k_1 = j_0$, et
.. Si $\check{j_0} \leq k < j,\ \hat{c}_k = c_k$,
.. Si $j \leq k < j + l(b) - 1,\ \hat{c}_k = c'_{k-1}$ (où $(c'_o, ..., c'_{n'-1}) = B$),
.. Si $j + l(b) - 1 \leq k < (j_0 + 1)^{\vee},\ \hat{c}_k = c_{k-n'+1}$,
- Si $(j_0 + 1)^{\vee} \leq k < l(\hat{a})$, alors $j_0 < k_1$ et $\hat{c}_k = c_{k-n'+1}$,
La partie (2) est immédiate. Pour le (3), on procède comme au (3) de la

proposition précédente.

• Nous allons maintenant nous intéresser aux propriétés "opéradiques" du branchement (nous donnerons un sens plus précis à cette affirmation au cours de la section 3).

Proposition 2.11. : Soient $a, b, c \in \mathbb{A}rb(S, ar)$ et $j, k \in \mathbb{N}$.
1) Si $j \in [la], k \in [lb]$, alors :

$$\mathrm{Br}(a, j, \mathrm{Br}(b, k, c)) = \mathrm{Br}(\mathrm{Br}(a, j, b), j + k, c).$$

2) Si $k < j < l(a)$, alors :

$$\mathrm{Br}(\mathrm{Br}(a, j, b), k, c) = \mathrm{Br}(\mathrm{Br}(a, k, c), j + l(c) - 1, b).$$

3) Si $j \in [la]$, écrivons $\mathrm{cons}(a) = (c_o, ..., c_{n-1})$. Alors :

$$\mathrm{Br}(a, j, c_j(\varnothing)) = a.$$

Preuve : Par induction sur $\mathrm{L}(a)$. Plus précisément, pour le (1), lorsque $a = s(a_0, ..., a_{n-1})$ on introduit, comme à la proposition 2.9, les notations $\hat{i}, \check{i}, j_0$ On montre ensuite que $\check{j_0} \le j + k < (j_0 + 1)^\vee$. Le reste de la preuve se fait sans difficulté. Pour le (2), lorsque $a = s(a_0, ..., a_{n-1})$, on écrit $\mathrm{Br}(a, j, b) = s(a'_0, ..., a'_{n-1})$, $\mathrm{Br}(a, k, c) = s(a"_0, ..., a"_{n-1})$ et, pour chaque $i \in [n]$ on pose $\hat{i} = \sum_{x \in [i]} l(a_x)$, $\check{i} = \sum_{x \in [i]} l(a'_x)$, $\tilde{i} = \sum_{x \in [i]} l(a"_x)$, puis on considère $j_0, k_0 \in [n]$ définis par $\hat{j_0} \le j < \widehat{j_0 + 1}$, $\hat{k_0} \le k < \widehat{k_0 + 1}$. On a déjà $k_0 \le j_0$. puis, pour $i \in [n]$, on a les implications :

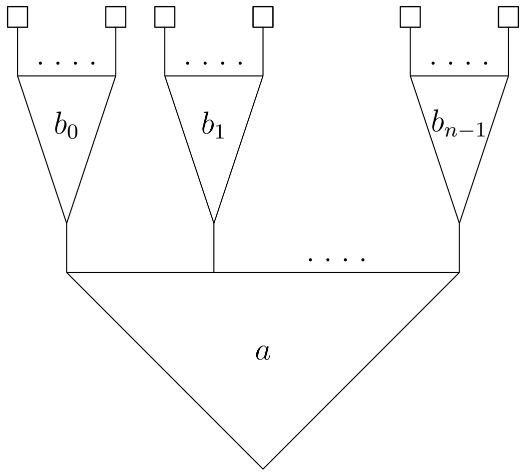
$$i \le j_0 \;\Rightarrow\; \check{i} = \hat{i}, \quad i > j_0 \;\Rightarrow\; \check{i} = \hat{i} + l(b) - 1$$
$$i \le k_0 \;\Rightarrow\; \tilde{i} = \hat{i}, \quad i > k_0 \;\Rightarrow\; \tilde{i} = \hat{i} + l(c) - 1$$

On montre ensuite que $\tilde{j_0} \le j + l(c) - 1 < \widetilde{j_0 + 1}$ en étudiant les deux cas $k_0 = j_0$ et $k_0 < j_0$. On obtient alors à chaque fois l'identité voulue. La partie (3) est sans difficulté.

2.3 La loi OP

• Soient $a \in \mathbb{A}rb(S, ar)$, $n = l(a)$ et $(b_o, ..., b_{n-1}) \in \mathbb{A}rb(S, ar)^n$. On construit un nouvel arbre noté $\mathrm{OP}(a, (b_o, ..., b_{n-1}))$. Pour l'obtenir, on construit d'abord une liste d'arbres $(\hat{a}^j)_{j \in [n+1]}$, par induction sur j, en posant :
$\hat{a}^0 = a$ et $\hat{a}^{j+1} = \mathrm{Br}(\hat{a}^j, n-j-1, b_{n-j-1})$.

Notation 2.12. : On peut alors poser $\mathrm{OP}(a, (b_o, ..., b_{n-1})) = \hat{a}^n$.
$\mathrm{OP}(a, (b_o, ..., b_{n-1}))$ peut se représenter de la façon suivante :



Remarque 2.13. : En fait, pour que cette construction ait un sens, on montre dans la même induction que $l(\hat{a}^j) = n - j + \sum_{i=n-j}^{n-1} l(b_i)$, ce qui entraine que $n - j - 1 < l(\hat{a}^j)$.

• Fixons $a, b_o, ..., b_{n-1} \in \mathbb{A}rb(S, ar)$ (où $n = l(a)$) et posons $\hat{a} = \mathrm{OP}(a, (b_o, ..., b_{n-1}))$.

Proposition 2.14. : 1) $\mathrm{L}(\hat{a}) = \mathrm{L}(a) - l(a) + \sum_{j \in [n]} \mathrm{L}(b_j)$.
2) $l(\hat{a}) = \sum_{j \in [n]} l(b_j)$.
3) $\mathrm{cons}(\hat{a}) = \mathrm{cons}(b_0)...\mathrm{cons}(b_{n-1})$.
4) Si $\mathrm{L}(a) > 1$ alors $\mathrm{sym}(\hat{a}) = \mathrm{sym}(a)$.

Preuve : Le (1) et le (2) se montrent sans difficulté. Pour le (3), on montre par induction sur $j \in [n+1]$ que $\mathrm{cons}(\hat{a}^j) = A_{n-j}.B_{n-j}...B_{n-1}$

où, après avoir posé $\mathrm{cons}(a) = (c_o, ..., c_{n-1})$, on note $A_j = (c_o, ..., c_{j-1})$ et $B_j = \mathrm{cons}(b_j)$ (on utilise la proposition 2.10(1). Pour le (4) cela résulte encore de la proposition 2.10(2).

Proposition 2.15. : Soit $j \in [l\hat{a}]$. Après avoir noté $\forall i \in [la]$, $\hat{i} = \sum_{x \in [i]} l(b_x)$ et $j_0 \in [n]$ tel que $\hat{j_0} \leq j < \widehat{j_0 + 1}$, on a :
1) $\mathrm{h}_j(\hat{a}) = \mathrm{h}_{j_0}(a) + \mathrm{h}_{j - \hat{j_0}}(b_{j_0}) - 1$.
2) $\mathrm{sym}_j(\hat{a}) = \mathrm{sym}^-_{j_0}(a).\mathrm{sym}_{j-\hat{j_0}}(b_{j_0})$.

Preuve : Notons déjà $(c_o, ..., c_{n-1}) = \mathrm{cons}(a)$. On utilise ensuite la liste $(b^j_x)_{x \in [n]}$ où $b^j_x = c_x(\varnothing)$ si $x < n - j$ et $b^j_x = b_x$ si $n - j \leq x < n$. Puis, pour chaque $i, j \in [n+1]$, on note $\hat{i}^j = \sum_{x \in [i]} l(b^j_x)$. On considère aussi, pour chaque $k \in [l\hat{a}^j]$ l'entier $k_j \in [n]$ tel que $\hat{k}^j_j \leq k < \widehat{k_j + 1}^j$. Pour le (1), tout revient alors à montrer par induction sur $j \in [n+1]$, que :

$$\forall k \in [l\hat{a}^j],\ \mathrm{h}_k(\hat{a}^j) = \mathrm{h}_{k_j}(a) + \mathrm{h}_{k - \hat{k}^j_j}(b^j_{k_j}) - 1.$$

Pour le (2) il faut montrer que :

$$\forall k \in [l\hat{a}^j],\ \mathrm{sym}_k(\hat{a}^j) = \mathrm{sym}^-_{k_j}(a).\mathrm{sym}_{k - \hat{k}^j_j}(b^j_{k_j}).$$

Proposition 2.16. : Soit $a \in \mathbb{A}rb(S, ar)$.
1) Si $n = l(a)$ et $(c_o, ..., c_{n-1}) = \mathrm{cons}(a)$, alors :

$$\mathrm{OP}(a, (c_o(\varnothing), ..., c_{n-1}(\varnothing)) = a$$

2) Si $c \in \mathrm{Cons}(S, ar)$, alors $\mathrm{OP}(c(\varnothing), (a)) = a$.

Preuve : Pour le (1) cela résulte de la proposition 2.11 (3). Le (2) est immédiat.

Proposition 2.17. : Soient $s \in S$ tel que $ar(s) = n \neq 0$ et $(c_o, ..., c_{n-1})$ dans $\mathrm{Cons}(S, ar)^n$. On pose $\hat{s} = s(c_o(\varnothing), ..., c_{n-1}(\varnothing))$. Alors, pour tout $(a_o, ..., a_{n-1}) \in \mathbb{A}rb(S, ar)^n$, on a $\mathrm{OP}(\hat{s}, (a_o, ..., a_{n-1})) = s(a_o, ..., a_{n-1})$.

Preuve : On commence par montrer le lemme 2.18 suivant, puis on montre, par induction sur $j \in [n+1]$, que
$\hat{a}^j = s(c_o(\varnothing), ..., c_{n-j-1}(\varnothing), a_{n-j}, ..., a_{n-1})$.

Lemme 2.18. : Soient $s, c \in S$ tels que $ar(s) = n \neq 0$ et $ar(c) = 0$. Soient aussi $(a_o, ..., a_{n-1}) \in \mathbb{A}rb(S, ar)^n$ et $j \in [n]$. On pose $\bar{a} = s(a_o, ..., a_{j-1}, c(\varnothing), a_{j+1}, ..., a_{n-1})$. Alors $\mathrm{Br}(\bar{a}, \hat{j}, a_j) = s(a_o, ..., a_{n-1})$ (où $\forall i \in [n]$, $\hat{i} = \sum_{x \in [i]} l(a_x)$).

2.4 Arbres feuillus

Pour aider à la compréhension de cette partie nous vous renvoyons à la section 5 qui traite d'un cas particulier plus lisible.

Définition 2.19. : On appelle *langage chargé* la donnée d'un langage (S, ar) muni d'une nouvelle application $ch : S \to \mathbb{Z}$ ($ch(s)$ est la *charge* du symbole s) tel que : $\forall s \in S,\ ar(s) = 0 \ \Rightarrow\ ch(s) = 0$.

Notations 2.20. : Soit maintenant $\bar{s} \in Mo(S)$ (c'est-à-dire une liste d'éléments de S). Ecrivons $\bar{s} = (s_o, ..., s_{n-1})$. Pour chaque $j \in [n]$, on pose $\mathrm{ch}_j(\bar{s}) = \sum_{i \in [j+1]} ch(s_i) = \sum_{i=0}^{j} ch(s_i)$. On pose aussi $\mathrm{ch}(\bar{s}) = \sum_{i \in [n]} ch(s_i) = \mathrm{ch}_{n-1}(\bar{s})$.

Définition 2.21. : Soient maintenant $p \in \mathbb{Z}$ et $\bar{s} \in Mo(S)$ (avec $n = \mathrm{L}(\bar{s})$). On dit que $\bar{s}$ est *p-chargé* si :
1) $\forall j \in [n],\ \mathrm{ch}_j(\bar{s}) \geq p$,
2) $\mathrm{ch}(\bar{s}) = p$.

Définition 2.22. : Soient enfin $p \in \mathbb{Z}$ et $a \in \mathbb{A}rb(S, ar)$. On dit que :
1) a est *p-chargé* si $\forall j \in [la],\ \mathrm{sym}_j(a)$ est p-chargé.
2) a est *feuillu* si a est 0-chargé.

Remarques 2.23. : 1) $\forall a \in \mathbb{A}rb(S, ar), \forall j \in [la],\ \mathrm{ch}\ \mathrm{sym}_j^-(a) = \mathrm{ch}\ \mathrm{sym}_j(a)$.
2) $\forall c \in \mathrm{Cons}(S, ar),\ c(\varnothing)$ est feuillu.

Proposition 2.24. : Soit $a \in \mathbb{A}rb(S, ar)$ de la forme $a = s(a_o, ..., a_{n-1})$, où $n = ar(s) \geq 1$, on a :
1) $\mathrm{ch}_0\mathrm{sym}_j(a) = \mathrm{ch}(s)$.
2) $\forall k \in [\mathrm{h}_j a],\ k \geq 1 \ \Rightarrow\ \mathrm{ch}_k\mathrm{sym}_j(a) = \mathrm{ch}(s) + \mathrm{ch}_{k-1}\mathrm{sym}_{j-\hat{j_0}}(a_{j_0})$ (où l'entier $\hat{j_0}$ a été défini au 2.2).

Preuve : Immédiat.

Corollaire 2.25. : Sous les mêmes hypothèses,
1) on suppose que $\mathrm{ch}(s) = p$ et, pour tout $j \in [n]$, a_j est q-chargé, où $q \leq 0$. Alors a est $(p+q)$-chargé.
2) on suppose que $ch(s) = 0$ et, pour tout $j \in [n]$, a_j est feuillu. Alors a est feuillu.

Proposition 2.26. : Soient $a, b \in \mathbb{A}rb(S, ar)$ et $j \in [la]$. Posons $\hat{a} = \mathrm{Br}(a, j, b)$. Soit encore $k \in [l\hat{a}]$ et $i \in [\mathrm{h}_k\hat{a}]$. Alors :
1) Si $k < j$, $\mathrm{ch}_i\mathrm{sym}_k(\hat{a}) = \mathrm{ch}_i\mathrm{sym}_k(a)$,
2) Si $j \leq k < j + l(b)$,
- Si $i < \mathrm{h}_j(a) - 1$, $\mathrm{ch}_i\mathrm{sym}_k(\hat{a}) = \mathrm{ch}_i\mathrm{sym}_k(a)$,
- Si $\mathrm{h}_j(a) - 1 \leq i < \mathrm{h}_k(\hat{a})$, $\mathrm{ch}_i\mathrm{sym}_k(\hat{a}) = \mathrm{ch}\ \mathrm{sym}_j(a) + \mathrm{ch}_{i+1-\bar{j}}\mathrm{sym}_{k-j}(b)$ (où $\bar{j} = \mathrm{h}_j(a)$),
3) Si $j + l(b) \leq k < l(\hat{a})$, $\mathrm{ch}_i\mathrm{sym}_k(\hat{a}) = \mathrm{ch}_i\mathrm{sym}_{k+1-lb}(a)$.

Preuve : On utilise la proposition 2.10.

Proposition 2.27. : Soient $a, b \in \mathbb{A}rb(S, ar)$, $n = l(a)$ et $j \in [n]$. Soient aussi $(p_i)_{i \in [n]}$ une liste d'entiers de $\mathbb{Z}$ et $q \leq 0$. On suppose que b est q-chargé et que, pour tout $i \in [n]$, $\mathrm{sym}_i(a)$ est p_i-chargé. Alors si $\hat{a} = \mathrm{Br}(a, j, b)$, on a, pour tout $k \in [l\hat{a}]$:
- Si $k < j$, $\mathrm{sym}_k(\hat{a})$ est p_k-chargé.
- Si $j \leq k < j + l(b)$, $\mathrm{sym}_k(\hat{a})$ est $(p_j + q)$-chargé.
- Si $j + l(b) \leq k$, $\mathrm{sym}_k(\hat{a})$ est p_{k+1-lb}-chargé.

Preuve : On utilise la proposition précédente.

Proposition 2.28. : Soient $a, b_0, ..., b_{n-1} \in \mathbb{A}rb(S, ar)$, où $n = l(a)$. Soient aussi $p, q \in \mathbb{Z}$ tels que $q \leq 0$. On suppose que a est p-chargé et, pour tout $j \in [n]$, b_j est q-chargé. Alors $\mathrm{OP}(a, (b_o, ..., b_{n-1}))$ est $(p+q)$-chargé.

Preuve : Soit la liste $(\hat{a}^j)_{j \in [n+1]}$ définissant $\mathrm{OP}(a, (b_o, ..., b_{n-1}))$. On montre, par induction sur $j \in [n+1]$, en utilisant la proposition précédente, que $\hat{a}^j$ vérifie la propriété suivante : Pour tout $k \in [l\hat{a}^j]$,
- Si $k < n - j$, $\mathrm{sym}_k(\hat{a}^j)$ est p-chargé,
- Si $n - j \leq k$, $\mathrm{sym}_k(\hat{a}^j)$ est $(p+q)$-chargé.

Corollaire 2.29. : Soient $a, b_0, ..., b_{n-1} \in \mathbb{A}rb(S, ar)$, où $n = l(a)$. On suppose que a et $b_0, ..., b_{n-1}$, sont feuillus. Alors $\mathrm{OP}(a, (b_o, ..., b_{n-1}))$ est encore feuillu.

2.5 Langages relativement dimensionnels

Cette fois, pour aider à la compréhension de cette partie, nous vous renvoyons aux exemples de langages comme $S_{\mathbb{P}}$ et $S_{\mathbb{B}}$, donnés dans la deuxième partie, puis à la définition de la dimension d'un arbre.

Définition 2.30. : On appelle *langage relativement dimensionnel* la donnée d'un langage (S, ar) muni d'une famille d'applications
$\delta = (\delta(s) : \mathbb{N}^{ar(s)} \to \mathbb{N})_{s\in S}$.

Remarque 2.31. : Lorsque $c \in \mathrm{Cons}(S, ar)$, comme $\mathbb{N}^0 \simeq 1$, on identifie $\delta(c)$ à un entier que l'on note $\dim(c)$.

Notations 2.32. : 1) On construit une application $\dim : \mathbb{A}rb(S, ar) \to \mathbb{N}$ par induction sur la longueur des arbres. Soit $a \in \mathbb{A}rb(S, ar)$.
- Si $a = c(\varnothing)$, on pose $\dim(a) = \dim(c)$.
- Si $a = s(a_0, ..., a_{n-1})$, où $n \geq 1$, on pose
$\dim(a) = \delta(s)(\dim(a_0), ..., \dim(a_{n-1}))$.
2) On définit aussi une application $\overline{\dim} : \mathbb{A}rb(S, ar) \to Mo(\mathbb{N})$ où, pour tout $a \in \mathbb{A}rb(S, ar)$, si $\mathrm{cons}(a) = (c_o, ..., c_{n-1})$, on pose
$\overline{\dim}(a) = (\dim(c_o), ..., \dim(c_{n-1}))$. On pose encore, pour $j \in [n]$,
$\overline{\dim}_j(a) = \dim(c_j)$.

Proposition 2.33. : Soit $a \in \mathbb{A}rb(S, ar)$.
1) Si $a = s(a_0, ..., a_{n-1})$, alors :
$\overline{\dim}(a) = \overline{\dim}(a_0)...\overline{\dim}(a_{n-1})$.
2) Soient aussi $b_o, ..., b_{n-1} \in \mathbb{A}rb(S, ar)$, où $n = l(a)$. Alors :
$\overline{\dim}\,\mathrm{OP}(a, (b_o, ..., b_{n-1})) = \overline{\dim}(b_0)...\overline{\dim}(b_{n-1})$.

Preuve : Le (1) est immédiat. Le (2) résulte de la proposition 2.14.

Proposition 2.34. : Soit $a \in \mathbb{A}rb(S, ar)$. On pose $n = l(a)$.
1) Soient aussi $b \in \mathbb{A}rb(S, ar)$ et $j \in [n]$, alors, si $\overline{\dim}_j(a) = \dim(b)$, on a $\dim\mathrm{Br}(a, j, b) = \dim(a)$.
2) Soient maintenant $b_o, ..., b_{n-1} \in \mathbb{A}rb(S, ar)$. On suppose que
$\overline{\dim}(a) = (\dim(b_o), ..., \dim(b_{n-1}))$. Alors
$\dim\mathrm{OP}(a, (b_o, ..., b_{n-1})) = \dim(a)$.

Preuve : Le (1) se montre par induction sur $\mathrm{L}(a)$. Pour le (2), on considère la liste $(\hat{a}^j)_{j\in[n+1]}$ définissant $\mathrm{OP}(a,(b_o,...,b_{n-1}))$. On montre, par induction sur $j\in[n+1]$, que $\dim(\hat{a}^j)=\dim(a)$. Pour cela, on utilise la formule $\mathrm{cons}(\hat{a}^j)=A_{n-j}.B_{n-j}...B_{n-1}$ montrée dans la preuve de la proposition 2.14.

Définition 2.35. : On dit qu'un langage relativement dimensionnel (S,ar,δ) est *croissant* si :
Pour tout $s\in S$, (on note $n=ar(s)$), alors :

$$\forall(x_0,...,x_{n-1})\in\mathbb{N}^n,\forall j\in[n],\ x_j\leq\delta(s)(x_0,...,x_{n-1}).$$

Proposition 2.36. : Le langage (S,ar,δ) étant supposé croissant alors :
Pour tout $a\in\mathbb{A}rb(S,ar)$, si $(c_0,...,c_{n-1})=\mathrm{cons}(a)$, on a $\forall j\in[n]$, $\dim(c_j)\leq\dim(a)$.

Preuve : Par induction sur $\mathrm{L}(a)$.

3. La monade des arbres

Introduction : Chaque langage produit naturellement une monade concrète syntaxique et cartésienne à partir de laquelle on fabrique toutes les monades concrètes syntaxiques présentées ici. Cette monade est obtenue grâce à une opérade sur $\mathbb{M}o$ (la monade des monoïdes) qui est libre sur la collection (= le langage) de départ.

3.1 Variation des constantes

Conventions 3.1. : Fixons, cette fois, un langage a priori sans constante (S,ar) Alors, pour tout ensemble C, on pose $S(C)=S\coprod C$. Soient $u_0:S\to S(C)$ et $u_1:C\to S(C)$ les injections canoniques. On construit ensuite une application $ar:S(C)\to\mathbb{N}$, en posant $\forall s\in S$,
$ar.u_0(s)=ar(s)$ et $\forall c\in C,\ ar.u_1(c)=0$. On note alors pour simplifier $\mathrm{A}(C)=\mathbb{A}rb(S(C),ar)$.
Soit maintenant $f:C\to C'$ une application quelconque. On construit, par induction sur la longueur des arbres, une application

$\mathrm{A}(f) : \mathrm{A}(C) \to \mathrm{A}(C')$. Elle est définie, pour $a \in \mathrm{A}(C)$, par :
- Si $a = u_1(c)(\varnothing),\ \mathrm{A}(f)(a) = u_1.f(c)(\varnothing)$,
- Si $a = u_0(s)(a_0, ..., a_{n-1}),\ \mathrm{A}(f)(a) = u_0(s)(\mathrm{A}(f)(a_0), ..., \mathrm{A}(f)(a_{n-1}))$.

Remarques 3.2. : 1) Dans la suite, on identifie S à $u_0(S)$ et C à $u_1(C)$ et donc implicitement on suppose que $S \cap C = \varnothing$.
2) Au lieu de $\mathrm{A}(f)$ on écrit plutôt $\tilde{f}$.
3) Lorsque $a \in \mathrm{A}(C)$ on écrit maintenant $l_C(a) = \mathrm{cons}(a)$.

Proposition 3.3. : 1) $A(C)$ est fonctoriel en $C \in |\mathbb{E}ns|$. On construit ainsi un endofoncteur A de $\mathbb{E}ns$.
2) $l_C : \mathrm{A}(C) \to Mo(C)$ est naturel en C. On note $l : \mathrm{A} \to Mo$ cette transformation naturelle .

<u>*Preuve*</u> : (2) Par induction sur la longueur des arbres.

Proposition 3.4. : Soient $f : C \to C'$ une application et $a \in \mathrm{A}(C)$. Alors:
1) $\mathrm{L}\tilde{f}(a) = \mathrm{L}(a)$,
2) $l\tilde{f}(a) = l(a)$,
3) $\mathrm{h}\tilde{f}(a) = \mathrm{h}(a)$,
4) $\forall j \in [la],\ \mathrm{h}_j\tilde{f}(a) = \mathrm{h}_j(a)$.

<u>*Preuve*</u> : Par induction sur $\mathrm{L}(a)$.

Proposition 3.5. : Soient $f : C \to C'$ une application, $a \in \mathrm{A}(C)$ et $(c_o, ..., c_{n-1}) = l_C(a)$. Alors :
1) Si $\mathrm{L}(a) > 1,\ \mathrm{sym}\tilde{f}(a) = \mathrm{sym}(a)$,
2) $\forall j \in [n],\ \mathrm{sym}_j\tilde{f}(a) = \mathrm{sym}_j^-(a).(f(c_j))$.

<u>*Preuve*</u> : Par induction sur $\mathrm{L}(a)$.

Proposition 3.6. : Soient $f : C \to C'$ une application, $a \in \mathrm{A}(C)$ et $n = l(a)$.
1) Soient aussi $b \in \mathrm{A}(C)$ et $j \in [n]$, alors :
$\tilde{f}\mathrm{Br}(a, j, b) = \mathrm{Br}(\tilde{f}(a), j, \tilde{f}(b))$
2) Soient aussi $b_o, ..., b_{n-1} \in \mathrm{A}(C)$, alors :
$\tilde{f}\mathrm{OP}(a, (b_o, ..., b_{n-1})) = \mathrm{OP}(\tilde{f}a, (\tilde{f}b_o, ..., \tilde{f}b_{n-1}))$

Preuve : Pour le (1) par induction sur $\mathrm{L}(a)$. Pour le (2), notons $(\hat{a}^j)_{j\in[n+1]}$ et $(\hat{\alpha}^j)_{j\in[n+1]}$ les deux listes définissant $\mathrm{OP}(a,(b_o,...,b_{n-1}))$ et $\mathrm{OP}(\tilde{f}a,(\tilde{f}b_o,...,\tilde{f}b_{n-1}))$. On montre, par induction sur $j \in [n+1]$, en utilisant le (1), que $\hat{\alpha}^j = \tilde{f}(\hat{a}^j)$.

Proposition 3.7. : Soit $f : C' \to C$ une application injective, alors $\tilde{f} : A(C) \to A(C')$ est injective.

Preuve : Si $a_0, a_1 \in A(C)$ sont tels que $\tilde{f}(a_0) = \tilde{f}(a_1)$ alors $\mathrm{L}(a_0) = \mathrm{L}(a_1)$. On fait alors la suite de la preuve par induction sur $\mathrm{L}(a_0) = \mathrm{L}(a_1)$.

Notation 3.8. : Soit $C \in |\mathbb{E}ns|$. Considérons l'application $u_C : Mo(C) \to \mathcal{P}(C), (s_o,...,s_{n-1}) \mapsto \{s_o,...,s_{n-1}\}$. On note alors $l_{\{C\}}$ le composé $u_C.l_C : \mathrm{A}(C) \to \mathcal{P}(C)$.

Proposition 3.9. : Soit $f : C' \to C$ une application injective et $a \in \mathrm{A}(C)$. Si $l_{\{C\}}(a) \subset f(C')$, il existe un unique $a' \in \mathrm{A}(C')$ tel que $\tilde{f}(a') = a$.

Preuve : L'unicité de a' résulte de la proposition précédente. On montre l'existence par induction sur $\mathrm{L}(a)$.

3.2 L'opération op et la notation $a[-]$

Notations 3.10. : Notons $1 = \{0\}$, un objet final de $\mathbb{E}ns$. De plus, $C \in |\mathbb{E}ns|$ et $a \in \mathrm{A}(C)$ étant donnés, on note $\underline{a} = \tilde{!_C}(a)$. On a $\underline{a} \in \mathrm{A}(1)$.

Proposition 3.11. : Soient $a, a' \in \mathrm{A}(C)$. On suppose que $\underline{a} = \underline{a'}$ et $l_C(a) = l_C(a')$. Alors $a = a'$.

Preuve : On remarque déjà que $\mathrm{L}(a) = \mathrm{L}(a')$. La suite de la preuve se fait par induction sur $\mathrm{L}(a) = \mathrm{L}(a')$.

- Soit maintenant $C \in |\mathbb{E}ns|$. Posons $\overline{C} = C \coprod 1$ et considérons les injections canoniques $u : C \to \overline{C}$ et $v : 1 \to \overline{C}$. Ces injections en induisent de nouvelles : $\tilde{u} : \mathrm{A}(C) \to \mathrm{A}(\overline{C})$ et $\tilde{v} : \mathrm{A}(1) \to \mathrm{A}(\overline{C})$. Prenons ensuite $a \in \mathrm{A}(1)$ et $(b_o,...,b_{n-1})$ dans $\mathrm{A}(C)^n$, où $n = l(a)$, et considérons $\overline{a} = \mathrm{OP}(\tilde{v}a,(\tilde{u}b_o,...,\tilde{u}b_{n-1}))$. Comme $l_{\{C\}}(\overline{a})$ est dans $u(C)$, il existe un unique $\hat{a} \in \mathrm{A}(C)$ tel que $\tilde{u}(\hat{a}) = \overline{a}$ (voir la proposition 3.9).

Notation 3.12. : $\hat{a}$ est noté $\mathrm{op}(a,(b_o,...,b_{n-1}))$. On a
$\mathrm{op}(a,(b_o,...,b_{n-1})) \in \mathrm{A}(C)$

Proposition 3.13. : Soient $a \in \mathrm{A}(1)$, $n = l(a)$ et $(b_o,...,b_{n-1}) \in \mathrm{A}(C)^n$.
Alors :
1) $l\ \mathrm{op}(a,(b_o,...,b_{n-1})) = \sum_{x\in[n]} l(b_x)$,
2) $\mathrm{L}\ \mathrm{op}(a,(b_o,...,b_{n-1})) = \mathrm{L}(a) - l(a) + \sum_{x\in[n]} \mathrm{L}(b_x)$,
3) $l_C\mathrm{op}(a,(b_o,...,b_{n-1})) = l_C(b_0)...l_C(b_{n-1})$,
4) Pour tout application $f : C \to C'$ on a :
$\tilde{f}\ \mathrm{op}(a,(b_o,...,b_{n-1})) = \mathrm{op}(a,(\tilde{f}b_o,...,\tilde{f}b_{n-1}))$,
5) $\underline{\mathrm{op}(a,(b_o,...,b_{n-1}))} = \mathrm{op}(a,(\underline{b_o},...,\underline{b_{n-1}}))$.

Preuve : Les $(1),(2)$ et (3) résultent de la proposition 2.14. Pour le (4), on utilise la proposition 3.6. Le (5) est un cas particulier du (4).

Proposition 3.14. : Soient $a, b_o,...,b_{n-1} \in \mathrm{A}(C)$, où $n = l(a)$. Alors :

$$\mathrm{OP}(a,(b_o,...,b_{n-1})) = \mathrm{op}(\underline{a},(b_o,...,b_{n-1})).$$

Preuve : $u : C \to \overline{C}$ étant l'injection canonique, posons
$\alpha = \tilde{u}\ \mathrm{op}(\underline{a},(b_o,...,b_{n-1}))$ et $\beta = \tilde{u}\ \mathrm{OP}(a,(b_o,...,b_{n-1}))$, on montre que $\underline{\alpha} = \underline{\beta}$ et $l_{\overline{C}}(\alpha) = l_{\overline{C}}(\beta)$.

Proposition 3.15. : Soient $s \in S$ tel que $ar(s) = n \neq 0$. On pose
$\bar{s} = s(0(\varnothing),...,0(\varnothing))$. Alors, pour tout $(a_0,...,a_{n-1}) \in \mathrm{A}(C)^n$ on a
$\mathrm{op}(\bar{s},(a_o,...,a_{n-1})) = s(a_0,...,a_{n-1})$.

Preuve : Résulte de la proposition 2.17.

Notation 3.16. : Soient $a \in \mathrm{A}(1)$, $n = l(a)$ et $(c_o,...,c_{n-1}) \in C^n$. On pose :

$$a[c_o,...,c_{n-1}] = \mathrm{op}(a,(c_o(\varnothing),...,c_{n-1}(\varnothing))) \in \mathrm{A}(C).$$

Proposition 3.17. : 1) $\underline{a[c_o,...,c_{n-1}]} = a$.
2) $l_C a[c_o,...,c_{n-1}] = (c_o,...,c_{n-1})$.
3) $\underline{a}[l_C(a)] = a$.

Preuve : Sans difficulté.

Proposition 3.18. : La transformation naturelle $l : \mathrm{A} \to Mo$ est cartésienne.

Preuve : On le vérifie sur les flèches $!_C : C \to 1$. Soit $(\bar{c}, a)$ dans $Mo(C) \times \mathrm{A}(1)$ tel que $Mo(!_C)(\bar{c}) = l_1(a)$. Alors, si on pose $\bar{a} = a[\bar{c}]$, on a $l_C(\bar{a}) = \bar{c}$ et $\tilde{!}_C(\bar{a}) = a$. L'unicité de $\bar{a}$ résulte de la proposition 3.11.

Proposition 3.19. : Soient $f : C \to C'$ une application et $a \in \mathrm{A}(C)$, avec $n = l(a)$ et $(c_o, ..., c_{n-1}) \in C^n$. Alors
$\tilde{f}(a[c_o, ..., c_{n-1}]) = a[f(c_o), ..., f(c_{n-1})]$.

Preuve : Sans difficulté.

3.3 Opérade sur $\mathbb{M}o$

Convention 3.20. : $\mathbb{M}o = (Mo, \eta, \mu)$ désigne la monade "monoïde libre" sur $\mathbb{E}ns$. Cette monade est cartésienne. Rappelons (voir [8]) qu'une opérade sur $\mathbb{M}o$ est un quadruplet (Ω, π, e, m) où (Ω, π) est une collection sur $\mathbb{M}o$ (c.a.d. $\Omega \in |\mathbb{E}ns|$ et $\pi : \Omega \to Mo(1)$ une application où $Mo(1)$ est identifié à $\mathbb{N}$), $e \in \Omega$ et $m : \Omega^{(2)} \to \Omega$ est une application (où $\Omega^{(2)}$ est défini par : $\Omega^{(2)} = \{(s, (s_o, ..., s_{n-1})) \in \Omega \times Mo(\Omega) / \pi(s) = n\}$) vérifiant les axiomes suivants :
(Pos) $\pi(e) = 1$ et $\forall (s, (s_o, ..., s_{n-1})) \in \Omega^{(2)}$,
$\pi m(s, (s_o, ..., s_{n-1})) = \sum_{j \in [n]} \pi(s_j)$,
(Ug) $m(e, (s)) = s$,
(Ud) $m(s, (e, ..., e)) = s$, où $(e, ..., e)$ est une liste de longueur $\pi(s)$,
(Ass) $\forall s \in \Omega, \forall (s_o, ..., s_{n-1}) \in \Omega^n, \forall (\bar{s}_o, ..., \bar{s}_{n-1}) \in Mo(\Omega)^n$ tels que $n = \pi(s)$ et $\forall j \in [n]$, $\pi(s_j) = \mathrm{L}(\bar{s_j})$ alors :
$m(s, (m(s_0, \bar{s}_0), ..., m(s_{n-1}, \bar{s}_{n-1})) = m(m(s, (s_o, ..., s_{n-1})), \bar{s}_0 ... \bar{s}_{n-1})$.

Notations 3.21. : 1) Dans la suite de la sous-section on note :
$s(s_o, ..., s_{n-1}) = m(s, (s_o, ..., s_{n-1}))$.
2) Soit $(a, j, b) \in \Omega \times \mathbb{N} \times \Omega$ tel que $j \in [n]$ où $n = \pi(a)$. On pose $B(a, j, b) = a(b_o, ..., b_{n-1})$ où $\forall i \in [n]$, si $i \neq j$, $b_i = e$ et $b_j = b$.

Proposition 3.22. : La "loi" B vérifie les propriétés suivantes :
(Pos') $\forall a, b \in \Omega, \forall j \in [\pi a]$, $\pi B(a, j, b) = \pi(a) + \pi(b) - 1$, $\pi(e) = 1$,
(Ug') $\forall a \in \Omega$, $B(e, 0, a) = a$,
(Ud') $\forall a \in \Omega, \forall j \in [\pi a]$, $B(a, j, e) = a$,

(A_1) Pour tout $a, b, c \in \Omega$, pour tout $j, k \in \mathbb{N}$, tels que $k < j < \pi(a)$, on a : $B(B(a, j, b), k, c) = B(B(a, k, c)\ , j + \pi(c) - 1,\ b)$,
(A_2) $\forall a, b, c \in \Omega, \forall j \in [\pi a], \forall k \in [\pi b]$,
$B(a, j, B(b, k, c)) = B(B(a, j, b),\ j + k\ , c)$.

<u>Preuve</u> : Les trois premières propriétés se montrent sans difficulté.
Pour (A_1), on montre que $B(B(a, j, b), k, c) = a(d_o, ..., d_{n-1})$
$= B(B(a, k, c),\ j + \pi(c) - 1\ , b)$ où $d_i = e$ si $i \notin \{k, j\},\ d_k = c,\ d_j = b$.
Pour chaque égalité, on utilise l'axiome (Ass). Pour (A_2), on montre que $B(a, j, B(b, k, c)) = a(b_o(\bar{B}_0), ..., b_{n-1}(\bar{B}_{n-1})) = a(b_o, ..., b_{n-1})(\bar{B}_0 ... \bar{B}_{n-1})$
$= B(B(a, j, b),\ j + k\ , c)$ où, si $i \neq j$, $b_i = e,\ \bar{B}_i = (e)$ et $b_j = b$ et $\bar{B}_j = (c_o, ..., c_{m-1})$ avec $c_i = e$ si $i \neq k$ et $c_k = c$.

• On va maintenant procéder en sens inverse. Soit $B : D(\Omega, \pi) \to \Omega$, (où $D(\Omega, \pi) = \{(a, j, b) \in \Omega \times \mathbb{N} \times \Omega / j \in [\pi a]\}$), une application vérifiant les 5 axiomes $(Pos'), (Ud'), (Ug'), (A_1), (A_2)$ signalés à la proposition 3.22. Nous allons montrer qu'il existe une unique structure d'opérade sur Ω tel que B soit obtenu comme dans la notation 3.21.

Notation 3.23. : Donnons-nous $a, b_o, ..., b_{n-1} \in \Omega$ où $n = \pi(a)$. Pour définir $a(b_o, ..., b_{n-1})$ on construit d'abord une liste $(\hat{a}^j)_{j \in [n+1]}$ par induction sur $j \in [n+1]$ en posant $\hat{a}^0 = a$ et $\hat{a}^{j+1} = B(\hat{a}^j,\ n - j - 1\ , b_{n-j-1})$. Finalement on pose $a(b_o, ..., b_{n-1}) = \hat{a}^n$.

Proposition 3.24. : 1) $(Pos') \Rightarrow (Pos)$,
2) $(Ug') \Rightarrow (Ug)$,
3) (Ud') et $(Pos') \Rightarrow (Ud)$.

<u>Preuve</u> : Immédiat.

• Il reste maintenant à montrer l'axiome (Ass). Nous allons l'obtenir en plusieurs étapes présentées dans la proposition suivante.

Proposition 3.25. : Soient $a, c \in \Omega,\ n = \pi(a),\ (b_o, ..., b_{n-1}) \in \Omega^n$.
1) Soient aussi $k \in [n]$ et $j \in [\pi b_k]$. On pose $\hat{k} = \sum_{x \in [k]} \pi(b_x)$. Alors:
$a(b_o, ..., b_{k-1}, B(b_k, j, c), b_{k+1}, ..., b_{n-1}) = B(a(b_o, ..., b_{n-1}),\ j + \hat{k}\ , c)$.
2) $\forall p \in [n],\ B(a(e, ...e, b_{p+1}, ..., b_{n-1}), p, b_p) = a(e, ...e, b_p, ..., b_{n-1})$.

3) Pour tout $q \leq p < n$, on a :
$a(e,...e,b_p,...,b_{n-1})(e,...,e,b_q,...,b_{p-1},e,...,e) = a(e,...e,b_q,...,b_{n-1})$.
4) Soient en plus $j \in [n]$, $m = \pi(b_j)$ et $(c_o,...,c_{m-1}) \in \Omega^m$. Alors on a :
$a(b_o,...,b_{j-1},b_j(c_o,...,c_{m-1}),b_{j+1},...,b_{n-1}) = a(b_o,...,b_{n-1})(c'_o,...,c'_{\hat{n}-1})$ où la liste $(c'_i)_{i\in[\hat{n}]}$ est définie par : $c'_i = e$ si $m+\hat{k} \leq i < \hat{n}$, $c'_i = c_{i-\hat{k}}$ si $\hat{k} \leq i < m+\hat{k}$, $c'_i = e$ si $i < \hat{k}$.
5) Soit encore $(\bar{c}_o,...,\bar{c}_{n-1}) \in Mo(\Omega)^n$ tels que $\forall j \in [n],\ \pi(b_j) = \mathrm{L}(\bar{c}_j)$.
Alors : $a(b_0(\bar{c}_o),...,b_{n-1}(\bar{c}_{n-1})) = a(b_o,...,b_{n-1})(\bar{c}_o.....\bar{c}_{n-1})$.

Preuve : (1) Pour tout $i \in [n]$, posons $b'_i = b_i$ si $i \neq k$ et $b'_k = B(b_k,j,c)$. On construit ensuite les listes $(\hat{a}^j)_{j\in[n+1]}$ et $(\bar{a}^j)_{j\in[n+1]}$, en posant $\hat{a}^0 = \bar{a}^0 = a$, $\hat{a}^{i+1} = B(\hat{a}^i, n-i-1, b_{n-i-1})$ et
$\bar{a}^{i+1} = B(\bar{a}^i, n-i-1, b'_{n-i-1})$. On montre ensuite, par induction sur $i \in [n+1]$ que si $i < n-k$, $\bar{a}^i = \hat{a}^i$ et si $n-k \leq i \leq n$ alors $\bar{a}^i = B(\hat{a}^i, \bar{i}, c)$ où $\bar{i} = j+n-i+\sum_{x=n-k}^{i-1}\pi(b_{n-1-x})$.
(2) Après avoir considéré la liste $(b^p_i)_{i\in[n]}$ où $b^p_i = e$ si $i < p$ et $b^p_i = b_i$ si $i \geq p$ on construit la liste $(\hat{a}^j_p)_{j\in[n+1],p\in[n]}$ où $\hat{a}^0_p = a$ et
$\hat{a}^{j+1}_p = B(\hat{a}^j_p, n-j-1, b^p_{n-j-1})$. On montre ensuite que $\forall j$, $n-p \leq j \leq n$, $\hat{a}^j_p = \hat{a}^{n-p}_p$ et $\forall j \leq n-p-1$, $\hat{a}^j_p = \hat{a}^j_{p+1}$ Ainsi
$a(e,...e,b_p,...,b_{n-1}) = \hat{a}^{n-1}_p = \hat{a}^{n-p}_p = B(\hat{a}^{n-p-1}_p, p, b_p) = B(\hat{a}^{n-p-1}_{p+1}, p, b_p)$
$= B(\hat{a}^{n-1}_{p+1}, p, b_p) = B(a(e,...e,b_{p+1},...,b_{n-1}), p, b_p)$.
(3) Par induction sur $p-q$, en utilisant la proposition précédente.
(4) On considère les listes $(\hat{b}^i)_{i\in[m+1]}$ et $(\hat{d}^i)_{i\in[\hat{n}+1]}$ où $\hat{b}^0 = b_j$,
$\hat{d}^0 = a(b_o,...,b_{n-1})$, $\hat{b}^{i+1} = B(\hat{b}^i, m-i-1, c_{m-i-1})$,
$\hat{d}^{i+1} = B(\hat{d}^i, \hat{n}-i-1, c'_{\hat{n}-i-1})$. On montre, par induction sur i, que pour tout $i \in [\hat{n}]$,
- Si $i < \hat{n}-m-\hat{k}+1$, $\hat{d}^i = a(b_o,...,b_{n-1})$,
- Si $\hat{n}-m-\hat{k}+1 \leq i < \hat{n}-\hat{k}$, $\hat{d}^i = a(b_o,...,b_{j-1},\hat{b}^{m+i+\hat{k}-\hat{n}},b_{j+1},...,b_{n-1})$,
- Si $\hat{n}-\hat{k} \leq i < \hat{n}$, $\hat{d}^i = a(b_o,...,b_{j-1},b_j(c_o,...,c_{m-1}),b_{j+1},...,b_{n-1})$,
(5) Pour tout $j \in [n]$, écrivons $\bar{e}_j = (e,...,e)$ tel que $\mathrm{L}(\bar{e}_j) = \mathrm{L}(\bar{c})$. On montre par induction sur j, que
$a(b_0(\bar{c}_o),...,b_{j-1}(\bar{c}_{j-1}),b_j,...,b_{n-1})(\bar{e}_0,...,\bar{e}_{j-1},\bar{c}_j,...,\bar{c}_{n-1}) =$
$a(b_0(\bar{c}_o),...,b_{n-1}(\bar{c}_{n-1}))$, en utilisant les parties (3) et (4).

- Une collection (Ω,π) muni d'une fonction $B : D(\Omega,\pi) \to \Omega$ vérifiant les axiomes $(Pos'),(Ug'),(Ud'),(A_1),(A_2)$ définit une structure d'opérade

(Ω, π, e, m) où $m : \Omega^{(2)} \to \Omega$ est défini dans la notation 3.23. Notons la maintenant m_B. Inversement, notons B_m la fonction $D(\Omega, \pi) \to \Omega$ définie à partir de m (voir : notation 3.21).

Proposition 3.26. : On a $B_{m_B} = B$ et $m_{B_m} = m$.

Preuve : : L'identité : $B_{m_B} = B$ résulte de la proposition 3.25 (2). Pour l'autre identité, si on considère la liste $(\hat{a}^j)_{j \in [n+1]}$ définissant
$m_{B_m}(a, (b_o, ..., b_{n-1}))$ on montre que $\forall j \in [n+1]$,
$\hat{a}^j = a(e, ...e, b_{n-j}, ..., b_{n-1})$, par induction sur j.

- Ainsi donc, les deux applications $B \mapsto m_B$ et $m \mapsto B_m$ sont inverses l'une de l'autre.

3.4 L'opérade des arbres

Proposition 3.27. : $\underline{\mathbb{A}} = (A(1), l, e, \mathrm{op})$ a une structure d'opérade sur $\mathbb{M}o$, où $e = 0(\varnothing)$.

Preuve : On utilise la caractérisation des opérades sur $\mathbb{M}o$ donnée dans la sous-section précédente, en prenant $B = \mathrm{Br}$. Après avoir remarqué que sur $A(1)$ on a $\mathrm{OP} = \mathrm{op}$, on constate que les axiomes suivants sont satisfaits: (Pos'), voir la proposition 2.9 - (Ug'), par définition de Br - $(Ud'), (A_1)$ et (A_2) voir proposition 2.11.

Notations 3.28. : Désignons par $\mathbb{O}p$ la catégorie des opérades sur $\mathbb{M}o$ et $U : \mathbb{O}p \to \mathbb{C}oll = \mathbb{E}ns/\mathbb{N}$ le foncteur d'oubli évident.
Si maintenant $(S, ar) \in |\mathbb{C}oll|$, où $ar^{-1}(\{0\}) = \varnothing$, on considère l'application $\lambda : S \to A(1), s \mapsto s(0(\varnothing), ..., 0(\varnothing))$. λ est une flèche de $\mathbb{C}oll$.

Proposition 3.29. (voir [4] et [11]): Le couple $(\underline{\mathbb{A}}, \lambda)$ est un objet libre pour U.

Preuve : Soient $(\Omega, \pi, e, m) \in |\mathbb{O}p|$ et $\underline{f} : (S, ar) \to (\Omega, \pi)$ une flèche de $\mathbb{C}oll$. On construit une application $f : A(1) \to \Omega$ telle que
$\forall a \in A(1),\ \pi.f(a) = l(a)$, par induction sur la longueur des arbres.
- Si $\mathrm{L}(a) = 1$, on pose $f(a) = e$,
- Si $a = s(a_0, ..., a_{n-1})$, on pose $f(a) = m(\underline{f}(s), (fa_0, ..., fa_{n-1}))$.
Le reste de la preuve se vérifie facilement.

3.5 Complément sur la loi op

Proposition 3.30. : Soit $C \in |\mathbb{E}ns|$.
1) $\forall a \in A(C),\ \mathrm{op}(0(\varnothing),(a)) = a$.
2) $\forall \alpha \in A(1), \forall(\alpha_o,...,\alpha_{n-1}) \in A(1)^n, \forall(\bar{a}_o,...,\bar{a}_{n-1}) \in MoA(C)^n$,
$n = l(\alpha), \forall j \in [n],\ l(\alpha_j) = \mathrm{L}(\bar{a}_j) \implies$
$\mathrm{op}(\alpha,(\mathrm{op}(\alpha_0,\bar{a}_0),...,\mathrm{op}(\alpha_{n-1},\bar{a}_{n-1})) = \mathrm{op}(\mathrm{op}(\alpha,(\alpha_o,...,\alpha_{n-1})),\bar{a}_0...\bar{a}_{n-1})$.

Preuve : (1) On voit facilement que $\underline{\mathrm{op}(0(\varnothing),(a))} = \underline{a}$ et $l_C\mathrm{op}(0(\varnothing),(a)) = l_C(a)$ et donc $\mathrm{op}(0(\varnothing),(a)) = a$. (2) Résulte de l'associativité de l'opérade $\underline{\mathbb{A}}$.

Corollaire 3.31. : Soient $s \in S$ tel que $n = ar(s) \neq 0$, $(\alpha_o,...,\alpha_{n-1})$ dans $A(1)^n$ et $(\bar{a}_o,...,\bar{a}_{n-1}) \in MoA(C)^n$ tels que $\forall j \in [n],\ l(\alpha_j) = \mathrm{L}(\bar{a}_j)$, alors :
$s(\mathrm{op}(\alpha_0,\bar{a}_0),...,\mathrm{op}(\alpha_{n-1},\bar{a}_{n-1})) = \mathrm{op}(s(\alpha_o,...,\alpha_{n-1}),\bar{a}_0...\bar{a}_{n-1})$.

Proposition 3.32. : Soient $\alpha \in A(1)$, $n = l(\alpha)$ et $\bar{a},\bar{a}' \in A(C)^n$. Alors on a l'implication :

$$\mathrm{op}(\alpha,\bar{a}) = \mathrm{op}(\alpha,\bar{a}') \Longrightarrow \bar{a} = \bar{a}'.$$

Preuve : Par induction sur $\mathrm{L}(\alpha)$.

3.6 La monade $\mathbb{A}$

Notations 3.33. : Soit $C \in |\mathbb{E}ns|$.
1) On note $\eta_C : C \to A(C)$ l'application $c \mapsto c(\varnothing)$.
2) Si $A \in A^2(C) = A(A(C))$, on pose $\mu_C(A) = \mathrm{op}(\underline{A}, l_{AC}(A))$.

Remarques 3.34. : 1) On voit facilement que $\eta_C : C \to A(C)$ et $\mu_C : A^2(C) \to A(C)$ sont naturels en C.
2) Soit maintenant $\mathbb{A}' = (A', \eta', \mu')$ la monade associée à l'opérade $\underline{\mathbb{A}}$ sur $\mathbb{M}o$. On la décrit de façon suivante :
- Pour tout $C \in |\mathbb{E}ns|$, on a
$A'(C) = \{(a,\bar{c}) \in A(1) \times Mo(C) / l(a) = \mathrm{L}(\bar{c})\}$.
- Pour toute application $f : C \to C'$, $A'(f) : A'(C) \to A'(C')$,
$(a,\bar{c}) \mapsto (a, Mof(\bar{c}))$.
- $\eta'_C : C \to A'(C), c \mapsto (0(\varnothing),(c))$.

- Pour $\mu'_C : A'^2(C) \to A'(C)$, on a déjà
$A'^2(C) = \{(a, \bar{\alpha}) \in A(1) \times MoA'(C) \;/\; l_1(a) = Mo(!_{A'C})(\bar{\alpha})\}$. Alors, si on note $\pi_0 : A'(C) \to A(1)$, $\pi_1 : A'(C) \to Mo(C)$ les deux projections canoniques, on a :
$\forall (a, \bar{\alpha}) \in A'^2(C)$, $\mu'_C(a, \bar{\alpha}) = (\mathrm{op}(a, Mo(\pi_0)(\bar{\alpha})), \mu_C.Mo(\pi_1)(\bar{\alpha}))$.

Proposition 3.35. : On considère l'application $\kappa_C : A(C) \to A'(C)$,
$a \mapsto (\underline{a}, l_C(a))$ Alors :
1) $\kappa_C : A(C) \to A'(C)$ est naturel en C.
2) $\eta'_C = \kappa_C.\eta_C$ et $\mu'_C.\kappa^2_C = \kappa_C.\mu_C$.

Preuve : Le (1) est immédiat. Pour le (2), on vérifie que $\forall A \in A^2(C)$, $\kappa_C.\mu_C(A) = (u, v) = \mu'_C.\kappa^2_C(A)$ où $u = \mathrm{op}(\underline{A}, MoA'(!_C).l_{AC}(A))$ et $v = \mu_C.Mo(l_C).l_{AC}(A)$.

Proposition 3.36. : $\mathbb{A} = (A, \eta, \mu)$ est une monade sur $\mathbb{E}ns$ et $\kappa : \mathbb{A} \to \mathbb{A}'$ est un morphisme de monade.

Preuve : Ce résultat, très simple à vérifier, peut être vu comme une conséquence du lemme général suivant, que nous utiliserons à plusieurs reprises :

Lemme 3.37. : Soient $\mathbb{C}, \mathbb{C}'$ deux catégories, $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}'$ un foncteur, $\mathbb{M}' = (M', \eta', \mu')$ une monade sur $\mathbb{C}'$, M un endofoncteur de $\mathbb{C}$, $\eta : Id_{\mathbb{C}} \to M, \mu : M^2 \to M$ et $m : FM \to M'F$ des transformations naturelles. Toutes ces données doivent satisfaire les conditions suivantes :
1) F est fidèle,
2) Pour tout $C \in |\mathbb{C}|$, $m_C : FM(C) \to M'F(C)$ est un monomorphisme,
3) On a les identités : $\eta' F = m.F\eta$ et $m.F\mu = \mu' F.M'm.mM$,
alors $\mathbb{M} = (M, \eta, \mu)$ est une monade sur $\mathbb{C}$ et $(F, m) : (\mathbb{C}, \mathbb{M}) \to (\mathbb{C}', \mathbb{M}')$ est un morphisme entre catégories munies de monades.

Preuve : (du lemme) On montre que
$\forall C \in |\mathbb{C}|$, $m_C.F(\mu_C.\eta_{MC}) = m_C = m_C.F(\mu_C.M\eta_C)$ et $m_C.F(\mu_C.\mu_{MC})$ $= \mu'_{FC}.M'\mu'_{FC}.M'^2 m_C.M'm_{MC}.m_{M^2C} = m_C.F(\mu_C.M\mu_C)$.

Preuve : (de la proposition) Ici $\mathbb{C} = \mathbb{C}' = \mathbb{E}$, $F = Id$, $\mathbb{M}' = \mathbb{A}'$, $m = \kappa$ et $\mathbb{M} = \mathbb{A}$.

Proposition 3.38. : 1) La transformation naturelle $l : A \to Mo$ est un morphisme de monades $\mathbb{A} \to \mathbb{M}o$.
2) $\mathbb{A} = (A, \eta, \mu)$ est une monade cartésienne.

Preuve : (1) On considère la transformation naturelle $\pi' : A' \to Mo$ définie par $\pi'_C(a, \bar{c}) = \bar{c}$. On vérifie facilement que $\pi' : \mathbb{A}' \to \mathbb{M}o$ est un morphisme de monade. Alors, comme $l = \pi'.\kappa$ c'est aussi un morphisme de monade.
(2) $\mathbb{M}o$ étant une monade cartésienne et $l : \mathbb{A} \to \mathbb{M}o$ étant un morphisme de monade qui est cartésien, $\mathbb{A}$ est aussi une monade cartésienne.

Proposition 3.39. : Soit $C \in |\mathbb{E}ns|$, alors :
1) $\forall a \in A(C),\ \mu_C(a(\varnothing)) = a$,
2) Pour tout $s \in S$ et tout $(A_0, ..., A_{n-1}) \in A^2(C)^n$ tels que $ar(s) = n \neq 0$, on a :

$$\mu_C(s(A_0, ..., A_{n-1})) = s(\mu_C A_0, ..., \mu_C A_{n-1}),$$

3) Pour tout $a \in A(1)$ et $(b_o, ..., b_{n-1}) \in A(C)^n$ tels que $n = l(a)$, on a :

$$\mu_C(a[b_o, ..., b_{n-1}]) = \mathrm{op}(a, (b_o, ..., b_{n-1})).$$

Preuve : Le (1) est immédiat. Le (2) résulte de la proposition 3.31. Le (3) se montre sans difficulté.

Proposition 3.40. : $\mathbb{A}$ est une monade concrète syntaxique, où $U = Id_{\mathbb{E}ns}$ et où $\forall C \in |\mathbb{E}ns|, \forall a \in A(C), L_C(a) = \mathrm{L}(a)$.

Preuve : Pour $(MS0), (MS1)$ et $(MS'1)$ c'est immédiat. $(MS2)$ et $(MS'2)$ se vérifient par induction sur la longueur des arbres. $(MS3)$ résulte de la proposition 3.32.

Proposition 3.41. : 1) Soient $a, b \in A(1),\ n = l(a)$. Alors :

$$a \underset{\mathbb{A}}{\leq} b \iff \exists!(b_o, ..., b_{n-1}) \in A(1)^n,\ b = \mathrm{op}(a, (b_o, ..., b_{n-1})).$$

(pour la notation "$\underset{\mathbb{A}}{\leq}$" voir 1.13).
2) Soit $a \in A(1)$ tel que $\mathrm{L}(a) > 1$. Alors a est primitif ssi $\exists s \in S,\ ar(s) \geq 1$ et $a = \bar{s}$ (où $\bar{s} = s(0(\varnothing), ..., 0(\varnothing))$).

Preuve : (1) On considère $B = a[b_o, ..., b_{n-1}] \in A^2(1)$ et on utilise la proposition précédente.
(2)($\Leftarrow$) Par induction sur la longueur de a.
($\Rightarrow$) Comme $\mathrm{L}(a) > 1$, a s'écrit $a = s(a_0, ..., a_{n-1})$. On prend alors $A = s(a_0(\varnothing), ..., a_{n-1}(\varnothing))$. On a $A \in A^2(1)$ et $\mu_1(A) = a$. La fin de la preuve est sans difficulté.

Proposition 3.42. : La monade $\mathbb{A}$ est pure.

Preuve : Résulte de la proposition précédente et de la proposition 3.15 .

4. Antériorité

Introduction : Dans la section suivante on donnera un théorème de décomposition canonique des arbres feuillus. Pour démontrer ce théorème l'outillage introduit aux sections 2 et 3 ne suffit pas. Nous consacrerons donc cette section à combler les lacunes des deux sections précédentes. Un des ingrédiant essentiel de cette section est la codification d'une branche d'arbre.

4.1 Trois relations d'ordre sur les listes

4.1.1 La relation $\ll$

Notation 4.1. : Soit S un ensemble fixé. Alors, pour tout $\bar{s}, \bar{s}' \in Mo(S)$ on note $\bar{s} \ll \bar{s}'$, s'il existe $\bar{s}" \in Mo(S)$ tel que $\bar{s}' = \bar{s}.\bar{s}"$.

Proposition 4.2. : Soient $\bar{s}, \bar{s}' \in Mo(S)$, alors :
1) $\bar{s} \ll \bar{s}' \;\Rightarrow\; \mathrm{L}(\bar{s}) \leq \mathrm{L}(\bar{s}')$,
2) $\bar{s} \ll \bar{s}'$ et $\mathrm{L}(\bar{s}) = \mathrm{L}(\bar{s}') \;\Rightarrow\; \bar{s} = \bar{s}'$,
3) Soit encore $\bar{s}" \in Mo(S)$ tel que $\bar{s} \ll \bar{s}"$ et $\bar{s}' \ll \bar{s}"$, alors $\bar{s} \ll \bar{s}'$ ou $\bar{s}' \ll \bar{s}$.

Preuve : Immédiat .

Proposition 4.3. : $\ll$ est une relation d'ordre sur $Mo(S)$.

Preuve : Immédiat.

Notation 4.4. : Soient $\bar{s} = (s_o, ..., s_{n-1}) \in Mo(S)$ et $1 \leq m \leq n$. On pose $\mathrm{sec}_m(\bar{s}) = (s_o, ..., s_{m-1})$.

Proposition 4.5. : Soient $\bar{s}, \bar{s}' \in Mo(S)$, $n = \mathrm{L}(\bar{s})$, $n' = \mathrm{L}(\bar{s}')$. Alors :
$\bar{s} \ll \bar{s}' \iff n \leq n'$ et $\bar{s} = \mathrm{sec}_n(\bar{s}')$.

Preuve : Sans difficulté.

4.1.2 La relation $\leq$

Soit E un ensemble. Commençons par faire opérer le monoïde $Mo(E)$ sur $E^{\mathbb{N}}$ par la loi de composition $Mo(E) \times E^{\mathbb{N}} \to E^{\mathbb{N}}$: $(\bar{x}, \hat{y}) \mapsto \bar{x}.\hat{y}$ où, pour $\bar{x} = (x_i)_{i\in[n]}$ et $\hat{y} = (y_j)_{j\in\mathbb{N}}$, alors $\bar{x}.\hat{y} = (y'_j)_{j\in\mathbb{N}}$ où :
- si $j < n$, $y'_j = x_j$ - si $n \leq j$, $y'_j = y_{j-n}$.
Soit maintenant $\tilde{Mo}(\mathbb{N}) \subset \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ définie, pour $\hat{x} = (x_j)_{j\in\mathbb{N}} \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$, par :
(1) $\exists j \in \mathbb{N},\ x_j = -1$,
(2) $\forall j, j' \in \mathbb{N},\ j \leq j'$ et $x_j < 0 \ \Rightarrow\ x_{j'} = -1$.
Ensuite, soit $\phi : Mo(\mathbb{N}) \to \mathbb{Z}^{\mathbb{N}},\ \bar{x} \mapsto \bar{x}.\mu$ (où μ est la suite constante sur -1).

Proposition 4.6. : 1) ϕ est injective.
2) $\phi(Mo(\mathbb{N})) = \tilde{Mo}(\mathbb{N})$.

Preuve : Sans difficulté.

On considère enfin la relation d'ordre lexicographique, notée $\leq$ sur $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$. C'est une relation d'ordre total sur $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$. On munit $\tilde{Mo}(\mathbb{N})$ de l'ordre induit.

4.1.3 La relation $\bar{\leq}$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On munit $\mathbb{N}^n$ de l'ordre produit noté $\bar{\leq}$. Donc

$$(m_j)_{j\in[n]} \mathrel{\bar{\leq}} (m'_j)_{j\in[n]} \iff \forall j \in [n],\ m_j \leq m'_j.$$

Notation 4.7. : Soit $\bar{m} = (m_j)_{j\in[n]} \in \mathbb{N}^n$. On pose $\Sigma(\bar{m}) = \sum_{j\in[n]} m_j$.

Proposition 4.8. : 1) $\forall\ \bar{m}, \bar{m}' \in \mathbb{N}^n,\ \bar{m} \mathrel{\bar{\leq}} \bar{m}' \ \Rightarrow\ \Sigma(\bar{m}) \leq \Sigma(\bar{m}')$.
2) $\forall\ \bar{m}, \bar{m}' \in \mathbb{N}^n,\ \bar{m} \mathrel{\bar{\leq}} \bar{m}'$ et $\Sigma(\bar{m}) = \Sigma(\bar{m}') \Rightarrow \bar{m} = \bar{m}'$.

Preuve : Immédiat.

4.2 Les surjections croissantes $q_{(a,b)}$

Soit $\bar{n} = (n_j)_{j\in[m]} \in (\mathbb{N}^*)^m$. On considère l'application $s : [m] \to \mathbb{N}$ définie pour chaque $j \in [m]$ par $s(0) = 0$ et si $j > 0,\ s(j) = \sum_{x\in[j]} n_x$. s est strictement croissante. On construit maintenant une nouvelle application $q : [s(m)] \to \mathbb{N}$ en posant $q(j) = \sup\{i \in [m]/s(i) \leq j\}$. Alors $Im(q) \subset [m]$ et $\forall j \in [s(m)],\ s.q(j) \leq j < s(q(j)+1)$.

Proposition 4.9. : 1) $[m]$ et $[s(m)]$ étant naturellement ordonnés, on les voit comme des catégories. Alors, $q : [s(m)] \to [m]$ est l'adjoint à droite de $s : [m] \to [s(m)]$.
2) $q : [s(m)] \to [m]$ est une application croissante telle que $q.s = Id_{[m]}$ (elle est donc surjective).

Preuve : Immédiat.

Notations 4.10. : On note $s_{\bar{n}} = s$ et $q_{\bar{n}} = q$.

Soient maintenant $a, b \in A(1)$ tels que $a \leq b$ (pour la notation $\leq$ voir 1.13). Posons $n = l(a)$. Alors $\exists!(b_o, ..., b_{n-1}) \in A(1)^n$, $b = \mathrm{op}(a, (b_o, ..., b_{n-1}))$ (voir proposition 3.41). Posons encore $\forall j \in [n],\ \beta_j = l(b_j)$ et $\bar{\beta} = (\beta_j)_{j\in[n]}$.

Notations 4.11. : Dans la suite on note $s_{(a,b)} = s_{\bar{\beta}}$ et $q_{(a,b)} = q_{\bar{\beta}}$.

Ainsi $s_{(a,b)} : [la] \to [lb]$ et $q_{(a,b)} : [lb] \to [la]$ sont des applications croissantes où $s_{(a,b)}$ est l'adjoint à gauche de $q_{(a,b)}$ et tels que $q_{(a,b)}.s_{(a,b)} = Id_{[la]}$.

Proposition 4.12. : 1) $\forall\ a \in A(1),\ s_{(a,a)} = Id$ et $q_{(a,a)} = Id$.
2) $\forall\ a, b, c \in A(1),\ a \leq b \leq c\ \Rightarrow\ s_{(a,c)} = s_{(b,c)}.s_{(a,b)}$ et $q_{(a,c)} = q_{(a,b)}.q_{(b,c)}$.

Preuve : (1) Immédiat.
(2) Ecrivons $b = \mathrm{op}(a, (b_o, ..., b_{n-1}))$ et $c = \mathrm{op}(b, (c_o, ..., c_{sn-1}))$. Pour chaque $i \in [n]$, posons $\bar{c}_i = (c_{si}, ..., c_{s(i+1)-1})$. Alors, grâce à la proposition 3.30, on a $c = \mathrm{op}(\mathrm{op}(a, (b_o, ..., b_{n-1})), \bar{c}_0 ... \bar{c}_{n-1}) =$ $\mathrm{op}(a, (\mathrm{op}(b_0, \bar{c}_0), ..., \mathrm{op}(b_{n-1}, \bar{c}_{n-1})))$. On pose $s = s_{(a,b)}$ et $s' = s_{(b,c)}$ et $\sigma = s_{(a,c)}$. Alors $\forall i \in [la], \sigma(i) = \sum_{x\in[i]} l\ \mathrm{op}(b_x, \bar{c}_x)$ et $\forall x \in [i], l\ \mathrm{op}(b_x, \bar{c}_x) = s'.s(x+1) - s'.s(x)$. Ainsi $\sigma = s'.s$. L'autre identité est obtenue par adjonction à droite.

Remarque 4.13. : Les applications s et q ne font que clarifier la construction des $\hat{i}$ et j_0 donnés dans 2.2.

4.3 Codification d'une branche d'arbre

Notations et définitions 4.14. : Soient $a \in A(C),\ n = l(a)$ et $j \in [n]$. On construit $\mathrm{cod}_j^-(a) \in Mo(\mathbb{N})$ par induction sur $\mathrm{L}(a)$.
- Si $a = c(\varnothing)$, où $c \in C$ (alors $n = 1$ et $j = 0$). Dans ce cas on pose $\mathrm{cod}_0^-(a) = ()$ (la liste vide).
- Si $a = s(a_0, ..., a_{m-1})$, où $m = ar(s) \geq 1$, commençons par noter, pour $i \in [m]$, $\hat{i} = \sum_{x \in [i]} l(a_x)$, puis on considérons l'unique $j_0 \in [n]$ tel que $\hat{j_0} \leq j < \widehat{j_0 + 1}$ (Remarque : En fait $\hat{i} = s_{\bar{\beta}}(i)$ et $j_0 = q_{\bar{\beta}}(j)$ où $\bar{\beta} = (l(a_0), ..., l(a_{m-1})))$. On pose :

$$\mathrm{cod}_j^-(a) = (j_0).\mathrm{cod}_{j-\hat{j_0}}^-(a_{j_0}).$$

On pose ensuite $\mathrm{cod}_j(a) = (0).\mathrm{cod}_j^-(a)$.
$\mathrm{cod}_j(a)$ est appelée la *codification de la j^e branche de a.*

Exemple 4.15. Dans l'éxemple concret de la section 2 (voir 2.6), on vérifie que : $\mathrm{cod}_0(a) = (0,0,0,0),\ \mathrm{cod}_1(a) = (0,0,1,0),\ \mathrm{cod}_2(a) = (0,1,0),$ $\mathrm{cod}_3(a) = (0,2,0,0),\ \mathrm{cod}_4(a) = (0,2,0,1,0),\ \mathrm{cod}_5(a) = (0,2,0,2),$ $\mathrm{cod}_6(a) = (0,2,1).$

Proposition 4.16. : $\forall\, a \in A(C), \forall\, j \in [la],\ \mathrm{L}\,\mathrm{cod}_j(a) = h_j(a).$

<u>*Preuve*</u> : Par induction sur $\mathrm{L}(a)$.

Proposition 4.17. : Soient $a, b \in A(1),\ j \in [la],\ \hat{a} = \mathrm{Br}(a, j, b)$ et $k \in [l\hat{a}]$. Alors :
- si $k < j,\ \mathrm{cod}_k(\hat{a}) = \mathrm{cod}_k(a),$
- si $j \leq k < j + l(b),\ \mathrm{cod}_k(\hat{a}) = \mathrm{cod}_j(a).\mathrm{cod}_{k-j}^-(b),$
- si $j + l(b) \leq k < l(\hat{a}),\ \mathrm{cod}_k(\hat{a}) = \mathrm{cod}_{k+1-lb}(a).$

<u>*Preuve*</u> : On s'inspire de la preuve de la proposition 2.10 (3).

Proposition 4.18. : Soient $a \in A(C)$ et $j \in [la]$. Posons aussi $m = h_j(a)$. On écrit $\mathrm{sym}_j(a) = (s_o^j, ..., s_{m-1}^j)$ et $\mathrm{cod}_j(a) = (p_o^j, ..., p_{m-1}^j)$. Alors

$$\forall\, i \in [m-1],\ p_{i+1}^j \in [ar(s_i^j)].$$

<u>*Preuve*</u> : Par induction sur $\mathrm{L}(a)$.

Proposition 4.19. : Soient $a \in A(C)$ et $i, j \in [la]$. On a l'implication :

$$\mathrm{cod}_i(a) \ll \mathrm{cod}_j(a) \;\Rightarrow\; i = j.$$

Preuve : Par induction sur $\mathrm{L}(a)$.

Proposition 4.20. : Soient $a \in A(1)$, $i, j \in [la]$ et $n \in \mathbb{N}$ tels que $n \leq \inf\{\mathrm{h}_i(a), \mathrm{h}_j(a)\}$. Alors on a l'implication :

$$\mathrm{sec}_n\mathrm{cod}_i(a) = \mathrm{sec}_n\mathrm{cod}_j(a) \;\Rightarrow\; \mathrm{sec}_n\mathrm{sym}_i(a) = \mathrm{sec}_n\mathrm{sym}_j(a).$$

Preuve : Par induction sur $\mathrm{L}(a)$.

Proposition 4.21. : Soient $a \in A(1)$. Ecrivons, pour tout $j \in [la]$: $\mathrm{cod}_j(a) = (p_o^j, ..., p_{m-1}^j)$, $\mathrm{sym}_j(a) = (s_o^j, ..., s_{m-1}^j)$, où $m = \mathrm{h}_j(a)$. Alors $\forall i \in [m-1], \forall u \in [ar(s_i^j)], \exists k \in [la],\ (p_o^j, ..., p_i^j, u) \ll \mathrm{cod}_k(a)$.

Preuve : Par induction sur $\mathrm{L}(a)$. Lorsque $a = s(a_0, ..., a_{n-1})$, pour tout $i \in [n]$ notons $\hat{i} = \sum_{x \in [i]} l(a_x)$ et $j_0 \in [n]$ tel que $\hat{j_0} \leq j < \widehat{j_0 + 1}$. Prenons maintenant $i \in [m-1]$ et $u \in [ar(s_i^j)]$.
- Si $i = 0$, on pose $k = \hat{u}$. Alors $(p_0^j, u) = (0, u) \ll \mathrm{cod}_k(a)$.
- Si $i \geq 1$, par hypothèse d'induction, il existe $k' \in [la_{j_0}]$ tel que $(0, p_2^j, ..., p_i^j, u) \ll \mathrm{cod}_{k'}(a_{j_0})$. On pose alors $k = \hat{j_0} + k'$ et on vérifie que $k \in [la]$ et que $(p_o^j, ..., p_i^j, u) \ll \mathrm{cod}_k(a)$.

4.4 Antécédents d'une liste

Notation 4.22. : Soient $a \in A(C)$ et $j \in [la]$. On considère la bijection $\phi : Mo(\mathbb{N}) \to \tilde{M}o(\mathbb{N})$ définie au 4.1.2, et on pose $\mathrm{Cod}_j^-(a) = \phi(\mathrm{cod}_j^-(a))$ et $\mathrm{Cod}_j(a) = \phi(\mathrm{cod}_j(a))$.

Remarque 4.23. : 1) On a $\mathrm{Cod}_j(a) = (0).\mathrm{Cod}_j^-(a)$.
2) - Si $a = c(\varnothing)$, où $c \in C$, alors $\mathrm{Cod}_j^-(a) = \mu$ (voir la notation au 4.1.2).
- Si $a = s(a_0, ..., a_{n-1})$, où $n = ar(s) \geq 1$, on a $\mathrm{Cod}_j^-(a) = (j_0).\mathrm{Cod}_{j-\hat{j_0}}^-(a_{j_0})$ (où $\hat{j_0}$ est défini au 4.14) .

Proposition 4.24. : Soit $a \in A(C)$. Alors :

$$\forall i, j \in [la],\ i < j \;\Rightarrow\; \mathrm{Cod}_i(a) < \mathrm{Cod}_j(a).$$

où "$<$" est l'ordre strict lexicographique sur $\tilde{M}o(\mathbb{N})$.

Preuve : Par induction sur $\mathrm{L}(a)$.

Notations et définitions 4.25. : Soient $a \in A(C)$, $p \in \mathbb{N}$ et $\bar{n} = (n_o, ..., n_{p-1}) \in \mathbb{N}^p$. On pose :

$$\mathrm{Ant}_p(\bar{n}) = \{j \in [la] / \ \mathrm{sec}_p\mathrm{Cod}_j(a) = \bar{n}\}.$$

Les éléments de $\mathrm{Ant}_p(\bar{n})$ sont appelés les *antécédents de la liste* $\bar{n}$.

Proposition 4.26. : 1) $\mathrm{Ant}_p(\bar{n})$ est un intervalle de $[la]$.
2) $\mathrm{Ant}_p(\bar{n}) = \{j \in [la] / \ p \leq \mathrm{h}_j(a), \ \mathrm{sec}_p\mathrm{cod}_j(a) = \bar{n}\}$.

Preuve : (1) Résulte de la proposition précédente.
(2) Sans difficulté .

4.5 Propriétés spécifiques de l'antériorité

Proposition 4.27. : Soient $a, b \in A(1)$ tels que $a \leq b$. On note $q = q_{(a,b)}$ (voir 4.11). Alors $\forall k \in [lb]$, $\mathrm{sym}'_{qk}(a) \ll \mathrm{sym}'_k(b)$ et $\mathrm{cod}_{qk}(a) \ll \mathrm{cod}_k(b)$.

Preuve : La première inégalité résulte de la proposition 2.15. Pour la seconde inégalité...
a) on commence par la montrer, pour b de la forme $\mathrm{Br}(a, j, c)$, en utilisant la proposition 4.17.
b) Dans le cas général, on écrit $b = \mathrm{op}(a, (b_o, ..., b_{n-1}))$, que l'on obtient avec la liste $(\hat{a}^j)_{j \in [n+1]}$. Alors $a = \hat{a}^0 \leq \hat{a}^1 \leq ... \leq \hat{a}^n = b$. On obtient donc l'inégalité cherchée grâce au (a) et à la proposition 4.3.

Proposition 4.28. : Soient $a, b \in A(C)$ et $m \in \mathbb{N}$. On suppose que :
1) $l(a) = l(b) = m$, 2) $\forall j \in [m]$, $\mathrm{sym}_j(a) = \mathrm{sym}_j(b)$, 3) $\forall j \in [m]$, $\mathrm{cod}_j(a) = \mathrm{cod}_j(b)$. Alors $a = b$.

Preuve : Par induction sur $\mathrm{L}(a)$. Lorsque $\mathrm{L}(a) > 1$, on a aussi $\mathrm{L}(b) > 1$. On écrit $a = s(a_0, ..., a_{n-1})$ et $b = s'(a'_0, ..., a'_{n'-1})$. Pour $i \in [n]$ et $i' \in [n']$, écrivons $\hat{i} = \sum_{x \in [i]} l(a_x)$ et $\check{i}' = \sum_{x \in [i']} l(a'_x)$. Soient $j \in [m]$, $i \in [n]$ et $i' \in [n']$ tels que $\hat{i} \leq j < \widehat{i+1}$ et $\check{i}' \leq j < (i'+1)^{\vee}$. On a $(s).\mathrm{sym}_{j-\hat{i}}(a_i) = (s').\mathrm{sym}_{j-\check{i}'}(a'_{i'})$. Donc $s = s'$, $n = n'$. Deplus

$(i).\mathrm{cod}^-_{j-\hat{i}}(a_i) = (i').\mathrm{cod}^-_{j-\check{i'}}(a'_{i'})$. Donc $i = i'$. On vérifie ensuite que $l(a_0) = l(a'_0)$ (On l'obtient en montrant que $l(a_0) > l(a'_0)$ puis $l(a'_0) > l(a_0)$ sont impossibles, en utilisant un j approprié). Puis on considère $u = \sup\{k \in [n]/\ l(a_k) = l(a'_k)\}$ et on montre de même que $l(a_{u+1}) \neq l(a'_{u+1})$ est impossible. Donc $u = n-1$. Ainsi $\forall i \in [n]$, $l(a_i) = l(a'_i) \Rightarrow \forall i \in [n],\ \hat{i} = \check{i}$. On en déduit alors, par hypothèse d'induction, que $a_i = a'_i$. Ceci étant vrai pour tout $i \in [n]$, on obtient $a = a'$.

Proposition 4.29. : Soient $a, b \in A(1)$ et $f, f' : [lb] \to [la]$ deux applications telles que $\forall j \in [lb],\ \mathrm{cod}_{fj}(a) \ll \mathrm{cod}_j(b)$ et $\mathrm{cod}_{f'j}(a) \ll \mathrm{cod}_j(b)$. Alors $f = f'$.

<u>*Preuve*</u> : Cela résulte de la proposition 4.2 et de la proposition 4.19.

4.6 Caractérisation de l'antériorité

Notation 4.30. : Soient $a, b \in A(1)$. On écrit $a \tilde{<} b$ s'il existe une surjection croissante $f : [lb] \to [la]$, telle que $\forall j \in [lb],\ \mathrm{sym}^-_{fj}(a) \ll \mathrm{sym}^-_j(b)$ et $\mathrm{cod}_{fj}(a) \ll \mathrm{cod}_j(b)$.

Remarque 4.31. : 1) On a vu au 4.27 que $a \leq b \Rightarrow a \tilde{<} b$.
2) Dans la définition de $\tilde{<}$ la surjection f est unique, grâce la proposition 4.29.
3) Si $a \tilde{<} b$, alors $l(a) \leq l(b)$.

Proposition 4.32. : $\tilde{<}$ est une relation d'ordre sur $A(1)$.

<u>*Preuve*</u> : L'anti-symétrie résulte de la proposition 4.28. Le reste de la preuve se fait sans difficulté.

Proposition 4.33. : Soient $a, b \in A(1)$ tels que $a \tilde{<} b$. Notons $q : [lb] \to [la]$ la surjection croissante canonique. On suppose qu'il existe $j \in [lb]$ tel que $\mathrm{h}_{qj}(a) < \mathrm{h}_j(b)$. Ecrivons $\mathrm{sym}_j(b) = (s^j_o, ..., s^j_{m_j-1})$, où $m_j = \mathrm{h}_j(b)$ et posons $a' = \mathrm{Br}(a, q(j), \bar{s})$, où rappelons le, $\bar{s} = s(0(\varnothing), ..., 0(\varnothing))$ avec $s = s^j_{m-1}$ pour $m = \mathrm{h}_{qj}(a)$. Alors $a' \tilde{<} b$.

Preuve : Notons déjà $I = \mathrm{Ant}_m \mathrm{cod}_{qj}(a)$. Alors $j \in I$. Posons $j_0 = \inf(I)$ et $j_1 = \sup(I)$. Pour chaque $u \in [ar(s)]$, posons ensuite $I_u = \mathrm{Ant}_{m+1}(\mathrm{cod}_{qj}(a).(u))$ Alors, les ensembles I_u ainsi que I sont des intervalles de $[lb]$. On a $\forall u \in [ar(s)],\ I_u \neq \varnothing$ et $\bigcup_{u\in[ar(s)]} I_u = I$ et $\forall u, u' \in [ar(s)],\ u \neq u' \Rightarrow I_u \cap I_{u'} = \varnothing$. On considère ensuite l'application $f : [lb] \to [la']$ définie pour $i \in [lb]$ par :
- si $i < j_0,\ f(i) = q(i)$,
- si $j_0 \leq i \leq j_1,\ f(i) = q(j) + u$ (où u est l'unique élément de $[ar(s)]$ tel que $i \in I_u$),
- si $j_1 < i < l(b),\ f(i) = q(i) + ar(s) - 1$.

On montre que f est une surjection croissante, puis qu'elle vérifie :
$\forall i \in [lb],\ \mathrm{sym}^-_{fi}(a') \ll \mathrm{sym}^-_i(b)$ et $\mathrm{cod}_{fi}(a') \ll \mathrm{cod}_i(b)$. Ainsi $a' \tilde{<} b$.

Notation 4.34. : Soient $a, b \in A(1)$ tels que $a \tilde{<} b$ et $f : [lb] \to [la]$ la surjection croissante canonique. Posons $N(a) = \sum_{j\in[lb]} \mathrm{h}_{fj}(a)$.

Proposition 4.35. : 1) $N(a) \leq N(b)$.
2) Si $N(a) = N(b)$ alors $a = b$.

Preuve : Pour le (2), on montre que $\forall j \in [lb],\ \mathrm{h}_j(b) = \mathrm{h}_{fj}(a)$, puis que $\forall j \in [lb],\ \mathrm{cod}_j(b) = \mathrm{cod}_{fj}(a)$, ce qui montre que f est injective, donc ici que $f = Id$. Comme on a aussi $\forall j \in [lb],\ \mathrm{sym}_j(b) = \mathrm{sym}_j(a)$. On obtient $a = b$.

Théorème 4.36. : Soient $a, b \in A(1)$. Alors on a l'équivalence suivante :

$$a \leq b \iff a \tilde{<} b.$$

Preuve : L'implication $(\Leftarrow)$ se montre par induction décroissante sur $N(a)$ (où b est fixé). Lorsque $N(a) < N(b)$, soit q la surjection canonique $[lb] \to [la]$. Alors, il existe $j \in [lb]$ tel que $\mathrm{h}_j(b) > \mathrm{h}_{qj}(a)$. On note $m_j = \mathrm{h}_j(b),\ m = \mathrm{h}_{qj}(a),\ (s^j_o, ..., s^j_{m_j-1}) = \mathrm{sym}_j(b)$ et $s = s^j_{m-1}$ et on pose $a' = \mathrm{Br}(a, q(j), \bar{s})$. On a vu, à la proposition 4.33, que $a' \tilde{<} b$. On montre ensuite que $N(a') > N(a)$. Par hypothèse d'induction on obtient $a' \leq b$. Or $a \leq a'$. Donc $a \leq b$.

4.7 Lignes de taille d'un arbre

Proposition 4.37. : Soient $a, b \in A(1)$ tels que $a \leq b$. Notons $q = q_{(a,b)}$ et, pour chaque $j \in [lb]$, $m_j = \mathrm{h}_{qj}(a)$. On considère la relation d'equivalence suivante sur $[lb]$:
$j \sim j' \iff m_j = m_{j'}$ et $\mathrm{sec}_{m_j}\mathrm{cod}_j(b) = \mathrm{sec}_{m_{j'}}\mathrm{cod}_{j'}(b)$.
Alors, si $[lb]/\sim$ est muni de l'ordre quotient, on a un isomorphisme d'ensemble ordonné $can : [lb]/\sim \longrightarrow [la]$ telle que $can.Q = q$ (où $Q : [lb] \longrightarrow [lb]/\sim$ est la surjection croissante canonique).

<u>*Preuve*</u> : En fait $j \sim j' \iff q(j) = q(j')$. Le reste de la preuve est sans difficulté.

Notation 4.38. : Fixons $b \in A(1)$ et $n = l(b)$. Alors, pour chaque $a \in A(1)$ tel que $a \leq b$, on pose $H(a) = (\mathrm{h}_{qj}(a))_{j\in[n]} \in \mathbb{N}^n$ (où $q = q_{(a,b)}$).

Proposition 4.39. : Soient $a, a', b \in A(1)$:
1) Si $a' \leq a \leq b$, alors $H(a') \bar{\leq} H(a)$.
2) Si $a \leq b$, $a' \leq b$ et $H(a) = H(a')$, alors $a = a'$.

<u>*Preuve*</u> : (1) Sans difficulté.
(2) En utilisant la proposition 4.37, on montre que $l(a) = l(a')$ et que $q_{(a,b)} = q_{(a',b)}$. Puis on vérifie que $\forall i \in [la]$, $\mathrm{sym}_i(a) = \mathrm{sym}_i(a')$, $\mathrm{cod}_i(a) = \mathrm{cod}_i(a')$. On obtient donc $a = a'$.

Proposition 4.40. : Soient $b \in A(1)$ et $n = l(b)$. Considérons une liste $\bar{\lambda} = (\lambda_j)_{j\in[n]} \in \mathbb{N}^n$ telle que $\bar{1} \bar{\leq} \bar{\lambda} \bar{\leq} H(b)$ (où $\bar{1}$ est la liste constante sur 1). Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :
(i) $\forall j \in [n], \forall k \in \mathrm{Ant}_{\lambda_j}\mathrm{sec}_{\lambda_j}\mathrm{cod}_j(b),\ \lambda_k = \lambda_j$,
(ii) $\forall j \in [n], \forall m \in [h_j(b)], \forall i \in \mathrm{Ant}_m\mathrm{sec}_m\mathrm{cod}_j(b)$,
$1 \leq m < \lambda_j \ \Rightarrow\ m < \lambda_i$.

<u>*Preuve*</u> : $(i) \Rightarrow (ii)$: Si $1 \leq m < \lambda_j$ et, pour $i \in \mathrm{Ant}_m\mathrm{sec}_m\mathrm{cod}_j(b)$, $m \geq \lambda_i$. Alors $j \in \mathrm{Ant}_{\lambda_i}\mathrm{sec}_{\lambda_i}\mathrm{cod}_i(b)$ et donc $\lambda_j = \lambda_i$; ce qui est impossible.
$(ii) \Rightarrow (i)$: S'il existait $j \in [n]$ et $k \in \mathrm{Ant}_{\lambda_j}\mathrm{sec}_{\lambda_j}\mathrm{cod}_j(b)$ tel que $\lambda_k \neq \lambda_j$, alors en fait on aurait $\lambda_k < \lambda_j$ (on utilise (ii) avec $m = \lambda_j - 1$). On applique à nouveau (ii) en prenant $j' = k$, $m' = \lambda_j$ et $i' = j$ pour arriver à une contradiction.

Définition 4.41. : Soient $b \in A(1)$ et $n = l(b)$. On appelle *ligne de taille de* b une liste $\bar{\lambda} = (\lambda_j)_{j\in[n]} \in \mathbb{N}^n$ telle que $\bar{1} \lesssim \bar{\lambda} \lesssim H(b)$ et qui vérifie l'une des deux propriétés équivalentes de la proposition précédente.

Donnons maintenant deux classes d'exemples de lignes de taille à l'aide des propositions suivantes :

Proposition 4.42. : Soient $a, b \in A(1)$ tels que $a \leq b$. Alors $H(a)$ est une ligne de taille de b.

<u>*Preuve*</u> : Notons déjà $\forall j \in [lb],\ \lambda_j = \mathrm{h}_j(a)$. Soient $j \in [lb]$ et $k \in \mathrm{Ant}_{\lambda_j}\mathrm{sec}_{\lambda_j}\mathrm{cod}_j(b)$. Alors les deux cas particuliers $\lambda_j \leq \lambda_k$ et $\lambda_k \leq \lambda_j$ aboutissent à la même conclusion : $q(j) = q(k)$ et donc $\lambda_j = \lambda_k$.

Proposition 4.43. : Soit $a \in A(1)$ tel que $\mathrm{L}(a) > 1$. On pose $\forall j \in [la]$, $\lambda_j = \mathrm{h}_j(a) - 1$ et $\mathrm{sym}_j(a) = (s_o^j, ..., s_{\lambda_j}^j)$. On suppose que $\forall j \in [la],\ ar(s^j_{\lambda_j - 1}) = 1$. Alors $\bar{\lambda} = (\lambda_j)_{j\in[la]}$ est une ligne de taille a.

<u>*Preuve*</u> : Soient $j \in [la]$ et $k \in \mathrm{Ant}_{\lambda_j}\mathrm{sec}_{\lambda_j}\mathrm{cod}_j(a)$. On voit déjà que $\lambda_j \leq \lambda_k$ (car $\lambda_j \leq \mathrm{h}_k(a)$ et on ne peut avoir $\lambda_j = \mathrm{h}_k(a)$) et comme $sec_{\lambda_j}\mathrm{cod}_j(a) = sec_{\lambda_j}\mathrm{cod}_k(a)$, on remarque que $s^j_{\lambda_j-1} = s^k_{\lambda_j-1}$, ce qui entraine que $\mathrm{cod}_j(a) \ll \mathrm{cod}_k(a)$ et donc que $\lambda_j = \lambda_k$.

Théorème 4.44. : Soient $b \in A(1),\ n = l(b)$ et $\bar{\lambda}$ une ligne de taille b. Alors il existe un unique $a \in A(1)$ tel que $a \leq b$ et $H(a) = \bar{\lambda}$.

<u>*Preuve*</u> : L'unicité d'un tel a résultant de la proposition 4.39, il reste à montrer son existence. Notons $\mathcal{A} = \{a \in A(1)/\ a \leq b,\ H(a) \lesssim \bar{\lambda}\ \}$. On remarque que $\mathcal{A} \neq \varnothing$. Soit maintenant $a \in \mathcal{A}$ de longueur maximum. On suppose que $H(a) \neq \bar{\lambda}$. Il existe donc $j \in [n]$ tel que $\mathrm{h}_{qj}(a) < \lambda_j$ (où $q = q_{(a,b)}$). On construit ensuite $a' = \mathrm{Br}(a, q(j), \bar{s})$ comme dans l'énoncé de la proposition 4.33. Alors $a' \tilde{<} b$ par cette proposition et même $a' \leq b$ par le théorème 4.36. On montre ensuite que $H(a') \lesssim \bar{\lambda}$. Pour cela, c'est-à-dire, pour montrer que $\forall i \in [n],\ \mathrm{h}_{fi}(a') \leq \lambda_i$ (où $f = q_{(a',b)}$), on reprend la preuve de la proposition 4.33 où l'on distingue les cas $i < j_0,\ j_0 \leq i \leq j_1$ (c'est-à-dire $i \in I$. C'est là qu'on utilise l'axiome (ii) de la définition d'une ligne de taille) et $j_1 < i < l(b)$. Ainsi $a' \in \mathcal{A}$. Or

on voit que $\mathrm{L}(a') > \mathrm{L}(a)$, ce qui contredit le fait que a est de longueur maximum. D'où la conclusion voulue.

5. La monade des arbres feuillus

Introduction : La monade de Batanin est différente de la monade $\mathbb{P}$. C'est le concept d'arbre feuillu qui est à la base de cette différence. Pour comprendre ce concept nous suggérons de se reporter au théorème 5.43 que nous montrerons dans cette sous-section. Il montre que l'opérade des arbres feuillus est libre, en tant qu'opérade sur $\mathbb{M}o$ munie d'une "méta-opération" binaire (ce qu'on a appelé une opérade magmatique). Pour la construction de $\mathbb{B}$ on remplacera cette "méta-opération" générale par une contraction.

5.1 La monade $\mathbb{A}^f$

Conventions 5.1. : On ne travaille plus maintenant en toute généralité avec les langages chargés (voir définition 2.19).
On se donne déjà un langage (S, ar) a priori sans constante. A ce langage on rajoute deux nouveaux symboles Δ et $\square$ où $ar(\Delta) = 1$ et $ar(\square) = 2$. Posons $S' = S \cup \{\Delta, \square\}$. On définit ensuite $ch : S' \to \mathbb{Z}$ en posant $\forall s \in S,\ ch(s) = 0,\ ch(\Delta) = -1$ et $ch(\square) = +1$.
Comme aux conventions 3.1, pour chaque $C \in |\mathbb{E}|$, on pose
$S'(C) = S' \coprod C$ et on définit encore $ar : S'(C) \to \mathbb{N}$, mais aussi
$ch : S'(C) \to \mathbb{Z}$ en posant $\forall s \in S',\ ch.u_0(s) = ch(s)$ et $\forall c \in C$,
$ch.u_1(c) = 0$. On obtient ainsi le langage chargé $(S'(C), ar, ch)$. Notons encore $A(C) = \mathbb{A}rb(S'(C), ar)$ et pour toute application $f : C \to C'$,
$\tilde{f} = A(f) : A(C) \to A(C')$. On note maintenant $A^f(C)$ l'ensemble des $a \in A(C)$ qui sont feuillus pour $(S'(C), ar, ch)$. Comme en 3.2, on identifie S' à $u_0(S')$, et C à $u_1(C)$.

Proposition 5.2. : Soit $a \in A(C)$.
1) Soit aussi $p \in \mathbb{Z}$. Alors, a est p-chargé ssi $\underline{a}$ est p-chargé.
2) En particulier, a est feuillu ssi $\underline{a}$ est feuillu.
3) Soit encore $f : C \to C'$ une application. Alors $\tilde{f}(a)$ est feuillu ssi a est feuillu.

Preuve : Sans difficulté.

Remarque 5.3. : Grâce au (3) de la proposition précédente on construit un sous-foncteur A^f de A. De plus, la transformation naturelle d'inclusion $\imath : A^f \to A$ est cartésienne.

Proposition 5.4. : Soient $f : C \to C'$ une application injective et $a \in A^f(C)$. Si $l_{\{C\}}(a) \subset f(C')$, il existe un unique $a' \in A^f(C')$ tel que $\tilde{f}(a') = a$.

Preuve : Immédiat.

Proposition 5.5. : Soient $a \in A(1)$, $n = l(a)$ et $(b_o, ..., b_{n-1}) \in A(C)^n$. On pose $\hat{a} = \mathrm{op}(a, (b_o, ..., b_{n-1}))$.
1) Si $a, b_o, ..., b_{n-1}$ sont feuillus alors $\hat{a}$ est feuillu.
2) Inversement, si a et $\hat{a}$ sont feuillus, alors $b_o, ..., b_{n-1}$ sont aussi feuillus.

Preuve : (1) Résulte de la proposition 2.29.
(2) Résulte de la proposition 2.15.

Proposition 5.6. : Soient $s \in S$, où $n = ar(s) \geq 1$, et $(a_o, ..., a_{n-1}) \in A(C)^n$. On a l'équivalence suivante :

$$s(a_o, ..., a_{n-1}) \in A^f(C) \iff \forall j \in [n],\ a_j \in A^f(C).$$

Preuve : Résulte de la proposition précédente.

Proposition 5.7. : Soit $C \in |\mathbb{E}ns|$. Alors :
1) $\forall c \in C,\ \eta_C(c) \in A^f(C)$,
2) $\forall A \in A^{f2}(C),\ \mu_C \tilde{\imath}_C(A) \in A^f(C)$.

Preuve : Le (2) résulte de la proposition 5.5.

Notations 5.8. : Pour tout $C \in |\mathbb{E}ns|$, notons $\eta'_C : C \to A^f(C)$ et $\mu'_C : A^{f2}(C) \to A^f(C)$ les restrictions obtenues par la proposition précécente. Notons aussi $l'_C : A^f(C) \to Mo(C)$ la restriction de $l_C : A(C) \to Mo(C)$.

Proposition 5.9. : 1) η'_C, μ'_C et l'_C sont naturels en C.
2) $\mathbb{A}^f = (A^f, \eta', \mu')$ est une sous-monade de $\mathbb{A} = (A, \eta, \mu)$.
3) $l' : \mathbb{A}^f \to \mathbb{M}o$ est un morphisme de monade qui est cartésien.
4) La monade $\mathbb{A}^f$ est cartésienne.
5) $\mathbb{A}^f$ est concrète syntaxique, où ici $U = Id_{\mathbb{E}ns}$ et L est la restriction de son homologue pour $\mathbb{A}$.

Preuve : Le (1) est immédiat. Le (2) résulte du lemme 3.37. Dans le (3), l' est le composé de $\imath$ et l qui sont cartésiens. Dans le (4), $\mathbb{A}$ et l' étant cartésiens, $\mathbb{A}^f$ l'est aussi. Le (5) résulte de la proposition 1.14.

Remarque 5.10. : En fin de section nous montrerons que la monade $\mathbb{A}^f$ est pure.

Proposition 5.11. : Soient $a, b \in A^f(1)$, alors :

$$a \underset{\mathbb{A}^f}{\leq} b \iff a \underset{\mathbb{A}}{\leq} b.$$

Preuve : Voir la proposition précédente et de la proposition 3.39 (3).

5.2 Arbres irréductibles

Remarque 5.12. : Soient $a \in A^f(C)$ tel que $\mathrm{L}(a) > 1$ et $j \in [la]$. Ecrivons $m = \mathrm{h}_j(a)$. Alors on a toujours $m \geq 2$ et $\mathrm{ch}_{m-2}\,\mathrm{sym}_j(a) = 0$.

Définition 5.13. : Soit $a \in A^f(C)$. On dit que a est ***irréductible*** si $\mathrm{L}(a) > 1$ et $\forall j \in [la]$, $\forall i \in [\mathrm{h}_j a]$, $\mathrm{ch}_i \mathrm{sym}_j(a) = 0 \Rightarrow i \geq \mathrm{h}_j(a) - 2$.

Remarque 5.14. : Si $\mathrm{L}(a) > 1$, alors a est irréductible ssi

$$\forall j \in [la],\ \forall i \in [\mathrm{h}_j a],\ \mathrm{ch}_i \mathrm{sym}_j(a) = 0 \iff i \geq \mathrm{h}_j(a) - 2.$$

Proposition 5.15. : Soit $a \in A^f(C)$, alors :
1) a est irréductible ssi $\underline{a}$ est irréductible.
2) Pour tout application $f : C \to C'$, $\tilde{f}(a)$ est irréductible ssi a est irréductible.

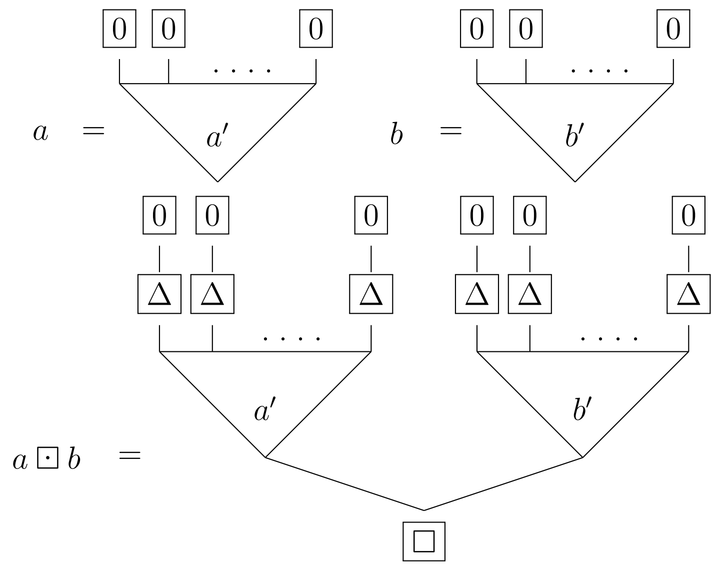
Preuve : Sans difficulté.

Proposition 5.16. : Soit $a \in A^f(1)$. On suppose que $\mathrm{sym}(a) = s \in S$ (et donc $\mathrm{ch}(s) = 0$ et $ar(s) > 0$). Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :
(i) a est irréductible,
(ii) a est primitif pour $\mathbb{A}^f$ (voir la définition 1.13),
(iii) $a = \bar{s}$, où $\bar{s} = s(0(\varnothing), ..., 0(\varnothing))$.

Preuve : L'équivalence $(i) \iff (iii)$ est sans difficulté. Pour $(ii) \iff (iii)$, on s'inspire de la preuve de la proposition 3.41 (2).

5.3 L'opération $\boxdot$

Notation 5.17. : Soient $a, b \in A^f(1)$. Alors $a \square b$ est 1-chargé (résulte du corollaire 2.25). Posons $n = l(a \square b) = l(a) + l(b)$. On note
$a \boxdot b = \mathrm{op}(a \square b, (d_o, ..., d_{n-1}))$ où $\forall j \in [n],\ d_j = \Delta(0(\varnothing))$.
L'opération $\boxdot$ peut se représenter graphiquement de la façon suivante :



Proposition 5.18. : Soient $a, b \in A^f(1)$. Alors :
1) $a \boxdot b \in A^f(1)$,
2) $l(a \boxdot b) = l(a) + l(b)$,
3) $\mathrm{L}(a \boxdot b) = \mathrm{L}(a \square b) + l(a) + l(b)$.

<u>*Preuve*</u> : Le (1) résulte de la proposition 2.28. Les (2) et (3) résultent de la proposition 2.14.

Proposition 5.19. : Soient $a, b \in A^f(1)$. Alors $a \boxdot b$ est irréductible.

<u>*Preuve*</u> : Résulte du lemme suivant :

Lemme 5.20. : Soient $n = l(a \boxdot b)$ et $p = l(a)$. Alors, pour tout $j \in [n]$:
- Si $j < p$, $\mathrm{sym}_j(a \boxdot b) = (\square).\mathrm{sym}_j^-(a).(\Delta, 0)$,
- Si $p \leq j < n$, $\mathrm{sym}_j(a \boxdot b) = (\square).\mathrm{sym}_{j-p}^-(b).(\Delta, 0)$,

<u>*Preuve*</u> : (du lemme) Résulte de la proposition 2.15.

Proposition 5.21. : Soient $a \in A^f(1)$ un arbre irréductible où $\mathrm{sym}(a) = \square$ et $j \in [la]$. Ecrivons $\mathrm{sym}_j(a) = (s_o, ..., s_{m-1})$, où $m = \mathrm{h}_j(a)$. Alors $s_{m-1} = 0$ et $s_{m-2} = \Delta$.

<u>*Preuve*</u> : Comme a est irréductible, $\sum_{i \in [m-2]} \mathrm{ch}(s_j) > 0$. Donc $\mathrm{ch}(s_{m-2}) = -\sum_{i \in [m-2]} \mathrm{ch}(s_j) < 0 \;\Rightarrow\; s_{m-2} = \Delta$.

5.4 Réduction des arbres irréductibles

Soit $a \in A^f(1)$. On suppose que $\mathrm{sym}(a) = \square$ et que a est irréductible. On considère la liste $\bar{\lambda} = (\lambda_j)_{j \in [la]}$ où $\lambda_j = \mathrm{h}_j(a) - 1$.

Proposition 5.22. : $\bar{\lambda}$ est une ligne frontalière de a .(voir définition 4.41).

<u>*Preuve*</u> : Pour chaque $j \in [la]$, écrivons $\mathrm{sym}_j(a) = (s_o^j, ..., s_{\lambda_j}^j)$. Alors $s_{\lambda_j - 1}^j = \Delta$ (voir la proposition 5.21) et donc $ar(s_{\lambda_j - 1}^j) = 1$. Alors on a la conclusion voulue, grâce à la proposition 4.43.

On sait alors, par le théorème 4.44, qu'il existe un unique $a' \in A(1)$ tel que $a' \leq a$ et $H(a') = \bar{\lambda}$.

Proposition 5.23. : 1) $l(a') = l(a)$.
2) a' est 1-chargé.

Preuve : (1) Ecrivons pour chaque $j \in [la]$, $\operatorname{cod}_j(a) = (p^j_o, ..., p^j_{\lambda_j})$, $\operatorname{sym}_j(a) = (s^j_o, ..., s^j_{\lambda_j})$ et considérons la relation d'equivalence suivante sur $[la]$: $j \sim j' \iff \lambda_j = \lambda_{j'}$ et $\sec_{\lambda_j}\operatorname{cod}_j(a) = \sec_{\lambda_{j'}}\operatorname{cod}_{j'}(a)$. Alors $j \sim j' \iff (p^j_o, ..., p^j_{\lambda_j - 1}) = (p^{j'}_o, ..., p^{j'}_{\lambda_{j'}-1})$. Mais aussi $p^j_{\lambda_j} = 0 = p^{j'}_{\lambda_{j'}}$ car $p^j_{\lambda_j} \in [ar(s^j_{\lambda_j - 1})] = [ar(\Delta)] = [1]$.
Donc $j \sim j' \Rightarrow \operatorname{cod}_j(a) = \operatorname{cod}_{j'}(a) \Rightarrow j = j'$. Alors
$[la'] \simeq [la]/\sim = [la] \Rightarrow l(a') = l(a)$.
(2) Comme $l(a) = l(a')$, on a $q_{(a',a)} = Id$ et alors $\forall j \in [la]$, $\operatorname{sym}^-_j(a') \ll \operatorname{sym}^-_j(a)$ ou encore $\operatorname{sym}^-_j(a') = \sec_{\lambda_j - 1}\operatorname{sym}^-_j(a)$. Donc $\forall m \in [\lambda_j]$, $ch_m\operatorname{sym}_j(a') \geq 1$ (car a est feuillu et irréductible). Mais aussi, comme $0 = \operatorname{ch}\operatorname{sym}_j(a) = \operatorname{ch}\operatorname{sym}_j(a') + \operatorname{ch}(\Delta) = \operatorname{ch}\operatorname{sym}_j(a') - 1 \Rightarrow \operatorname{ch}\operatorname{sym}_j(a') = 1$, ce qui montre que a' est 1-chargé.

Comme $\operatorname{sym}(a') = \operatorname{sym}(a) = \square$, on peut donc écrire $a' = a'_1 \square a'_0$ où $a'_1, a'_0 \in A(1)$.

Proposition 5.24. : 1) $\forall k \in [2]$, $a'_k \in A^f(1)$.
2) $a = a'_1 \boxdot a'_0$.

Preuve : (1) Résulte de la proposition précédente.
(2) Soit $\bar{a} = \operatorname{op}(a', (\bar{\Delta}, ..., \bar{\Delta}))$ où $\bar{\Delta} = \Delta(0(\varnothing))$. On montre que $l(\bar{a}) = l(a)$ et $\forall j \in [la]$, $\operatorname{sym}_j(\bar{a}) = \operatorname{sym}_j(a)$, $\operatorname{cod}_j(\bar{a}) = \operatorname{cod}_j(a)$. Donc $\bar{a} = a$. D'où le résultat voulu.

Théorème 5.25. : Soit $a \in A^f(1)$ tel que $\operatorname{sym}(a) = \square$ et a est irréductible. Alors a s'écrit de façon unique $a = a_1 \boxdot a_0$, où $a_1, a_0 \in A^f(1)$.

Preuve : L'existence d'une telle décomposition a été montrée précédemment, quant à l'unicité elle résulte du lemme suivant :

Lemme 5.26. : Soient $a_0, a_1 \in A^f(1)$ et $a = a_1 \boxdot a_0$. Alors $a' = a_1 \square a_0$, où a' a été défini après la proposition 5.22.

Preuve : (du lemme) Posons $b = a_1 \square a_0$. On montre que $H(b) = H(a')$. Alors, comme $b \leq a$ et $a' \leq a$, on a $b = a'$.

5.5 Décomposition canonique d'un arbre feuillu

Soit $a \in A^f(1)$ tel que $\mathrm{sym}(a) = \square$. Pour chaque $j \in [la]$, posons $\lambda'_j = \inf\{m \in [h_j a] / \ \mathrm{ch}_m \mathrm{sym}_j(a) = 0\}$ et $\lambda_j = \lambda'_j + 2$. Posons enfin $\bar{\lambda} = (\lambda_j)_{j \in [la]}$.

Proposition 5.27. : $\bar{\lambda}$ est une ligne de taille a.(Voir la définition au 4.41)

<u>*Preuve*</u> : Clairement $\bar{1} \bar{\leq} \bar{\lambda} \bar{\leq} H(a)$. Soient maintenant $j \in [la]$, et $k \in \mathrm{Ant}_{\lambda_j} \mathrm{sec}_{\lambda_j} \mathrm{cod}_j(a)$. Alors $\mathrm{sec}_{\lambda'_j} \mathrm{cod}_k(a) = \mathrm{sec}_{\lambda'_j} \mathrm{cod}_j(a)$ et donc $\mathrm{sec}_{\lambda'_j} \mathrm{sym}_k(a) = \mathrm{sec}_{\lambda'_j} \mathrm{sym}_j(a)$ d'où $\lambda'_k = \lambda'_j$; mais aussi $\lambda_k = \lambda_j$

$\bar{\lambda}$ étant une ligne de taille de a, soit $\alpha \in A(1)$ l'unique arbre tel que $\alpha \leq a$ et $H(\alpha) = \bar{\lambda}$ (voir le théorème 4.44).

Proposition 5.28. : α est feuillu et irréductible.

<u>*Preuve*</u> : Soit $q = q_{(\alpha,a)}$. Alors $\forall j \in [la]$, $\mathrm{sym}^-_{qj}(\alpha) = \mathrm{sec}_{\lambda_j - 1} \mathrm{sym}_j(a)$. Donc $\forall m \in [\lambda_j - 1]$, $\mathrm{ch}_m \mathrm{sym}_{qj}(\alpha) = \mathrm{ch}_m \mathrm{sym}_j(a)$. On en déduit la conclusion voulue.

Posons $n = l(\alpha)$. Comme $\alpha \leq a$, il existe $(a_0, ..., a_{n-1}) \in A(1)^n$ tel que $a = \mathrm{op}(\alpha, (a_0, ..., a_{n-1}))$ et le n-uplet $(a_0, ..., a_{n-1})$ est unique.

Proposition 5.29. : $\forall j \in [n]$, $a_j \in A^f(1)$.

<u>*Preuve*</u> : Résulte de la proposition 5.5.

Montrons maintenant l'unicité de la décomposition
$a = \mathrm{op}(\alpha, (a_0, ..., a_{n-1}))$.

Notation 5.30. : L'arbre α construit ici, à partir de $a \in A^f(1)$ tel que $\mathrm{sym}(a) = \square$, est noté $\alpha = Irr(a)$.

Proposition 5.31. : Soient $a, b \in A^f(1)$, tels que $a \leq b$ et $\mathrm{sym}(a) = \square$. Alors $Irr(a) = Irr(b)$.

<u>*Preuve*</u> : Pour chaque $j \in [la]$ et $i \in [lb]$, notons λ'_j et μ'_i les entiers construit comme précédemment à partir de a et de b. Posons ensuite $\lambda_j = \lambda'_j + 2$,

$\mu_i = \mu'_i + 2$. Soit aussi $q = q_{(a,b)}$. On vérifie d'abord que $\forall i \in [lb],\ \mu'_i = \lambda'_{qi}$. Posons encore $\alpha = Irr(a)$ et $\beta = Irr(b)$. On considère les relations d'équivalence $\sim$ et $\equiv$ sur $[la]$ et $[lb]$ définies par : $j \sim j' \iff \lambda_j = \lambda_{j'}$ et $\mathrm{sec}_{\lambda_j}\mathrm{cod}_j(a) = \mathrm{sec}_{\lambda_{j'}}\mathrm{cod}_{j'}(a)$ et $i \equiv i' \iff \mu_i = \mu_{i'}$ et $\mathrm{sec}_{\mu_i}\mathrm{cod}_i(b) = \mathrm{sec}_{\mu_{i'}}\mathrm{cod}_{i'}(b)$. On montre que $i \equiv i' \iff q(i) \sim q(i')$. On en déduit l'existence d'une bijection croissante $[lb]/\equiv\ \longrightarrow\ [la]/\sim$ qui entraine que $l(\beta) = l(\alpha)$ et $q_{(\alpha,a)}.q = q_{(\beta,b)}$. On montre enfin que $\forall i \in [l\alpha],\ \mathrm{cod}_i(\alpha) = \mathrm{cod}_i(\beta)$ et $\mathrm{sym}_i(\alpha) = \mathrm{sym}_i(\beta)$. D'où $\alpha = \beta$.

Proposition 5.32. : Soit $a \in A^f(1)$ tel que $\mathrm{sym}(a) = \square$. Alors on a l'équivalence suivante :
a est irréductible ssi $Irr(a) = a$.

Preuve : Pour l'implication $(\Rightarrow)$ on montre que $H(a)$ est la ligne de taille de a définie en début de sous-section. L'autre implication est immédiate.

Théorème 5.33. : Soit $a \in A^f(C)$ tel que $\mathrm{sym}(a) = \square$, alors il existe un unique $\alpha \in A^f(1)$ irréductible vérifiant $\mathrm{L}(\alpha) > 1$ et un unique $(a_o, ..., a_{n-1}) \in A^f(C)^n$, où $n = l(\alpha)$, tel que $a = \mathrm{op}(\alpha, (a_0, ..., a_{n-1}))$.

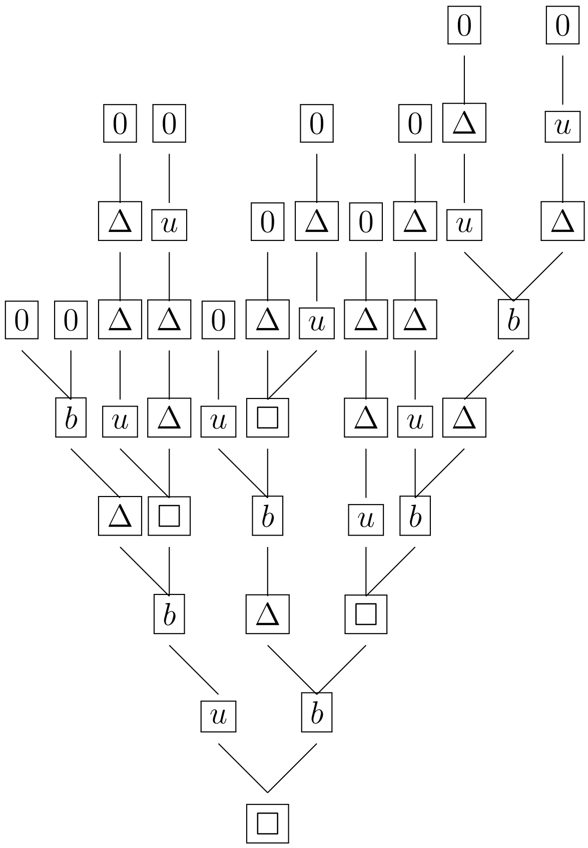
Preuve : 1) Lorsque $C = 1$, cela résulte immédiatement de ce qui précède.
2) Dans le cas général, en utilisant le (1), on commence par décomposer
$\underline{a} = \mathrm{op}(\alpha, (\alpha_0, ..., \alpha_{n-1}))$, où $\alpha \in A^f(1)$ est irréductible et
$(\alpha_0, ..., \alpha_{n-1}) \in A^f(1)^n$ avec $n = l(\alpha)$, puis, après avoir noté
$\forall i \in [n+1],\ \hat{i} = \sum_{x \in [i]} l(\alpha_x), (c_o, ..., c_{\hat{n}-1}) = l_C(a)$ et $\forall j \in [n]$,
$\bar{c}_j = (c_{\hat{j}}, ..., c_{\widehat{j+1}-1}),\ a_j = \alpha_j[\bar{c}_j]$ et enfin $b = \mathrm{op}(\alpha, (a_0, ..., a_{n-1}))$ on montre que $\underline{b} = \underline{a}$ et $l_C(b) = l_C(a)$. Ainsi $a = b$. Si maintenant on a une décomposition du même type $a = \mathrm{op}(\alpha', (a'_0, ..., a'_{n-1}))$, par l'unicité dans le cas $C = 1$, on obtient $\alpha' = \alpha,\ n' = n$ et $\forall j \in [n],\ \underline{a'}_j = \underline{a}_j$. On vérifie ensuite que $\forall j \in [n],\ l_C(a'_j) = l_C(a_j)$. D'où $a'_j = a_j$. On a ainsi l'unicité voulue.

Définition 5.34. : Soit $a \in A^f(C)$ tel que $\mathrm{sym}(a) = \square$. L'unique décomposition $a = \mathrm{op}(\alpha, (a_0, ..., a_{n-1}))$ donnée dans l'énoncé du théorème précédent s'appelle la *décomposition canonique* de a.

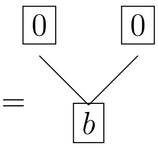
Exemple 5.35. - Afin de bien comprendre ce qu'est la décomposition canonique d'un arbre feuillu donnons en un exemple concret.

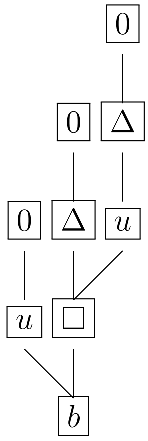
Plaçons nous déjà dans un langage chargé (S', ar, ch) où
$S' = \{\Delta, \Box\} \cup \{u, b\}$ avec $ar(\Delta) = ar(u) = 1,\ ar(\Box) = ar(b) = 2$ et $ch(\Delta) = -1,\ ch(\Box) = +1$ et $ch(u) = ch(b) = 0.$
- Soit maintenant l'arbre $a \in A(1) = \mathbb{A}rb(S'(1), ar)$ défini par le dessin suivant :

$a \quad =$



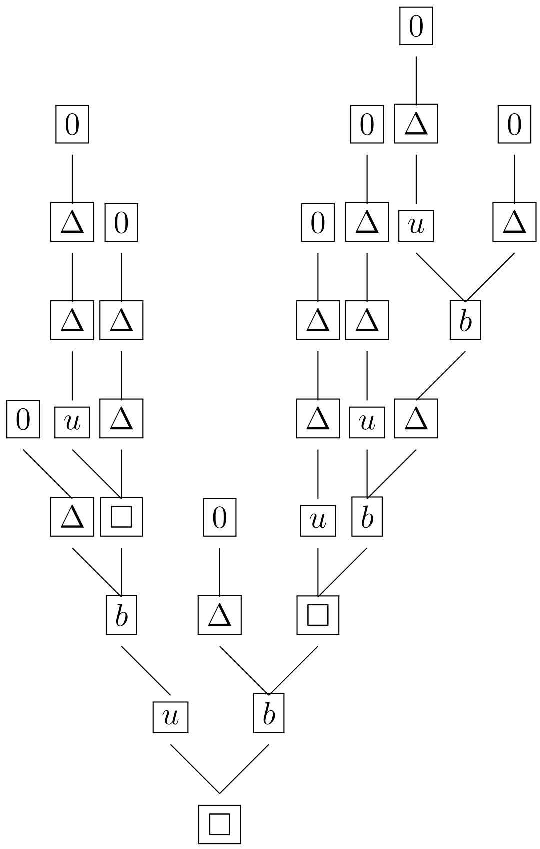
On voit facilement que a est feuillu pour $(S'(1), ar, ch)$. Par contre il n'est pas irréductible. Il a en fait pour décomposition canonique :
$a = \mathrm{op}(a', \bar{a})$ où $\bar{a} = (a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7)$ avec
$a_1 = a_4 = a_5 = a_6 = 0(\varnothing),\ a_2 = u(0(\varnothing)) = a_7$ et ...

$a_0 =$ 

$a_3 =$ 

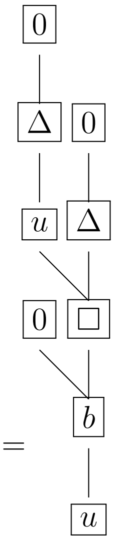
.

Quant à a' il est donné par le dessin suivant :

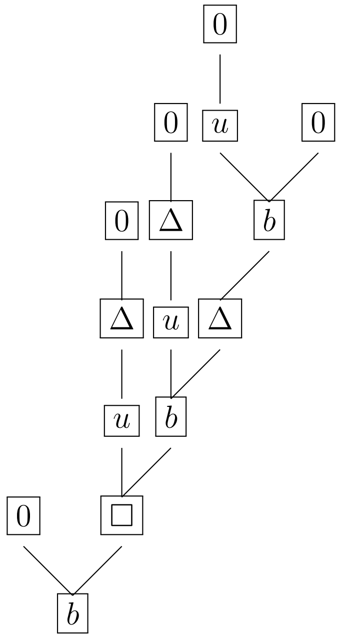
$a' =$ 

a' est un arbre feuillu irréductible qui s'écrit $a' = b_0 \boxdot b_1$ où b_0 et b_1 sont donnés par :

$b_0 \; =$



$b_1 \; =$



Proposition 5.36. : Soit $a \in A^f(C)$ tel que $\mathrm{sym}(a) = \Box$, de décomposition canonique $a = \mathrm{op}(\alpha, (a_0, ..., a_{n-1}))$. Alors, si a n'est pas irréductible, on a :
1) $\exists j \in [n], \; \mathrm{L}(a_j) > 1$.
2) $\mathrm{L}(\alpha) < \mathrm{L}(a)$ et $\forall j \in [n], \; \mathrm{L}(a_j) < \mathrm{L}(a)$.

Preuve : (1) Si $\forall j \in [n], \; \mathrm{L}(a_j) = 1$, on montre que $\underline{a} = \alpha$.
(2) $\mathrm{L}(a) - \mathrm{L}(\alpha) = \sum_{j \in [n]} (\mathrm{L}(a_j) - 1) \geq \mathrm{L}(a_{j_0}) - 1 > 0$, où $\mathrm{L}(a_{j_0}) > 1$ et $\forall j \in [n], \; \mathrm{L}(a_j) \leq \sum_{i \in [n]} \mathrm{L}(a_i) < (\mathrm{L}(\alpha) - l(\alpha)) + \sum_{j \in [n]} \mathrm{L}(a_j) = \mathrm{L}(a)$, car $\mathrm{L}(\alpha) > 1 \; \Rightarrow \; \mathrm{L}(\alpha) > l(\alpha)$.

5.6 Pureté de la monade $\mathbb{A}^f$

Proposition 5.37. : Soit $a \in A^f(C)$. Alors, on a l'équivalence suivante :
a est primitif ssi a est irréductible.

Preuve : 1) On commence par supposer que $C = 1$ et $\mathrm{sym}(a) = \Box$:
$(\Leftarrow)$ Soit $A \in (A^f)^2(1)$ tel que $\mu'_1(A) = a$. Posons $\alpha = \underline{A} \in A^f(1)$ et

$(a_o, ..., a_{n-1}) = l_{A1}(A)$. On a $A = \alpha[a_o, ..., a_{n-1}]$ et donc
$a = \mu'_1(A) = \mathrm{op}(\alpha, (a_o, ..., a_{n-1}))$ alors $\alpha \leq a$. De plus :
- si $\mathrm{sym}(\alpha) = \Box$, $Irr(\alpha) = Irr(a) = a \Rightarrow a \leq \alpha$ et donc $\alpha = a$. On en déduit que $A = A^f(\eta'_1)(a)$.
- si $\mathrm{sym}(\alpha) \neq \Box$, alors $\mathrm{L}(\alpha) = 1 \Rightarrow A = \eta'_{A^f 1}(a)$.
$(\Rightarrow)$ Soit la décomposition canonique $a = \mathrm{op}(\alpha, (a_o, ..., a_{n-1}))$. Prenons $A = \alpha[a_o, ..., a_{n-1}]$. Alors $A \in (A^f)^2(1)$ et $\mu'_1(A) = a$. Comme a est primitif, on voit que $A = A^f(\eta'_{\mathbb{I}})(a) \Rightarrow \alpha = \underline{A} = a$. Donc a est irréductible.
2) Si on a encore $C = 1$, mais que $\mathrm{sym}(a) = s \in S$ ou $\mathrm{L}(a) = 1$ on a vu qu'il y a toujours l'équivalence voulue.
3) Dans le cas général, c'est immédiat car a et $\underline{a}$ sont de même nature.

Théorème 5.38. : La monade $\mathbb{A}^f$ est pure.

<u>*Preuve*</u> : Soit $a \in A^f(C)$ tel que $\mathrm{L}(a) > 1$.
- Si $\mathrm{sym}(a) = s \in S$, alors $\bar{s} \leq a$ où $\bar{s} = s(0(\varnothing), ..., 0(\varnothing))$ est primitif. Inversement, si $\alpha \leq a$ où α est primitif et $\mathrm{L}(\alpha) > 1$ alors
$\mathrm{sym}(\alpha) = \mathrm{sym}(a) = s \Rightarrow \alpha = \bar{s}$.
- Si $\mathrm{sym}(a) = \Box$, cela résulte immédiatement de la proposition précédente et du théorème 5.33.

5.7 Opérade magmatique libre

Définition 5.39. : Une *opérade magmatique* est la donnée :
- d'une opérade sur $\mathbb{M}o$: (Ω, π, e, m) et
- d'une application $\otimes : \Omega \times \Omega \to \Omega$ telle que
$\forall s, s' \in \Omega,\ \pi(s \otimes s') = \pi(s) + \pi(s')$.

Exemples 5.40. : 1) Soient (Ω, π, e, m) une opérade sur $\mathbb{M}o$ et $s \in \Omega$ tel que $\pi(s) = 2$. Alors, si on considère l'application
$(u, v) \mapsto u \otimes v = m(s, (u, v))$, on obtient ainsi une opérade magmatique.
2) On suppose que $\Omega = A^f(1)$, π est la restriction de l, $e = 0(\varnothing)$,
$m = \mathrm{op}$ et enfin $\otimes = \boxdot$. On obtient ainsi une opérade magmatique notée $\underline{\mathbb{A}^f}$.

Définition 5.41. : Ω et Ω' étant deux opérades magmatiques, un morphisme $f : \Omega \to \Omega'$ est un morphisme d'opérade tel que
$\forall u, v \in \Omega,\ f(u \otimes v) = f(u) \otimes' f(v)$.

Notations 5.42. : Les opérades magmatiques et leurs morphismes forment une catégorie notée $\mathbb{O}pM$. Notons aussi $U : \mathbb{O}pM \to \mathbb{C}oll = \mathbb{E}ns/\mathbb{N}$ le foncteur d'oubli canonique.

• Soit maintenant $(S, ar) \in |\mathbb{C}oll|$, où $ar^{-1}(\{0\}) = \varnothing$. On considère $\lambda : S \to \Omega = A^f(1)$ définie par $\lambda(s) = \bar{s} = s(0(\varnothing), ..., 0(\varnothing)) \in A^f(1)$. $\lambda : (S, ar) \to (\Omega, \pi)$ est une flèche de $\mathbb{C}oll$.

Théorème 5.43. : Le couple $(\underline{\mathbb{A}^f}, \lambda)$ est un objet libre pour U.

<u>*Preuve*</u> : Soient $\Omega = (\Omega, \pi, e, m, \otimes) \in |\mathbb{O}pM|$ et $\underline{f} : (S, ar) \to (\Omega, \pi)$ une flèche de $\mathbb{C}oll$. On construit, par induction sur la longueur des arbres, une application $f : A^f(1) \to \Omega$ telle que $\forall a \in A^f(1),\ \pi.f(a) = l(a)$. Soit $a \in A^f(\mathbb{I})$:
- Si $\mathrm{L}(a) = 1$, alors $a = 0(\varnothing)$, on pose $f(a) = e$.
- Si $a = s(a_0, ..., a_{n-1})$, où $s \in S$ et $n = ar(s) \geq 1$, on pose $f(a) = m(\underline{f}s, (fa_0, ..., fa_{n-1})$.
- Si $\mathrm{sym}(a) = \square$, alors :
.. si a est irréductible, il s'écrit de façon unique $a = a_1 \boxdot a_0$, où $a_1, a_0 \in A^f(1)$; dans ce cas on pose $f(a) = f(a_1) \otimes f(a_0)$.
.. si a n'est pas irréductible, on a la décomposition canonique $a = \mathrm{op}(\alpha, (a_0, ..., a_{n-1}))$ où $\mathrm{L}(\alpha) < \mathrm{L}(a)$ et $\forall j \in [n],\ \mathrm{L}(a_j) < \mathrm{L}(a)$; on peut donc poser $f(a) = m(f\alpha, (fa_0, ..., fa_{n-1}))$.
On vérifie que $f : \underline{\mathbb{A}^f} \to \Omega$ est l'unique morphisme de $\mathbb{O}pM$ tel que $Uf.\lambda = \underline{f}$.

Références

[1] M.A.BATANIN, *On the definition of weak ω-category*, Macquarie University Report, 96(207): 24, (1996).

[2] M.A.BATANIN, *Monoidal globular categories as a natural environment for the theory of weak n-categories*, Advances in Mathematics 136 (1998), p. 39-103.

[3] M.A.BATANIN, *On the Penon method of weakening of algebraic structures*, Journal of Pure and Applied Algebra (2002), volume 172, pages 1-23.

[4] J.M.BOARDMAN AND R.M.VOGT, *Homotopy Invariant Algebraic Structures on Topological Spaces*, Lecture Notes in Mathematics (1973), volume 347.

[5] A.CARBONI AND P.JOHNSTONE, *Connected limits, familial representability and Artin glueing*, Mathematical Structures in Computer Science (1995) pages 441-459.

[6] E.CHENG AND M.MAKKAI, *A note on the Penon definition of n-category*, Cahiers de Topologie et Géométrie Différentielle Catégorique (2010),volume LI-3, pages 205-223.

[7] C.KACHOUR *Aspects of Globular Higher Category Theory*, Thesis (2012), Macquarie University, Faculty of Science.

[8] J.P.MAY *The geometry of iterated loop spaces*, Lecture Notes in Math., Springer-Verlag (1972), volume 271.

[9] J.PENON, *Approche polygraphique des ∞-catégories non strictes*, Cahiers de Topologie et Géométrie Différentielle Catégorique (1999), volume 1, pages 31-80.

[10] J.PENON, *Une classe d'exemples d' ∞-catégories faibles au sens de Batanin*, Cahiers de Topologie et Géométrie Différentielle Catégorique (à paraitre).

[11] V.A.SMIRNOV, *Simplicial and Operad Methods in Algebraic Topology*, American Mathematical Society, Translations of Mathematical Monographs 198

Jacques PENON
25, rue Chapsal,
94340, Joinville-le-Pont
France
Email : tryphon.penon@gmail.com