CAHIERS DE TOPOLOGIE ET
GEOMETRIE DIFFERENTIELLE
CATEGORIQUES

VOLUME LXII-1 (2021)

CHRISTIAN LAIR (1945-2020) BIBLIOGRAPHIE

Andrée EHRESMANN et René GUITART

Résumé. Christian Lair fut un membre actif de l'École Ehresmann en théorie des catégories. Son travail mathématique fut une véritable "défense et illustration" de la théorie des esquisses d'Ehresmann. Nous indiquons quelques notions qu'il a introduites, et quelques uns de ses principaux résultats, au regard d'une bibliographie que nous espérons la plus complète possible. C'est une invitation à lire Lair.

Abstract. Christian Lair was an active member of the Ehresmann's school in the theory of categories. His mathematical work was a true "defence and illustration" of Ehresmann's theory of sketches. We indicate some of the notions he introduced, and some of his main results, in the light of a bibliography which we hope will be as complete as possible. It is an invitation to read Lair.

Keywords. esquisse, type, produits tensoriels, diagramme localement libre, catégories esquissables, modelables, accessibles, qualifiables, trames, patchwork, Diagrammes, spécifications.

Mathematics Subject Classification (2010). 18CXX, 18C30, 18C35.

1. Études et thèses

Christian Lair est né le 31 juillet 1945 à Wissignicourt (Aisne). Après des études secondaires au lycée Paul Langevin de Suresnes, il est rentré en classes de Math.Sup. et Math.Spé. au Lycée Saint-Louis de 1963 à

FIGURE 1: Christian Lair, à Jussieu, dans la salle des profs du DAEU, en 2007

1965. Il a été étudiant à la faculté des sciences à Jussieu (université de Paris) en 1965, où, dès 1969 il est devenu l'un des assistants de Charles Ehresmann.
En 1970 il a soutenu à Paris une thèse de 3ème cycle intitulée *Construction d'esquisses. Transformations naturelles généralisées* [1].
Il a obtenu le doctorat d'État es-sciences mathmatiques en 1977, le 30 juin, à l'Université de Picardie (aujourd'hui Université de Picardie Jules Verne), avec une thèse intitulée *L'esquissabilité des structures algébriques*, constituée d'une série d'articles, ici en références de [5] à [18], formant un texte de 460 pages. Le jury de cette thèse était composé de : Andrée Ehresmann, Charles Ehresmann, Jean Bénabou, Luc Boasson, Jacques Dixmier, Gregory Max Kelly.
Il a fait toute sa carrière, d'enseignant et de chercheur, à l'université Paris 7 Denis Diderot, où, comme conférencier ou comme organisateur, il a participé à la tenue de nombreux séminaires. Il a pris sa retraite en 2010. Il est décédé le 25 septembre 2020 à Nanterre.

2. Relations et influences

Christian Lair a tenu dans la communauté catégoricienne en France un rôle important, comme le montre immédiatement les relations et influences que l'on peut relever à travers sa bibliographie donnée ici de [1] à [66]. Il a environ 63 publications ou pré-publications, dont 23 articles en collaborations avec les mathématiciens suivants : François Foltz [11], [12], [18], [23], René Guitart [24], [25], [27], [28], Max Kelly [23], Laurent Coppey [32], [33], [39], [43], Claude Henry [60], [63], Dominique Duval [48], [40], [50]-[53], [46]-[48], [56]-[58], [61], Jean-Claude Reynaud [57], [61], Catherine Oriat [57], Hélène Kirchner [58], Jean-Guillaume Dumas [61].

Son influence s'est développée à travers les directions de travaux qu'il a entreprises. Il a été directeur de 5 thèses, celles de Claude Henry (Sur quelques problèmes de plongement en algèbre, 1983), François Mouen (Sur la caractérisation sémantique des catégories de structures, 1984), André Silga (Sur les produits tensoriels extérieurs de structures algébriques, 1986), Monique Mathieu (Extensions de théories de Lawvere,1991), Florence Cury (La suffisante complétude connexe, 1997, thèse soutenue à titre posthume). On peut trouver ces thèses sur le site NUMDAM dans la revue *Diagrammes*, dont Christian Lair était l'un des co-fondateurs et co-directeurs.

Christian Lair a aussi collaboré à 4 autres thèses :

Il a travaillé à propos de sa thèse de 3ème cycle avec Florence Cury (Graphes multiplicatifs enrichis, 1976). Il a en 1987 dirigé le mémoire de DEA de Pierre Ageron et Christian Even, puis a assuré la direction effective de la thèse d'Ageron (Structure des logiques et logique des structures. Logiques, catégorie, esquisses,1991), dont le directeur officiel était Jean-Yves Girard. Après la soutenance, Lair et Ageron ont poursuivi pendant plusieurs années une collaboration qui a résulté en une série d'articles rédigés et signés soit par l'un, soit par l'autre, dont plusieurs dans la revue *Diagrammes*.

Plus récemment, il a aussi collaboré pour leurs thèses, et certainement orienté celles-ci, avec Jean-Pierre Laffineur (Esquisses et difféologies, 2018) et avec Alain Molinier (Théories du premier ordre vs esquisses d'Ehresmann, 2019).

Quand on regarde l'ensemble des travaux ci-dessus évoqués, on constate qu'ils portent tous, comme déjà les travaux de Christian au moment de ses thèses en 1970 et en 1977, sur la théorie des esquisses, son développement, ses applications.

Nous allons en évoquer la nature maintenant, mais aussi nous renvoyons aux conférences que Christian a enregistrées [65] [66]. On y appréciera la clarté de l'exposition. On devra aussi se reporter en complément immédiat aux thèses dont il s'est occupé — indiquées ci-dessus.

3. La problématique des esquisses

Au départ il y a la notion d'*esquisse* introduite par Ehresmann, à savoir un $\sigma = (\mathcal{C}, \mathcal{P}, \mathcal{I})$ où $\mathcal{C}$ est une catégorie (ou un graphe multiplicatif) munie de la donnée d'une petite famille $\mathcal{P}$ de petits cônes projectifs p, et d'une petite famille $\mathcal{I}$ de petits cônes inductifs i. On appelle réalisation ou modèle de σ un foncteur $M : \mathcal{C} \to \mathcal{K}$ tel que pour tout $p \in \mathcal{P}$, Mp soit un cône limite projective, et, pour tout $i \in \mathcal{I}$, Mi soit un cône limite inductive. Les morphismes entre modèles M et N sont les transformations naturelles $t : M \Rightarrow N$. On désigne par Mod$(\sigma) = \mathcal{M}$ la catégorie de ces modèles quand $\mathcal{K} = \mathrm{Ens}$, catégorie qui est dite *esquissée* par σ. Si de plus on dispose d'une réalisation d'une esquisse σ vers une esquisse σ', soit un foncteur $R : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ envoyant les éléments de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}'$, et ceux de $\mathcal{I}$ dans $\mathcal{I}'$, le foncteur

$$\mathrm{Mod}(R) : \mathrm{Mod}(\sigma') \to \mathrm{Mod}(\sigma) : M' \to M' \circ R$$

est dit *esquissé* par R.

Alors pour un "amateur d'esquisses" plusieurs problématiques interagissent, suivant deux directions.

La problématique fondamentale ou "méthode" est de chercher systématiquement à rapporter les propriétés syntaxiques de σ ou de R, aux propriétés sémantiques de $\mathrm{Mod}(\sigma)$ ou de $\mathrm{Mod}(R)$, er réciproquement.

Pour ce faire il faudra déployer la théorie des esquisses pour elle-même, avec pour clé la question des existences de limites et de colimites, et des propriétés de commutations de ces limites entre elles ; et, partant, des théorèmes de complétions ou d'existence de structures libres.

Nous déclinerons ces deux directions en quelques problèmes, et sans tenir compte ici des travaux sur ces questions d'autres chercheurs, nous pointons dans la bibliographie de Christian Lair quelques articles y répondant.

1. Bien entendu, si une catégorie $\mathcal{M}$ est esquissable, elle peut l'être de plusieurs façons, et nous avons un problème à la Morita : étant données deux esquisses σ et σ', trouver des conditions syntaxiques suffisantes pour que $\mathrm{Mod}(\sigma) \simeq \mathrm{Mod}(\sigma')$. En particulier, étant donnée σ esquissant $\mathcal{M}$, trouver σ' esquissant aussi $\mathcal{M}$, mais meilleure, par exemple minimale, ou comportant des symétries dans $\mathcal{M}$: [7], [13], [14], [15].
2. Esquisser des "constructeurs syntaxiques" permettant par extension d'obtenir des constructeurs dans $\mathcal{M}$, par exemple des produits tensoriels : [11], [12], [18], où les produits tensoriels sont "esquissés", et encore : [23].
3. Modifier une esquisse pour assouplir ou démultiplier les spécifications des objets, qui sont alors changées, ce qui donne lieu à une nouvelle

catégorie de modèles : [6], [16]. Également, notamment dans l'étude des structures non-algébriques, modifier les notions de morphismes sans pour autant changer les objets, autrement dit il faut pouvoir esquisser indépendamment les objets et les esquisses : [25].

4. Pour un foncteur esquissé $U = \mathrm{Mod}(R) : \mathrm{Mod}(\sigma') \to \mathrm{Mod}(\sigma)$ déterminer si ce foncteur admet un adjoint L, un co-adjoint R : [19], s'il est triplable (monadique) : [20], [33].
5. Étant donné un foncteur esquissé U ayant un adjoint L, et M un objet de $\mathrm{Mod}(\sigma)$, déterminer des conditions syntaxiques pour que le morphisme universel $\eta_M : M \to UL(M)$ soit un monomorphisme (problème dit de plongement) : [21], [22].
6. Construire un substitut à l'adjoint qu'un foncteur esquissé n'a pas en général (construction dite des diagrammes localement libres ou DLL) : [24], [27].
7. Préciser, par rapport aux descriptions logiques usuelles par formules du 1er ordre, quels types de théories sont esquissables : [28].
8. Caractériser complètement d'un point de vue sémantique les catégories esquissables (notion de catégorie modelable ou accessible) : [36].
9. Généraliser les esquisses : [38], [41], [42].
10. Pour les différentes catégories esquissables, c'est-à-dire accessibles d'après [36], préciser la correspondance entre propriétés de l'esquisse et propriétés de la catégorie des modèles : [44] à [47].
11. Donner des principes de combinaisons de catégories esquissables : [60], [63].
12. Expliquer l'utilité des esquisses pour la spécification de données en théorie de la programmation : [48], [50] à [53], [56] à [58], [61].

Références

[1] Constructions d'esquisses. Transformations naturelles généralisées (Thèse de 3ème cycle), *Esquisses Math.* 2, Paris, 1970.

[2] Foncteurs structurés compatiblement engendrant et à adjoints compatibles, C.R.A.S., 271, Paris (juil. 1970), 122-125.

[3] Transformations H^*-naturelles et H^*-quintettes, C.R.A.S., 271, Paris (juil.1970), 213-216.

[4] Commutations des limites généralisées, C.R.A.S., 271, Paris (août 1970), 301-304.

[5] Conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une catégorie soit fortement ou très fortement spécifiable, C.R.A.S., 273, Paris (oct. 1971), 596-598.

[6] Structures n-uples de Hurewicz, C.R.A.S., 273, Paris (oct. 1971), 700-703.

[7] Idées et maquettes de structures algébriques, *Cahiers Top. Géo. Diff.*, XII-1 (1971), 29-55.

[8] Foncteurs d'omissions de structures algébriques, C.R.A.S., 273, Paris (sept. 1971), 487-490.

[9] Foncteurs d'omissions de structures algébriques, *Cahiers Top. Géo. Diff.*, XII-2 (1971), 147-186.

[10] Morphismes et structures algébriques, *Categories and commutative algebra*, *CIME Summer Schools* 58, Varenna, Italy, 1971.

[11] (avec F. Foltz) Fermeture standard des catégories algébriques, C.R.A.S., 276, Paris (fev. 1973), 515-518.

[12] (avec F. Foltz) Fermeture standard des catégories algébriques, *Cahiers Top. Géo. Diff.*, XIII-3 (1972), 275-307.

[13] Structures algébriques duales, involutives et commutatives, C.R.A.S., 276, Paris (juin 1973), 1647-1650.

[14] Dualité pour les structures algébriques esquissées, in *Colloque sur l'algèbre des catégories. Amiens - 1973*, in *Cahiers Top. Géo. Diff.*, 14-2 (1973), 153-223, 192-193.

[15] Dualité pour les structures algébriques esquissées, *Cahiers Top. Géo. Diff.*, XV-4 (1973), 353-376.

[16] Algorithmes de n-arisation pour les structures algébriques esquissées, C.R.A.S., 278, Paris (juin 1974), 279-283.

[17] Étude générale de la Catégorie des Esquisses, *Esquisses Math.* 23, Paris, 1975.

[18] (avec F. Foltz) Fermeture standard des catégories algébriques II, *Cahiers Top. Géo. Diff.*, XVIII-1 (1977), 3-60.

[19] Conditions syntaxiques d'existence de co-adjoinrs aux foncteurs algébriques, *Diagrammes*, tome 1 (1979), 18 p.

[20] Condition syntaxique de triplabilité d'un foncteur algébrique esquissé *Diagrammes*, tome 1 (1979), 16 p.

[21] Conditions syntaxiques de plongement. I. Prolongements de foncteurs et extensions de Kan, *Diagrammes*, tome 2 (1979), 12 p.

[22] Conditions syntaxiques de plongement. II. Prolongements de faisceaux et faisceaux associés, *Diagrammes*, tome 3 (1980), 29 p.

[23] (avec F. Foltz et G. M. Kelly) Algebraic categories with few monoïdal biclosed structures or none, *Journal of Pure and Applied Algebra* 17 (1980) n° 2, 171-177.

[24] (avec R. Guitart) Calcul syntaxique des modèles et calcul des formules internes, *Diagrammes*, tome 4 (1980), 17 p.

[25] (avec R. Guitart) Critères de rigidification des morphismes souples entre structures internes, *Diagrammes*, tome 5 (1981), 17 p.

[26] Catégories modelables et catégories esquissables, *Diagrammes*, tome 6 (1981), 20 p.

[27] (avec R. Guitart) Existence de diagrammes localement libres, *Diagrammes*, tome 6 (1981), 13 p.

[28] (avec R. Guitart) Limites et co-limites pour représenter les formules, *Diagrammes*, tome 7 (1982), 24 p.

[29] Diagrammes localement libres : extensions de corps et théorie de Galois, *Diagrammes*, tome 10 (1983), 17 p.

[30] Sesqui-monades et monades locales, *Diagrammes*, tome 9 (1983), 32 p.

[31] Diagrammes localement libres : extensions de corps et théorie de Galois, *Diagrammes*, tome 10 (1983), 17 p.

[32] (avec L. Coppey) Leçons de théorie des esquisses [partie I : Leçons 1-2-3], *Diagrammes*, tome 12 (1984), 51 p.

[33] (avec L. Coppey) Algébricité, monadicité, esquissabilité et non-algébricité, *Diagrammes*, tome 13 (1985), 1-112.

[34] À propos de "Toposes, Triples and Theories" de Messieurs M. Barr et C.Wells, *Diagrammes*, tome 15 (1986), 20 p.

[35] *Théories, triples et topos*, Cours de DEA, 1986-1987, fasc.I : Généralités, fasc. 2 : Catégories axiomatisantes. Université Paris 7.

[36] Catégories qualifiables et catégories esquissables, *Diagrammes*, tome 17 (1987), 1-153.

[37] Diagrammes structurés de modèles, *Diagrammes*, tome 18 (1987), 30 p.

[38] Trames et sémantiques catégoriques des systèmes de trames, *Diagrammes*, tome 18 (1987), 47 p.

[39] (avec L. Coppey) Leçons de théorie des esquisses [partie II : Leçons 4-5-6], *Diagrammes*, tome 19 (1988), 68 p.

[40] Lax-colimites structurées, *Diagrammes*, tome 20 (1988), 90 p.

[41] Éléments de théorie des patchworks (I), *Diagrammes*, tome 29 (1993), 1-29.

[42] Des graphes aux patchworks via les esquisses et les trames, *Catégories, algèbres, esquisses et néo-esquisses. Actes des journées de Caen*, 27-30 sept. 1994, 5-10.

[43] (avec L. Coppey) À la mémoire de Florence Cury (1952-95), *Cahiers Top. Géo. Diff. Cat.*, 36-4 (1995), 371-381.

[44] Sur les genres d'esquissabilité des catégories modelables (accessibles) possédant les limites d'indexations finies (resp. finies et non vides, finies et connexes, finies et connexes et non vides), *Diagrammes*, tome 35 (1996), 53-90.

[45] Sur le genre d'esquissabilité des catégories modelables (accessibles) possédant les produits de deux, *Diagrammes*, tome 35 (1996), 25-52.

[46] Sur le genre d'esquissabilité des catégories modelables (accessibles) possédant un objet terminal, *Diagrammes*, tome 35 (1996), 2-23.

[47] Sur le profil d'esquissabilité des catégories modelables (accessibles) possédant les noyaux, *Diagrammes*, tome 38 (1997), 19-78.

[48] (avec D. Duval) Toward Soft Typing in Computer Algebra. Rapport de recherches 1998-07, Laco, Univ. Limoges, 53 p.

[49] Systèmes tensoriels et systèmes enrichis, *Diagrammes*, tome 43-44 (2000), 3-48.

[50] (avec D. Duval) Mosaics for Specifications with Implicit State. Rapport de recherches 2000-02, Laco, Univ. Limoges, 17 p.

[51] (avec D. Duval) Esquisses et spécifications. Guide de l'utilisateur. Rapport de recherches 2000-03, Laco, Univ. Limoges, 61 p. Rapport de recherches 2000-04, Laco, Univ. Limoges, 60 p.

[52] (avec D. Duval) Esquisses et spécifications. Manuel de référence. Rapport de recherches 1999-01, Laco, Univ. Limoges, 68 p. 2000-05, 60 p., 2000-06, 66p., 2000-07, 66 p.

[53] (avec D. Duval) Esquisses et specifications. Manuel de référence. Quatrième partie Laboratoire IMAG-LMC (2001), 69 p.

[54] Éléments de théorie des esquisses. Section 1 : graphes à composition, *Diagrammes*, tome 45-46 (2001), 3-33.

[55] Éléments de théorie des esquisses. Section 2 : systèmes tensoriels et systèmes enrichis de graphes à composition, *Diagrammes*, tome 47-48 (2002), 3-34.

[56] (avec D. Duval) Diagrammatic Specifications, Rapport de recherche, IMAG-LMC, n° 1043 (2002).

[57] (avec D. Duval, C.Oriat, J.-C. Reynaud) A zooming process for specifications with an application to exceptions, Rapport de recherche, IMAG-LMC, n° RR-1055-I (2003).

[58] (avec D. Duval, H. Kirchner) Subtypes and subsorts in overloaded specifications, Rapport de recherche, IMAG-LMC, n° RR-1058-I (2003).

[59] Éléments de théorie des esquisses. Section 3 : esquisses, *Diagrammes*, tome 49-50 (2003), 3-58.

[60] (avec C. Henry) Sur certaines sous-catégories non pleines des catégories de modèles. *Diagrammes*, tome 59-60 (2008), 26+36+33 pages.

[61] (avec D. Duval, J.-C. Reynaud, J.-G. Dumas) Logiques diagrammatiques et effets de bord, Groupe de travail équipe PPS, Univ. Paris 7 (2008).

[62] Éclatement de modèles d'esquisses et applications, *Diagrammes*, tome S 67-68 (2012), 239-248.

[63] (avec C. Henry) Sur l'esquissabilité des lax-limites et de certaines lax-colimites de catégories esquissables, *Diagrammes*, tome 71+72 (2014), pp. 1-50.

[64] Sur l'esquissabilité des lax-limites, etc. (suite), à paraître dans *Diagrammes*.

[65] [*vidéo en ligne*] Diagrammes localement libres, Séminaire CLE, parties des exposés des 19-12-2012 et 9-01-2013.
https ://sites.google.com/site/logiquecategorique/Contenus/c-lair

[66] [*vidéo en ligne*] La théorie des Esquisses de Charles Ehresmann et l'étude diagrammatique des structures mathématiques. Séminaire Math-Philo 2019 (ENS Ulm). https ://www.youtube.com/watch ?v=zfN4Enr1bLw

A. Ehresmann : LAMFA, Univ. Picardie Jules Verne, 80039 Amiens, France
ehres@u-picardie.fr.
R. Guitart : Univ. Paris Diderot, 75013 Paris, France.
rene.guitart@orange.fr