CAHIERS DE TOPOLOGIE ET GEOMETRIE DIFFERENTIELLE CATEGORIQUES

VOLUME LXIII-2

UNE CLASSE D'EXEMPLES D'∞-CATÉGORIES FAIBLES AU SENS DE BATANIN

Jacques PENON

Résumé. Grâce à la pureté de la monade $\mathbb{B}$ de Batanin (établie dans [17]), nous montrons que toute pseudo-algèbre stable (voir la définition 1.3) pour la monade $\hat{\omega}$ des ∞-catégories strictes (étendue à la 2-catégorie des catégories globulaires) est munie d'une structure d'algèbre sur $\hat{\mathbb{B}}$ (l'extension de $\mathbb{B}$ à la 2-catégorie des catégories globulaires).

Abstract. Thanks to the purity of the Batanin's monad $\mathbb{B}$ (established in [17]), we prove that any stable pseudo-algebra (see the definition 1.3) for the monad $\hat{\omega}$ of the strict ∞-categories (extended to the 2-category of globular categories) is equipped with a structure of algebra on $\hat{\mathbb{B}}$ (which is the extension of $\mathbb{B}$ for the 2-category of globular categories).

Keywords. Weak ω-category. Globular set. Cartesian monad. Operad. Tree. Syntax.

Mathematics Subject Classification (2010). 18D05.

Table des matières

Introduction

Lorsqu'il y a une vingtaine d'années A.Burroni nous avait initié aux multi-spans (voir [9], [12], [1] et [2]) il nous avait affirmé qu'ils devaient former une ∞-catégorie faible. Seulement, à l'époque, on n'avait pas encore à notre disposition de définition précise d'∞-catégories faibles. Plus tard, après en avoir proposé une (voir [16]), on s'est tout naturellement demandé si les multi-spans n'en constituaient pas un exemple significatif. Comme ces ∞-catégories faibles (appelées prolixes) sont des algèbres sur une monade construite avec des techniques syntaxiques, la question se posait de savoir si on ne pouvait pas appliquer ce nouvel outillage pour démontrer la "conjecture d'A.Burroni". Finalement une preuve de ce type a pu être mise au point. Mais celle-ci s'appuyait sur le fait que la monade $\mathbb{P}$ des prolixes (dans sa version non réflexive - voir [3] et [13]) devait vérifier une propriété très forte dite de "pureté" (voir [17] ou encore la section 1). Hélas ! un peu plus tard, il s'est avéré qu'il n'en était rien (voir [17], deuxième partie, section 3). Il restait alors la solution de fabriquer une nouvelle monade, sur le modèle de $\mathbb{P}$, toujours avec des techniques syntaxiques, qui puisse être pure. Une telle monade $\mathbb{B}$ fut donc construite et on s'est aperçu ensuite qu'elle n'était autre que la monade de Batanin (voir [17], deuxième partie, section 5). Il ne nous restait plus alors qu'à adapter l'ancienne preuve, pour $\mathbb{P}$, à la nouvelle monade, pour obtenir le résultat escompté. Dans l'énoncé du théorème obtenu, on formule en fait une hypothèse beaucoup plus générale en remplaçant les catégories de multi-spans par des pseudo-algèbres stables sur la monade $\hat{\omega}$ (i.e. le prolongement, à la 2-catégorie $\mathbb{C}G$ des catégories globulaires, de la monade ω sur $\mathbb{G}lob$ des ∞-catégories strictes). On sait en effet que les multi-spans forment une pseudo-algèbre sur $\hat{\omega}$ (voir [2], [22]). Enfin la "stabilité" d'une catégorie globulaire est une propriété générale (voir la section

1) que satisfait sans problème l'exemple formé par les multi-spans.

Remerciements

Pour terminer, je voudrai remercier le comité scientifique de : Category theory 2014, organisé à Cambridge, puisqu'il m'a permis d'exposer pour la première fois en publique les grandes lignes de ce qui deviendra cet article.
Je tiens aussi à remercier le referee de cet article qui m'a suggéré de nouveaux concepts (comme la catégorie $UDec(\mathbb{M})$ ou les ct-catégories) pour rendre mon travail plus compréhensible.
Toute ma gratitude encore à C.Kachour car c'est lors d'un échange autour de ses préoccupations mathématiques du moment que s'est opéré chez moi un déclic qui fut à l'origine des travaux présentés ici.
Mes pensées vont encore à M.Cordier qui m'a, pour la première fois, fait connaître les publications de M.Batanin sur le domaine des catégories supérieures. Je lui en suis tout particulièrement reconnaissant.
Merci enfin à Nicole car, en prenant en charge beaucoup de tâches qui en réalité me sont assignées, elle a pu créer les conditions propices à la réalisation de ce travail.

1. Position du problème

1.1 L'exemple des multi-spans

• Rappelons qu'un ensemble globulaire est un préfaisceaux sur la catégorie $\underline{Gl}$ (i.e. un foncteur $\underline{Gl}^{op} \to \mathbb{E}ns$) où $\underline{Gl}$ a pour objets les entiers naturels et où les morphismes :

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r, shift left, "d_0^0"] \arrow[r, shift right, "d_0^1"'] & 1 \arrow[r, shift left, "d_1^0"] \arrow[r, shift right, "d_1^1"'] & 2 \arrow[r, shift left, "d_2^0"] \arrow[r, shift right, "d_2^1"'] & 3 \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & .... \end{tikzcd}$$

...vérifient les équations :

$$\forall k \in [2] = \{0,1\}, \forall j \in [n] = \{0,...,n-1\},\ d_{j+1}^0.d_j^k = d_{j+1}^1.d_j^k.$$

Remarque 1.1. : On a une équivalence de catégorie $[\underline{Gl}^{op}, \mathbb{E}ns] \simeq \mathbb{G}lob$ (où $\mathbb{G}lob$ est défini dans [17] et dans cet article au 2.1). Dans la suite de cet article nous identifierons ces deux catégories.

En termes élémentaires, un ensemble globulaire $\mathbb{G}$ consiste en une suite d'ensembles G_n ainsi que des fonctions sources et buts comme suit :

$$G_0 \underset{\partial_0^1}{\overset{\partial_0^0}{\leftleftarrows}} G_1 \underset{\partial_1^1}{\overset{\partial_1^0}{\leftleftarrows}} G_2 \underset{\partial_2^1}{\overset{\partial_2^0}{\leftleftarrows}} G_3 \leftleftarrows ....$$

...satisfaisant les relations de globularité $\partial_j^k.\partial_{j+1}^0 = \partial_j^k.\partial_{j+1}^1$.Une catégorie globulaire est un foncteur $\underline{Gl}^{op} \to \mathbb{C}at$. La 2-catégorie $[\underline{Gl}^{op}, \mathbb{C}at]$ des catégories globulaires peut être identifiée à la 2-catégorie des catégories internes à la catégorie des ensembles globulaires $[\underline{Gl}^{op}, \mathbb{E}ns]$.

• Il y a deux monades $\omega = (\omega, \eta, \mu)$ et $\mathbb{B} = (B, , \eta, \mu)$ sur $[\underline{Gl}^{op}, \mathbb{E}ns]$ (voir [2]). Les algèbres sur ω sont les ∞-catégories strictes et les algèbres sur $\mathbb{B}$ sont les ∞-catégories faibles telles que définies dans [2]. En outre, il y a un morphisme de monade $b : \mathbb{B} \to \omega$.

Étant donné que ces monades sont cartésiennes on peut les appliquer aux catégories internes donnant ainsi des 2-monades $\hat{\omega}$ et $\hat{\mathbb{B}}$ sur $[\underline{Gl}^{op}, \mathbb{C}at]$ et, de la même manière, b peut être étendu à $\hat{b} : \hat{\mathbb{B}} \to \hat{\omega}$. Notez que les algèbres strictes de $\hat{\omega}$ (resp.$\hat{\mathbb{B}}$) peuvent être idenfiées aux catégories internes dans les algèbres de ω (resp.$\mathbb{B}$).

• Il y a une catégorie globulaire particulière $Span : \underline{Gl}^{op} \to \mathbb{C}at$ dont la valeur sur les objets est donnée par $Span_n = [(\underline{Gl}/n)^{op}, \mathbb{E}ns]$ et, considérée comme une catégorie interne dans $[\underline{Gl}^{op}, \mathbb{E}ns]$, a un objet des objets $|Span|$ qui est décrit par $|Span|_n = Ob(Span_n)$. Ainsi $|Span|$ est un ensemble globulaire dont les 0-cellules sont les ensembles, les 1-cellules sont les spans d'ensembles, les 2-cellules sont les spans de spans etc. Via des produits fibrés itérés on obtient une structure
d'$\hat{\omega}$-pseudo-algèbre sur $Span$.(voir [2] et [22]).

• Le but de cet article est de montrer le théorème suivant :

Théorème 1.2. : L'ensemble globulaire $|Span|$ a une structure de $\mathbb{B}$-algèbre.

Pour y parvenir nous aurons besoin d'un "lemme clé" que nous allons essayer de formuler maintenant. Au lieu de nous focaliser sur $Span$, on va élargir le propos et s'interesser à une classe particulière d'$\hat{\omega}$-pseudo-algèbres. Celles qui sont stables. Ce terme s'applique en fait plus généralement aux catégories globulaires.

Définition 1.3. : On dira qu'une catégorie globulaire $\mathbb{G}$ est *stable* si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le foncteur canonique $(\partial_n^1, \partial_n^0) : G_{n+1} \to \bar{\bar{G}}_n$ est isofibrant, où $|\bar{\bar{G}}_0| = |G_0| \times |G_0|$ et, pour $n > 0$,
$|\bar{\bar{G}}_n| = \{(x_1, x_0) \in |G_n|^2 / \forall k \in [2], \partial_{n-1}^k(x_1) = \partial_{n-1}^k(x_0)\}$.
On a la même définition pour les flèches de $\bar{\bar{G}}_n$.

On vérifie que la catégorie globulaire $Span$ est stable. On peut alors étendre le théorème précédent en le formulant ainsi :

Théorème 1.4. : Toute ω-pseudo-algèbre stable a canoniquement une structure de $\mathbb{B}$-algèbre.

Mais on peut encore affiner notre énoncé en précisant ce qu'on entend par "canoniquement".

• Le morphisme de 2-monade $\hat{b} : \hat{\mathbb{B}} \to \hat{\omega}$ produit un foncteur d'oubli ;
$U : \hat{\omega}\text{-}Ps\text{-}Alg \longrightarrow \hat{\mathbb{B}}\text{-}Ps\text{-}Alg$. entre les 2-catégories de pseudo-algèbres de $\hat{\omega}$ et $\hat{\mathbb{B}}$. Or on sait déjà (voir [15] et [18] pour le résultat de cohérence général de Power) que la $\hat{\mathbb{B}}$-pseudo-algèbre $U(Span, v, i, a)$ dont la catégorie globulaire sous-jacente est $Span$, est équivalente à une $\hat{\mathbb{B}}$-algèbre stricte. Cependant, la procédure de Power change la catégorie globulaire sous-jacente ce qui est une perte d'information non négligeable.
On se propose ici, pour chaque $\hat{\omega}$-pseudo-algèbre stable $(\mathbb{G}, v, i, a)$ d'effectuer une strictification de $U(\mathbb{G}, v, i, a)$ sans changer la catégorie globulaire sous-jacente. De façon précise :

Lemme 1.5. (lemme clé) $v' : \hat{B}(\mathbb{G}) \to \mathbb{G}$ étant la 1-cellule de structure de la $\hat{\mathbb{B}}$-pseudo-algèbre $U(\mathbb{G}, v, i, a)$, il existe une 2-cellule inversible :

$$r : w \to v' : \hat{B}(\mathbb{G}) \to \mathbb{G}$$

où la flèche w satisfait les axiomes d'une structure de $\hat{\mathbb{B}}$-algèbre stricte et où $(Id_{\mathbb{G}}, r) : U(\mathbb{G}, v, i, a) \to (\mathbb{G}, w, id, id)$ est une flèche de $\hat{\mathbb{B}}\text{-}Ps\text{-}Alg$.

La construction de r se fait par induction. Mais l'ingrédient essentiel qui permet cette induction est la pureté de la monade $\mathbb{B}$. Nous allons donc maintenant expliquer ce que nous entendons par là.

1.2 Prérequis en théorie des monades cartésiennes

(voir [4],[6],[7],[15],[23])

• Plaçons nous tout d'abord dans une catégorie $\mathbb{C}$ à limites à gauche finies, munie d'une monade cartésienne $\mathbb{M} = (M, \eta, \mu)$. On constate que le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} M(1) \arrow[r, "M\eta_1"] & M^2(1) \arrow[l, bend right, "\mu_1"'] \arrow[l, bend left, "M!"] & M^3(1) \arrow[l, "M\mu_1"'] \arrow[l, bend right, "\mu_{M1}"'] \arrow[l, bend left, "M^2!"] \end{tikzcd}$$

est sous-jacent à une catégorie interne dans $\mathbb{C}$. Dans ce qui suit, cette catégorie interne jouera un rôle central, c'est pourquoi nous la baptisons la catégorie des "décompositions de $\mathbb{M}$" et la notons $Dec(\mathbb{M})$. En fait $Dec(\mathbb{M})$ est sous-jacente à une catégorie interne dans $\mathbb{M}$-Alg. Elle s'écrit :

$$\begin{tikzcd} (M(1), \mu_1) \arrow[r, "M\eta_1"] & (M^2(1), \mu_{M1}) \arrow[l, bend right, "\mu_1"'] \arrow[l, bend left, "M!"] & (M^3(1), \mu_{M^2 1}) \arrow[l, "M\mu_1"'] \arrow[l, bend right, "\mu_{M1}"'] \arrow[l, bend left, "M^2!"] \end{tikzcd}$$

On peut aussi la voir comme une une $\hat{\mathbb{M}}$-algèbre stricte. On la notera alors $\hat{Dec}(\mathbb{M})$.

Exemple 1.6. : Lorsque, sur $\mathbb{E}ns$, $\mathbb{M} = \mathbb{M}o$ (la monade des monoïdes) $\hat{Dec}(\mathbb{M})$ est la catégorie simpliciale algébriste.

• Si on désigne par $J_{\hat{\mathbb{M}}} : \hat{\mathbb{M}}\text{-}Alg_s \hookrightarrow \hat{\mathbb{M}}\text{-}Alg_l$ l'inclusion de la 2-catégorie des algèbres strictes et morphismes stricts sur $\hat{\mathbb{M}}$ dans la 2-catégorie des algèbres strictes et des morphismes laxs. Alors $\hat{Dec}(\mathbb{M})$ est l'objet libre, pour $J_{\hat{\mathbb{M}}}$, associé à l'objet terminal $\mathbb{I}$. En appliquant ce résultat à la monade $\mathbb{M}o$, sur $\mathbb{E}ns$, on retrouve le fait que la catégorie simpliciale algébriste est le monoïde classifiant. Dans [5] une proprité universelle analogue a été montrée pour la catégorie globulaire Ω des arbres (où dans ce cas $\mathbb{M} = \omega$).

• Plus généralement, si $\mathbb{K}$ est une 2-catégorie et $\mathbb{S}$ une 2-monade sur $\mathbb{K}$, dans des conditions très faibles (voir [6]) le foncteur inclusion $\mathbb{S}$-$Alg_s \hookrightarrow \mathbb{S}$-$Alg_l$ admet un 2-adjoint à gauche $(-)^+_{\mathbb{S}}$. Si on note les composantes de l'unité et de la co-unité de cette 2-adjonction sur une $\mathbb{S}$-algèbre stricte A par :

$$p_A : A \to A^+_{\mathbb{S}} \ , \ q_A : A^+_{\mathbb{S}} \to A$$

(Notons que p_A est un morphisme lax de $\mathbb{S}$-algèbres et q_A est strict) alors on a une adjonction

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, bend right, "p_A"'] \arrow[r, phantom, "\perp"] & A^+_{\mathbb{S}} \arrow[l, bend right, "q_A"'] \end{tikzcd}$$

dans $\mathbb{S}$-Alg_l avec une identité comme co-unité. Ainsi, dans le contexte d'une monade cartésienne sur $\mathbb{M}$, le morphisme $\eta_1 : 1 \to (1)^+_{\hat{\mathbb{M}}}$ est l'adjoint à droite de l'unique morphisme allant dans l'autre sens.

1.3 Monades concrètes syntaxiques

• Plaçons-nous maintenant dans la nouvelle situation suivante :
On se donne une catégorie concrète $(\mathbb{C}, U)$ (c.a.d. $\mathbb{C}$ est une catégorie et $U : \mathbb{C} \to \mathbb{E}ns$ est un foncteur fidèle) et sur $\mathbb{C}$ une monade $\mathbb{M}$.

Définition 1.7. : On dit que $(\mathbb{C}, U, \mathbb{M})$ est une *monade concrète cartésienne* si :
- $(\mathbb{C}, U)$ est une catégorie concrète où $\mathbb{C}$ est à limites à gauche finies,
- $\mathbb{M}$ est une monade cartésienne sur $\mathbb{C}$,
- U, en plus d'être fidèle, préserve les produits fibrés.

Dans ce cas, on note $UDec(\mathbb{M})$ la catégorie donnée par :

$$\begin{tikzcd} UM(1) \arrow[r, "UM\eta_1"] & UM^2(1) \arrow[l, bend right, "U\mu_1"'] \arrow[l, bend left, "UM!"] & UM^3(1) \arrow[l, "UM\mu_1"'] \arrow[l, bend right, "U\mu_{M1}"'] \arrow[l, bend left, "UM^2!"] \end{tikzcd}$$

Exemple 1.8. : Supposons que $\mathbb{M}$ soit la monade associée à une opérade globulaire et que U soit défini par

$$U : [\underline{Gl}^{op}, \mathbb{E}ns] \to \mathbb{E}ns,\ X \mapsto \coprod_{n \in \mathbb{N}} X_n$$

alors on obtient ainsi une monade cartésienne concrète et
- un objet de $UDec(\mathbb{M})$ est une opération de l'opérade correspondante,
- un morphisme $\alpha \to \beta$ dans $UDec(\mathbb{M})$ est une décomposition (d'où le choix de la dénomination $UDec(\mathbb{M})$) de l'opération α par le résultat d'une substitution d'une suite d'opérations dans l'opération β.

En reprenant ce qui précède, on obtient une adjonction

$$\begin{tikzcd} U(1) \arrow[r, bend right] \arrow[r, phantom, "\perp"] & UDec(\mathbb{M}) \arrow[l, bend right, "U(!)"'] \end{tikzcd}$$

dans $\mathbb{C}at$. Remarquons que $U(1)$ est une catégorie discrète. Or, pour une catégorie $\mathbb{C}$, se donner une adjonction $\begin{tikzcd} \mathbb{D} \arrow[r, bend right] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathbb{C} \arrow[l, bend right] \end{tikzcd}$ où $\mathbb{D}$ est une catégorie discrète, cela revient à se donner un choix d'objet final dans chaque composante connexe de $\mathbb{C}$. On peut donc envisager la situation suivante :

Définition 1.9. : 1) Notons $\mathbb{C}at_{ct}$ la catégorie dont les objets sont les catégories équipées d'un choix d'objet final pour chacune de ses composantes connexes et dont les morphismes sont les foncteurs préservant les choix d'objets finaux. Appelons *ct-catégorie* un objet de $\mathbb{C}at_{ct}$ et *ct-foncteur* un morphisme de $\mathbb{C}at_{ct}$.
2) Pour chaque $A \in |\mathbb{C}at_{ct}|$ et $x \in |A|$ on note t_x le choix d'objet final dans la composante connexe de x et par $\tau_x : x \to t_x$ l'unique morphisme.
3) On note $\mathbb{C}CMnd$ la catégorie dont les objets sont les monades cartésiennes concrètes. Un morphisme $(\mathbb{C}, U, \mathbb{M}) \to (\mathbb{C}', U', \mathbb{M}')$ se compose d'un foncteur $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}'$ qui préserve les produits fibrés et satisfait $U'F = U$ et une transformation naturelle $\phi : FM \to M'F$ faisant de (F, ϕ) un op-foncteur entre monades dans le sens de R.Street [19].

Exemple 1.10. : Notons $\mathbb{N}_{\geq}$ l'ensemble partiellement ordonné dont les éléments sont les entiers strictement positifs et dont l'ordre est donné par $\geq$. Alors $1 \in \mathbb{N}$ est l'unique objet final et $\mathbb{N}_{\geq}$ peut être considéré comme une ct-catégorie.

Proposition 1.11. : L'application $(\mathbb{C}, U, \mathbb{M}) \mapsto UDec(\mathbb{M})$ est la composante sur les objets d'un foncteur $\mathbb{C}CMnd \to \mathbb{C}at_{ct}$.

Définition 1.12. : 1) Une monade concrète cartésienne $(\mathbb{C}, U, \mathbb{M})$ est dite *syntaxique* si $UDec(\mathbb{M})$ est un ensemble ordonné et si, en plus, elle est équipée d'un ct-foncteur conservateur $\lambda : UDec(\mathbb{M}) \to \mathbb{N}_{\geq}$.
2) La relation d'ordre sur $UM(1)$ est appelée la relation de *postériorité*. Son ordre opposé (correspondant à $UDec(\mathbb{M})^{op}$) est appelé la relation *d'antériorité*. On la note "$\leq$". Ainsi, pour $t, t' \in UM(1)$, on écrira $t \leq t'$ s'il existe une flèche $t' \to t$ dans $UDec(\mathbb{M})$.

$(\mathbb{C}, U, \mathbb{M}, \lambda)$ étant une monade concrète cartésienne syntaxique, on construit, pour chaque $C \in |\mathbb{C}|$, l'application $L_C : UM(C) \to \mathbb{N}_{\geq}$ définie par $L_C = (\ UM(C) \xrightarrow{UM!} UM(1) \xrightarrow{\lambda} \mathbb{N}^*\ )$. On obtient ainsi une transformation naturelle $L : UM \to \bar{\mathbb{N}}$ où $\bar{\mathbb{N}}$ désigne le foncteur constant sur $\mathbb{N}$.

Proposition 1.13. : Sous les hypothèses prècèdentes, on a les propriètès suivantes :
$(MS1) \forall C \in |\mathbb{C}|, \forall x \in U(C),\ L_C.U\eta_C(x) = 1,$
$(MS'1) \forall C \in |\mathbb{C}|, \forall t \in UM(C),\ L_C(t) \leq 1\ \Rightarrow\ \exists x \in U\eta_C(x) = t,$
$(MS2) \forall C \in |\mathbb{C}|, \forall T \in UM^2(C),\ L_{MC}(T) \leq L_C.U\mu_C(T),$
$(MS'2) \forall C \in |\mathbb{C}|, \forall T \in UM^2(C),\ L_{MC}(T) = L_C.U\mu_C(T)\ \Rightarrow$
$\exists t \in UM(C),\ T = UM\eta_C(t),$
$(MS3)$ Pour tout $C \in |\mathbb{C}|$, l'application suivante est injective :
$(UM!_{MC}, U\mu_C) : UM^2(C) \to UM(1) \times UM(C).$

Preuve : $(MS1)$ On montre que, pour tout $u \in U(1), U\eta_1(u)$ est le plus grand élément de sa composante connexe, qui n'est autre que
$\{\theta \in UM(1)/U!_{M1}(\theta) = u\}$.
$(MS'1)$ On utilise le fait que λ est conservateur et que η est cartésienne.
$(MS2)$ Résulte de la croissance de λ.
$(MS3)$ On utilise la cartésianité de μ.

Remarque 1.14. : On montre dans [17] qu'une monade concrète cartésienne munie d'une transformation naturelle $L : UM \to \bar{\mathbb{N}}$ vérifant les propriétés $(MS1) \to (MS3)$ de la proposition précédente est syntaxique.

Exemples et contre-exemples 1.15. : 1) Les monades $\mathbb{P}$ des prolixes (voir [3] et [13]) et $\mathbb{B}$ de Batanin, sur $\mathbb{G}lob$, munies du foncteur d'oubli canonique
$U : \mathbb{G}lob \to \mathbb{E}ns$ sont des monades concrètes cartésiennes. Elles sont aussi syntaxiques en leur ajoutant l'application $\lambda = L_1$ (voir [17]).
2) La monade $\mathbb{M}o$ des monoïdes, sur $\mathbb{E}ns$, et la monade ω des ∞-catégories strictes, sur $\mathbb{G}lob$, sont cartésiennes. Elles sont aussi concrètes cartésiennes en les munissant de leur foncteur d'oubli évident. Cependant, elles ne peuvent produire de monade concrètes cartésiennes syntaxiques car la flèche

$(M!_{M1}, \mu_1) : M^2(1) \to M(1) \times M(1)$ n'est pas un monomorphisme.

1.4 Monades pures

• Avant de poursuivre notre approche des monades pures, rappelons que, dans une catégorie A quelconque, une flèche $f : x \to y$ est dite *indécomposable* quand, lors d'une factorisation $f = g.h$, g ou h sont une identité.

Définition 1.16. : 1) Soit A une ct-catégorie et $x \in |A|$. On dit que x est *primitif* quand ce n'est pas un choix d'objet final et l'unique morphisme $\tau_x : x \to t_x$ est indécomposable.
2) Une ct-catégorie A est dite *pure* quand, pour tout $x \in |A|$ qui n'est pas un choix d'objet final, le morphisme $\tau_x : x \to t_x$ se factorise à travers un unique objet primitif.
3) Une *monade pure* est une monade concrète cartésienne syntaxique $(\mathbb{C}, U, \mathbb{M}, \lambda)$ telle que la ct-catégorie $UDec(\mathbb{M})$ est pure.

• Fixons maintenant une monade concrète cartésienne syntaxique $\mathcal{M} = (\mathbb{C}, U, \mathbb{M}, \lambda)$.

Proposition 1.17. : Soit $t \in UM(1)$ tel que $\lambda(t) > 1$. Alors t est primitif dans $UDec(\mathbb{M})$ ssi :
$\forall T \in UM^2(1), U\mu_1(T) = t \Rightarrow T = U\eta_{M1}(t)$ ou $T = UM\eta_1(t)$.

<u>*Preuve*</u> : - Si t est primitif, soit $T \in UM^2(1)$ tel que $U\mu_1(T) = t$. Posons $t_0 = U\eta_1.U!_{M1}(t)$ et $t' = UM!_{M1}(T)$. Alors on a la décomposition

$$(t \to t_0) = (t \to t' \to t_0).$$

Comme $t \to t_0$ est indécomposable, on doit avoir $(t \to t') = id_t$, dans $UDec(\mathbb{M})$, ou $(t \to t') = (t \to t_0)$ ce qui s'écrit encore $T = UM\eta_1(t)$ ou $T = U\eta_{M1}(t)$.
Inversement, soit $t' \in UM(1)$ tel que $t_0 \leq t'$ et $t' \leq t$. Soit $T \in UM^2(1)$ tel que $t = U\mu_1(T)$ et $t' = UM!_{M1}(T)$. Alors, par hypothèse, $T = U\eta_{M1}(t)$ (et dans ce cas $t' = t$. Donc $t \to t' = id_t$), ou bien $T = UM\eta_1(t)$(et dans ce cas $t' = t$. Donc $t \to t' = id_t$). Ainsi t est primitif.

Proposition 1.18. : $\mathcal{M}$ est pure ssi :
$\forall t \in UM(1), \lambda(t) > 1 \Rightarrow \exists! \theta \in UM(1), \theta \leq t$ et θ est primitif.

Preuve : : Immédiat.

Définition 1.19. : Supposons $\mathcal{M}$ pure. Pour chaque objet $C \in |\mathbb{C}|$ et $t \in UM(C)$ tel que $L_C(t) > 1$ alors l'unique élément $\theta \in UM(1)$ primitif tel que $UM!_C(t) \leq \theta$ s'appelle la *composante primitive* de t et l'unique $T \in UM^2(C)$ tel que $UM!_{MC}(T) = \theta$ et $U\mu_C(T) = t$ est appelé la *décomposition primitive* de t.

Exemples et contre-exemples 1.20. : (voir [17]) 1) La monade concrète cartésienne syntaxique $(\mathbb{G}lob, U, \mathbb{P}, \lambda)$ n'est pas pure.
2) Par contre $(\mathbb{G}lob, U, \mathbb{B}, \lambda)$ est une monade cartésienne syntaxique pure.

• Nous allons consacrer maintenant le reste de cet article à la démonstration du théorème 1.4 où plus précisément du "lemme clé".

2. Démonstration du Lemme clé

2.1 Quelques rappels

Notation 2.1. : Au lieu de considérer la catégorie $[\underline{Gl}^{op}, \mathbb{E}ns]$, on préfère, dans [17] utiliser une catégorie équivalente. C'est la catégorie $\mathbb{G}lob$ dont :
- les objets $\mathbb{G}$ sont la donnée :
.. d'un ensemble G ,
.. d'une application $dim : G \to \mathbb{N}$ (Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, notons $G/n = \{c \in G / \ dim(c) > n\}$),
.. d'une famille de couples d'applications $(\partial_p^1, \partial_p^0 : G/p \to G)_{p \in \mathbb{N}}$,
vérifiant les propriétés suivantes :
$(EG1)$ $\forall c \in G, \forall p \in \mathbb{N}, \forall k \in [2], \ dim(c) > p \ \Rightarrow \ dim \ \partial_p^k(c) = p$,
$(EG2)$ $\forall c \in G, \forall p, q \in \mathbb{N}, \forall k, k' \in [2]$,
$dim(c) > p > q \ \Rightarrow \ \partial_q^k \partial_p^{k'}(c) = \partial_q^k(c)$.
- les *morphisme* $g : \mathbb{G} \to \mathbb{G}'$ sont des applications $g : G \to G'$ telles que :
$(MEG1)$ $\forall c \in G, \ dim \ g(c) = dim(c)$,
$(MEG2)$ $\forall c \in G, \forall p \in \mathbb{N}, \forall k \in [2], \ dim(c) > p \ \Rightarrow \ \partial_p^k g(c) = g\partial_p^k(c)$.

Remarque 2.2. : En fait, dans [17], les monades $\mathbb{P}$ et $\mathbb{B}$ sont définies sur $\mathbb{G}lob$. Nous continuerons donc, par la suite, à utiliser la catégorie $\mathbb{G}lob$ plutôt que $[\underline{Gl}^{op}, \mathbb{E}ns]$.

• Dans la construction par induction qui va suivre on utilise un matériel déjà donné dans [17]. Résumons succinctement en quoi consiste ce matériel et ses propriétés essentielles. Mais tout d'abord convenons de noter simplement L ce qu' on devrait écrire $L_{\mathbb{G}}$, pour un $\mathbb{G} \in |\mathbb{G}lob|$ quelconque (voir les quelques lignes précédant 1.13).

Notation 2.3. : Soient $\mathbb{G} \in |\mathbb{G}lob|$ et $n, m \in \mathbb{N}$. On pose :

$$B|_n^m(\mathbb{G}) = \{a \in B(\mathbb{G}) /\ \mathrm{L}(a) \leq n,\ \dim(a) \leq m\}.$$

Proposition 2.4. : 1) $\forall \mathbb{G} \in |\mathbb{G}lob|, \forall n, m \in \mathbb{N},\ B|_n^m(\mathbb{G}) \in |\mathbb{G}lob|$.
2) Pour toute flèche $g : \mathbb{G} \to \mathbb{G}'$ de $\mathbb{G}lob$, $B(g)$ se factorise par $B|_n^m(\mathbb{G}) \to B|_n^m(\mathbb{G}')$ dans $\mathbb{G}lob$. En faisant varier g on obtient un sous-endofoncteur, noté $B|_n^m$, de B.

Notation 2.5. : Soient $\mathbb{G} \in |\mathbb{G}lob|$ et $n, m \in \mathbb{N}$. On pose :

$$B^2|_n^m(\mathbb{G}) = \{A \in B^2(\mathbb{G}) /\ \mathrm{L}\mu_{\mathbb{G}}(A) \leq n,\ \dim(A) \leq m\}.$$

Proposition 2.6. : 1) $\forall \mathbb{G} \in |\mathbb{G}lob|, \forall n, m \in \mathbb{N},\ B^2|_n^m(\mathbb{G}) \in |\mathbb{G}lob|$.
2) Pour toute flèche $g : \mathbb{G} \to \mathbb{G}'$ de $\mathbb{G}lob$, $B^2(g)$ se factorise par $B^2|_n^m(\mathbb{G}) \to B^2|_n^m(\mathbb{G}')$ dans $\mathbb{G}lob$. En faisant varier g on obtient un sous-endofoncteur, noté $B^2|_n^m$, de B^2.

Proposition 2.7. : Soient $\mathbb{G} \in |\mathbb{G}lob|$ et $n, m \in \mathbb{N}$. Alors :
1) $\mu_{\mathbb{G}}$ se factorise par $B^2|_n^m(\mathbb{G}) \to B|_n^m(\mathbb{G})$. On la note $\mu_{\mathbb{G}}|_n^m$.
2) $(B^2|_n^m)(\mathbb{G}) \subset (B|_n^m)^2(\mathbb{G})$.

• Prolongeons maintenant ces constructions à la 2-catégorie $\mathbb{C}G = Cat(\mathbb{G}lob)$, ce qui est possible car...

Proposition 2.8. : Pour tout $(m, n) \in \mathbb{N}^2$, $B|_n^m$ et $B^2|_n^m$ commutent aux produits fibrés.

<u>Preuve</u> : - Pour $B|_n^m$: Soit $\mathbb{G}' \overset{g'}{\to} \mathbb{H} \overset{g}{\leftarrow} \mathbb{G}$ une paire de flèches de même but dans $\mathbb{G}lob$ et $\mathbb{K}$ son produit fibré. On note $\pi : \mathbb{K} \to \mathbb{G}$ et $\pi' : \mathbb{K} \to \mathbb{G}'$ les projections canoniques et P_n^m le produit fibré de la paire $B|_n^m(\mathbb{G}') \to B|_n^m(\mathbb{H}) \leftarrow B|_n^m(\mathbb{G})$. On montre que, pour tout $a \in B(\mathbb{K})$, on a l'équivalence suivante :
$(B(\pi')(a), B(\pi)(a)) \in P_n^m$ ssi $a \in B|_n^m(\mathbb{K})$. Cela entraine que la flèche canonique $B|_n^m(\mathbb{K}) \to P_n^m$ est un isomorphisme car B commute aux produits fibrés.
- Pour $B^2|_n^m$, on procède de même.

Remarque 2.9. : 1) En conséquence, les endofoncteurs $B|_n^m$ et $B^2|_n^m$ de $\mathbb{G}lob$ induisent deux nouveaux endofoncteurs $\widehat{B|_n^m}$ et $\widehat{B^2|_n^m}$ sur $\mathbb{C}G$ qui sont des sous-endofoncteurs de $\hat{B}$ et $\hat{B}^2$.
2) Comme en 2.7, on constate que, pour tout $\mathbb{G} \in |\mathbb{C}G|$ et tout $(m,n) \in \mathbb{N}^2$,
a) $\hat{\mu}_{\mathbb{G}}$ se factorise par $\widehat{B^2|_n^m}(\mathbb{G}) \to \widehat{B|_n^m}(\mathbb{G})$, on la note $\hat{\mu}_{\mathbb{G}}|_n^m$.
b) $(\widehat{B^2|_n^m})(\mathbb{G})$ est une sous-catégorie globulaire de $(\widehat{B|_n^m})^2(\mathbb{G})$.

Proposition 2.10. : Soient $\mathbb{G} \in |\mathbb{C}G|$ et $w : \widehat{B|_n^m}(\mathbb{G}) \to \mathbb{G}$ une flèche de $\mathbb{C}G$. Alors $\hat{B}(w) : \hat{B}\widehat{B|_n^m}(\mathbb{G}) \to \hat{B}(\mathbb{G})$ se factorise par $\widehat{B^2|_n^m}(\mathbb{G}) \to \widehat{B|_n^m}(\mathbb{G})$. On la note $\hat{B}(w)|_n^m$.

<u>Preuve</u> : Se vérifie facilement.

2.2 Procédure d'induction

Nous pouvons maintenant commencer la preuve du lemme clé. On se fixe une ω-pseudo-algèbre $(\mathbb{G}, v, i, a)$ dans $\mathbb{C}G$, comme il est précisé dans le lemme clé. Il nous faut construire une flèche $w : \hat{\mathbb{B}}(\mathbb{G}) \to \mathbb{G}$ et une 2-cellule inversible $r : w \to v'$ satisfaisant les conditions voulues. En d'autre termes, $v' = v.\hat{b}_{\mathbb{G}}$ et $r : w \to v.\hat{b}_{\mathbb{G}}$ doit faire commuter le diagramme suivant dans

$\mathbb{C}G(\hat{B}^2(\mathbb{G}), \mathbb{G})$:

$$\begin{tikzcd}
w.\hat{\mu}_{\mathbb{G}} \arrow[r, "r.\hat{\mu}_{\mathbb{G}}"] \arrow[d, "Id"'] & v.\hat{b}_{\mathbb{G}}.\hat{\mu}_{\mathbb{G}} \arrow[r, "Id"] & v.\hat{\mu}_{\mathbb{G}}.\hat{b}^2_{\mathbb{G}} \arrow[d, "a.\hat{b}^2_{\mathbb{G}}"] \\
w.\hat{B}w \arrow[d, "r.\hat{B}w"'] & & v.\hat{\omega}v.\hat{b}^2_{\mathbb{G}} \arrow[d, "Id"] \\
v.\hat{b}_{\mathbb{G}}.\hat{B}w \arrow[rr, "v.\hat{b}_{\mathbb{G}}.\hat{B}r"] & & v.\hat{b}_{\mathbb{G}}.\hat{B}v.\hat{B}\hat{b}_{\mathbb{G}}
\end{tikzcd}$$

Comme on l'a déjà dit, les constructions de w et r se font par induction et pour cela on construit 3 familles d'applications
$(|w^m_n| : B|^m_n(|\mathbb{G}|) \to |\mathbb{G}|)_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}, (Fl(w^m_n) : B|^m_n Fl(\mathbb{G}) \to Fl(\mathbb{G}))_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}$
et $(r^m_n : B|^m_n(|\mathbb{G}|) \to Fl(\mathbb{G}))_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}$, par induction sur $m+n$, de telle sorte qu'elles satisfassent les conditions suivantes :
$(H0)$ Pour tout $m, m', n, n' \in \mathbb{N}$ tels que $m' \le m$, $n' \le n$, alors $|w^{m'}_{n'}|$, $Fl(w^{m'}_{n'})$ et $r^{m'}_{n'}$ sont les restrictions de $|w^m_n|$, $Fl(w^m_n)$ et r^m_n.
$(H1)$ Pour tout $m, n \in \mathbb{N}$, $w^m_n = (|w^m_n|, Fl(w^m_n)) : B\hat{|}^m_n(\mathbb{G}) \to \mathbb{G}$ est un foncteur globulaire.
$(H2)$ Pour tout $m, n \in \mathbb{N}$, $r^m_n : w^m_n \to v.\hat{b}_{\mathbb{G}}.i^m_n$ est une transformation naturelle globulaire (où $i^m_n : B\hat{|}^m_n(\mathbb{G}) \to \hat{B}(\mathbb{G})$ est l'injection canonique).
$(H3)$ Pour tout $m, n \in \mathbb{N}$, $w^m_n.\hat{B}(w^m_n)|^m_n = w^m_n.(\hat{\mu}_{\mathbb{G}}|^m_n)$.
$(H4)$ Pour tout $m, n \in \mathbb{N}$, le diagramme suivant commute dans $\mathbb{C}G(B^2\hat{|}^m_n(\mathbb{G}), \mathbb{G})$:

$$\begin{tikzcd}
w^m_n.\hat{\mu}_{\mathbb{G}}|^m_n \arrow[r, "r^m_n.\hat{\mu}_{\mathbb{G}}|^m_n"] \arrow[d, "Id"'] & v.\hat{b}_{\mathbb{G}}.i^m_n.\hat{\mu}_{\mathbb{G}}|^m_n \arrow[r, "Id"] & v.\hat{\mu}_{\mathbb{G}}.\hat{b}^2_{\mathbb{G}}.\hat{B}i^m_n.j^m_n \arrow[d, "a.\hat{b}^2_{\mathbb{G}}.\hat{B}i^m_n.j^m_n"] \\
w^m_n.\hat{B}w^m_n|^m_n \arrow[d, "r^m_n.\hat{B}w^m_n|^m_n"'] & & v.\hat{\omega}v.\hat{b}^2_{\mathbb{G}}.\hat{B}i^m_n.j^m_n \arrow[d, "Id"] \\
v.\hat{b}_{\mathbb{G}}.i^m_n.\hat{B}w^m_n|^m_n \arrow[r, "Id"'] & v.\hat{b}_{\mathbb{G}}.\hat{B}w^m_n.j^m_n \arrow[r, "v.\hat{b}_{\mathbb{G}}.\hat{B}r^m_n.j^m_n"'] & v.\hat{b}_{\mathbb{G}}.\hat{B}v.\hat{B}\hat{b}_{\mathbb{G}}.\hat{B}i^m_n.j^m_n
\end{tikzcd}$$

où $j^m_n : B^2\hat{|}^m_n(\mathbb{G}) \to \hat{B}B\hat{|}^m_n(\mathbb{G})$ est l'injection canonique.
On obtient finalement w et r en recollant les w^m_n et les r^m_n.

2.3 Construction de w_n^m et r_n^m

• Pour le moment, donnons uniquement les définitions de $|w_n^m|, Fl(w_n^m)$ et r_n^m par induction sur $m+n$. Nous renvoyons le lecteur à la sous-section suivante pour la vérification des axiomes $(H_0) \to (H_4)$.

• *Le cas* $n = 1$: Soit $a \in B|_1^m(|\mathbb{G}|)$. Dans ce cas $a = \eta_{|\mathbb{G}|}(c)$ où $c \in U(\mathbb{G})$. On pose alors $|w_1^m|(a) = c$ et
$r_1^m(a) = i(c)^{-1} : c \to |v|.\eta_{|\mathbb{G}|}(c) = |v|.b_{|\mathbb{G}|}(a)$.
Si $a \in B|_1^m Fl(\mathbb{G})$ on a aussi $a = \eta_{Fl\mathbb{G}}(f)$ où $f \in UFl(\mathbb{G})$. On pose alors $Flw_1^m(a) = f$.

• *Le cas* $m = 0$: On remarque que $B|_n^0 = B|_1^0$ et donc, on pose
$|w_n^0| = |w_1^0|,\ Fl(w_n^0) = Fl(w_1^0)$ et $r_n^0 = r_1^0$.

• *Le cas* $n > 1$ *et* $m > 0$. Soit $a \in B|_n^m(|\mathbb{G}|)$ (resp. $f \in B|_n^m Fl(\mathbb{G})$).
- Si $\mathrm{L}(a) + \dim(a) < n + m$ (resp. $\mathrm{L}(f) + \dim(f) < n + m$), après avoir noté $n' = \mathrm{L}(a)$ et $m' = \dim(a)$ (resp. $n' = \mathrm{L}(f)$ et $m' = \dim(f)$), on pose :
$|w_n^m|(a) = |w_{n'}^{m'}|(a)$ et $r_n^m(a) = r_{n'}^{m'}(a)$ (resp. $Flw_n^m(f) = Flw_{n'}^{m'}(f)$).
- Si $\mathrm{L}(a) + \dim(a) = n + m$ (resp. $\mathrm{L}(f) + \dim(f) = n + m$). Alors $\mathrm{L}(a) = n$ et $\dim(a) = m$ (resp. $\mathrm{L}(f) = n$ et $\dim(f) = m$). Considérons plusieurs cas :
.. *cas où* a *est primitif* : Pour chaque $k \in [2]$, posons $a_k = \partial_{m-1}^k(a)$. On a $a_k \in B|_n^{m-1}|\mathbb{G}|$ et $(r_n^{m-1}(a_1), r_n^{m-1}(a_0)) \in \overline{\overline{UFl\mathbb{G}}}_{m-1}$, mais aussi
$\mathrm{d}^1(r_n^{m-1}(a_1), r_n^{m-1}(a_0)) = (\partial_{m-1}^1, \partial_{m-1}^0)(|v|.b_{|\mathbb{G}|}(a))$ (où d^1 et d^0 désignent le but et la source d'une flèche). Alors $\mathbb{G}$ étant stable, on peut poser
$r_n^m(a) = ch(|v|.b_{|\mathbb{G}|}(a), (r_n^{m-1}(a_1), r_n^{m-1}(a_0)))$ (où $ch(-)$ désigne un choix d'isomorphisme provenant de la stabilité de $\mathbb{G}$) et $|w_n^m|(a) = \mathrm{d}^0 r_n^m(a)$.
.. *cas où* f *est primitif* : Pour chaque $k \in [2]$, posons $a^k = \mathrm{d}^k(f)$. Les a^k sont eux-même primitifs et $\mathrm{L}(a^k) = n,\ \dim(a^k) = m$. Alors on peut définir $Fl(w_n^m)(f)$ comme étant le composé suivant (dans $\mathbb{G}$) :

$$|w_n^m|(a^0) \xrightarrow{r_n^m(a^0)} |v|.b_{|\mathbb{G}|}(a^0) \xrightarrow{Flv.b_{Fl\mathbb{G}}(f)} |v|.b_{|\mathbb{G}|}(a^1) \xrightarrow{r_n^m(a^1)^{-1}} |w_n^m|(a^1)$$

.. *cas où* a *n'est pas primitif* : Soit $A \in B^2|\mathbb{G}|$ la décomposition primitive de a (voir 1.19). On voit que $A \in BB|_{n-1}^m|\mathbb{G}|$ et $B|w_{n-1}^m|(A) \in B|_{n-1}^m|\mathbb{G}|$.

On peut alors poser :

$$|w_n^m|(a) = |w_{n-1}^m|.B|w_{n-1}^m|(A)$$

D'un autre côté on voit que $Br_{n-1}^m(A) \in B|_{n-1}^m Fl(\mathbb{G})$ et que $B|v|.Bb_{|\mathbb{G}|}(A)$ est dans $B|_{n-1}^m|\mathbb{G}|$. On peut alors définir $r_n^m(a) : |w_n^m|(a) \to |v|.b_{|\mathbb{G}|}(a)$ comme étant le composé suivant dans $\mathbb{G}$:

$$\begin{tikzcd}
{|w_n^m|(a)} \arrow[r, "r_n^m(a)"] \arrow[d, "Id"'] & {|v|.b_{|\mathbb{G}|}(a)} \\
{|w_{n-1}^m|.B|w_{n-1}^m|(A)} \arrow[d, "Flw_{n-1}^m.Br_{n-1}^m(A)"'] & {|v|.\mu_{|\mathbb{G}|}.b^2_{|\mathbb{G}|}(A)} \arrow[u, "Id"'] \\
{|w_{n-1}^m|.B|v|.Bb_{|\mathbb{G}|}(A)} \arrow[dr, "r_{n-1}^m.B|v|.Bb_{|\mathbb{G}|}(A)"'] & {|v|.\omega|v|.b^2_{|\mathbb{G}|}(A)} \arrow[u, "(a.b^2_{|\mathbb{G}|}(A))^{-1}"'] \\
 & {|v|.b_{|\mathbb{G}|}.B|v|.Bb_{|\mathbb{G}|}(A)} \arrow[u, "Id"']
\end{tikzcd}$$

.. *cas où* f *n'est pas primitif* : De même que pour a, on considère $F \in B^2Fl(\mathbb{G})$ la décomposition primitive de f. On voit encore que $F \in BB|_{n-1}^m Fl(\mathbb{G})$ et que $BFlw_{n-1}^m(F) \in B|_{n-1}^m Fl(\mathbb{G})$. On peut alors poser :

$$Flw_n^m(f) = Flw_{n-1}^m.BFlw_{n-1}^m(F).$$

2.4 Fin de la preuve

• Seule cette partie utilise tout le matériel donné dans [17]. Nous renvoyons donc le lecteur à la consultation de cet article.

• *Le cas* $n = 1$. La vérification des conditions $(H0) \to (H4)$ est longue mais elle se fait sans difficulté (Pour $(H4)$ on utilise un axiome des pseudo-algèbres).

• *Le cas* $m = 0$: Les conditions $(H0) \to (H4)$ ont déjà été vérifiées car $B|_n^0 = B|_1^0$.

• Dans le cas où $n > 1$ et $m > 0$, il nous faut montrer les conditions $(H0) \to (H4)$.

- $(H0)$: Se vérifie sans difficulté.

- $(H1)$: Le cas primitif est long à vérifier mais est sans difficulté particulière. Pour l'autre cas, soient $a \in B|_n^m(|\mathbb{G}|)$, $k \in [2]$, $p \in \mathbb{N}$ tels que $p < \dim(a)$ où a est non-primitif. On considère $A \in B^2|\mathbb{G}|$ la décomposition primitive de a. Alors $\partial_p^k|w_n^m|(a) = \partial_p^k|w_{n-1}^m|.B|w_{n-1}^m|(A) = |w_{n-1}^m|.B|w_{n-1}^m|\partial_p^k(A)$. Mais $\partial_p^k(A) \in BB|_{n-1}^p|\mathbb{G}|$ et $B|w_{n-1}^p|\partial_p^k(A) \in B|_{n-1}^p|\mathbb{G}|$. On en déduit que $|w_{n-1}^m|.B|w_{n-1}^m|\partial_p^k(A) = |w_{n-1}^p|.B|w_{n-1}^p|\partial_p^k(A) = |w_{n-1}^p|.\mu_{|\mathbb{G}|}.\partial_p^k(A) = |w_{n-1}^p|.\partial_p^k.\mu_{|\mathbb{G}|}(A) = |w_{n-1}^p|.\partial_p^k(a) = |w_n^m|.\partial_p^k(a)$. D'où l'identité voulue. De même lorsque $f \in B|_n^m Fl(\mathbb{G})$, on a $\partial_p^k Flw_n^m(f) = Flw_n^m \partial_p^k(f)$. Les autres vérifications se font sans difficulté particulière.

- $(H2)$: Pour le cas primitif, même remarque que pour $(H1)$. Pour l'autre cas, soient $a \in B|_n^m(|\mathbb{G}|)$, $k \in [2]$, $p \in \mathbb{N}$ tels que $p < \dim(a)$, où a est non-primitif. On considère $A \in B^2|\mathbb{G}|$ la décomposition primitive de a. On voit déjà que $\partial_p^k r_n^m(a) =$ $[a^{-1}.b^2_{|\mathbb{G}|}.\partial_p^k(A)] \circ [r_{n-1}^m.B|v|.Bb_{|\mathbb{G}|}.\partial_p^k(A)] \circ [Flw_{n-1}^m.Br_{n-1}^m.\partial_p^k(A)]$. Mais $\partial_p^k(A) \in BB|_{n-1}^p|\mathbb{G}|$, $Br_{n-1}^p.\partial_p^k(A) \in B|_{n-1}^p Fl(\mathbb{G})$ et $B|v|.Bb_{|\mathbb{G}|}.\partial_p^k(A) \in B|_{n-1}^p|\mathbb{G}|$ Donc $\partial_p^k r_n^m(a) =$ $[a^{-1}.b^2_{|\mathbb{G}|}.\partial_p^k(A)] \circ [r_{n-1}^m.B|v|.Bb_{|\mathbb{G}|}.\partial_p^k(A)] \circ [Flw_{n-1}^p.Br_{n-1}^p.\partial_p^k(A)] =$ $r_{n-1}^p.\mu_{|\mathbb{G}|}.\partial_p^k(A) = r_{n-1}^p.\partial_p^k.\mu_{|\mathbb{G}|}(A) = r_{n-1}^p.\partial_p^k(a) = r_{n-1}^m.\partial_p^k(a)$. Les autres vérifications se font sans difficulté particulière.

- $(H3)$: Soit $A \in B^2|_n^m|\mathbb{G}|$, on pose $a = \mu_{|\mathbb{G}|}(A)$. Le cas où $\mathrm{L}(a)+\dim(a) < n+m$ étant immédiat, on peut supposer que $\dim(a) = m$ et $\mathrm{L}(a) = n$.
.. Lorsque $\mathrm{sym}(a) = \square$ où a est primitif, alors $A = \eta_{B|\mathbb{G}|}(a)$ ou $A = B\eta_{|\mathbb{G}|}(a)$. On vérifie alors la condition voulue dans chacun de ces cas.
.. Lorsque a n'est pas primitif posons $\alpha = |A|$. On a $\alpha \leq B!_{|\mathbb{G}|}(a)$. Alors, le cas où $\mathrm{L}(\alpha) = 1$ étant immédiat, on peut supposer que $\mathrm{L}(\alpha) > 1$. Soient α_0 la composante primitive de α et A_0 la décomposition primitive de α. Soit aussi $\mathcal{A} \in B^3|\mathbb{G}|$ tel que $\mu_{B|\mathbb{G}|}(\mathcal{A}) = A$ et $B^2!_{B|\mathbb{G}|}(\mathcal{A}) = A_0$.

On vérifie que $\mathcal{A} \in BB^2|_{n-1}^m|\mathbb{G}|$. Posons aussi $A' = B\mu_{|\mathbb{G}|}(\mathcal{A})$, $A'_0 = B^2|w_{n-1}^m|(\mathcal{A})$ et $a' = B|w_n^m|(A)$. On voit alors que α_0 est la composante primitive de a et A' est la décomposition primitive de a, mais aussi $A', A'_0 \in BB|_{n-1}^m|\mathbb{G}|$ et $a' \in B|_n^m(|\mathbb{G}|)$. De plus α_0 est la composante primitive de a' et A'_0 est la décomposition primitive de a'. On peut maintenant écrire :
$|w_n^m|.\mu_{|\mathbb{G}|}|_n^m(A) = |w_n^m|(a) = |w_{n-1}^m|.B|w_{n-1}^m|(A') =$
$|w_{n-1}^m|.B|w_{n-1}^m|.B\mu_{|\mathbb{G}|}|_{n-1}^m(\mathcal{A}) = |w_{n-1}^m|.B|w_{n-1}^m|.BB|w_{n-1}^m|_{n-1}^m(\mathcal{A}) =$
$|w_{n-1}^m|.B|w_{n-1}^m|(A'_0) = |w_n^m|(a') = |w_n^m|.B|w_n^m|_n^m(A)$. De même, lorsque $F \in B^2|_n^m Fl(\mathbb{G})$, on vérifie que $Flw_n^m.\mu_{Fl\mathbb{G}}|_n^m(F) = Flw_n^m.BFlw_n^m|_n^m(F)$.

- $(H4)$: Soit $A \in B^2|_n^m(|\mathbb{G}|)$. On pose encore $a = \mu_{|\mathbb{G}|}(A)$. Le cas où $\mathrm{L}(a)+\dim(a) < n+m$ étant immédiat, on peut supposer que $\dim(a) = m$ et $\mathrm{L}(a) = n$.
.. Lorsque a est primitif, alors $A = \eta_{B|\mathbb{G}|}(a)$ ou $A = B\eta_{|\mathbb{G}|}(a)$. On vérifie alors la condition voulue dans chacun de ces cas (en utilisant les axiomes des pseudo-algèbres).
.. Lorsque a n'est pas primitif, reprenons les résultats donnés dans $(H3)$. Comme précédemment, on peut supposer que $\mathrm{L}(\alpha) > 1$. Alors on a les identités suivantes :
$[r_{n-1}^m.B(|v|.\omega|v|.b_{|\mathbb{G}|}^2)(\mathcal{A})]^{-1} \circ [a.\omega^2|v|.b_{|\mathbb{G}|}^3(\mathcal{A})] \circ [a.b_{|\mathbb{G}|}^2(A)] \circ [r_n^m.\mu_{|\mathbb{G}|}(A)] =$
$[r_{n-1}^m.B(|v|.\omega|v|.b_{|\mathbb{G}|}^2)(\mathcal{A})]^{-1} \circ [a.\omega^2|v|.b_{|\mathbb{G}|}^3(\mathcal{A})] \circ [a.\mu_{\omega|\mathbb{G}|}.b_{|\mathbb{G}|}^3(\mathcal{A})] \circ r_n^m(a) \underset{*1}{=}$
$[r_{n-1}^m.B(|v|.\omega|v|.b_{|\mathbb{G}|}^2)(\mathcal{A})]^{-1} \circ [Flv.\omega a.b_{|\mathbb{G}|}^3(\mathcal{A})] \circ [a.\omega\mu_{|\mathbb{G}|}.b_{|\mathbb{G}|}^3(\mathcal{A})] \circ r_n^m(a) =$
$[Flw_{n-1}^m.B(a.b_{|\mathbb{G}|}^2)(\mathcal{A})] \circ [r_{n-1}^m.B(|v|.\mu_{|\mathbb{G}|}.b_{|\mathbb{G}|}^2)(\mathcal{A})]^{-1} \circ [a.\omega\mu_{|\mathbb{G}|}.b_{|\mathbb{G}|}^3(\mathcal{A})] \circ r_n^m(a) =$
$[Flw_{n-1}^m.B(a.b_{|\mathbb{G}|}^2)(\mathcal{A})] \circ [r_{n-1}^m.B(|v|.b_{|\mathbb{G}|})(A')]^{-1} \circ [a.b_{|\mathbb{G}|}^2(A')].r_n^m(a) \underset{*2}{=}$
$[Flw_{n-1}^m.B(a.b_{|\mathbb{G}|}^2)(\mathcal{A})] \circ [Flw_{n-1}^m.Br_{n-1}^m(A')] =$
$[Flw_{n-1}^m.B(a.b_{|\mathbb{G}|}^2)(\mathcal{A})] \circ [Flw_{n-1}^m.B(r_{n-1}^m.\mu_{|\mathbb{G}|})(\mathcal{A})] \underset{*3}{=}$
$[Flw_{n-1}^m.Br_{n-1}^m.B^2(|v|.b_{|\mathbb{G}|})(\mathcal{A})] \circ [Flw_{n-1}^m.BFlw_{n-1}^m.B^2r_{n-1}^m(\mathcal{A})] \underset{*4}{=}$
$[r_{n-1}^m.B(|v|.b_{|\mathbb{G}|}).B^2(|v|.b_{|\mathbb{G}|})(\mathcal{A})]^{-1} \circ [a.b_{|\mathbb{G}|}^2.B^2(|v|.b_{|\mathbb{G}|})(\mathcal{A})] \circ$
$[r_n^m.\mu_{|\mathbb{G}|}.B^2(|v|.b_{|\mathbb{G}|})(\mathcal{A})] \circ [Flw_n^m.\mu_{Fl\mathbb{G}}.B^2r_n^m(\mathcal{A})] =$
$[r_{n-1}^m.B(|v|.\omega|v|.b_{|\mathbb{G}|}^2)(\mathcal{A})]^{-1} \circ [a.\omega^2|v|.b_{|\mathbb{G}|}^3(\mathcal{A})] \circ$
$[r_n^m.B(|v|.b_{|\mathbb{G}|})(A)] \circ [Flw_n^m.Br_n^m(A)]$
$(*1)$ Par un axiome des pseudo-algèbres.

$(*2)$ Par définition de r_n^m dans le cas non-primitif car A' est la décomposition primitive de a.
$(*3)$ Par hypothèse d'induction.
$(*4)$ Par définition de r_n^m dans le cas non-primitif car $B^2(|v|.b_{|\mathbb{G}|})(\mathcal{A})$ est la décomposition primitive de $B(|v|.b_{|\mathbb{G}|})(A)$ (lorsque ce dernier est non-primitif).
On en déduit que
$[a.b^2_{|\mathbb{G}|}(A)] \circ [r_n^m.\mu_{|\mathbb{G}|}(A)] = [r_n^m.B|v|.Bb_{|\mathbb{G}|})(A)] \circ [Flw_n^m.Br_n^m(A)] =$
$[Flv.b_{Fl\mathbb{G}}.Br_n^m(A)] \circ [r_n^m.B|w_n^m|(A)]$ qui est l'identité voulue.

• Les trois familles $(|w_n^m|)$, (Flw_n^m) et (r_n^m) ayant été construites et satisfaisant les conditions de $(H0)$ à $(H4)$, on construit facilement un foncteur globulaire $w : \hat{B}(\mathbb{G}) \to \mathbb{G}$ et une transformation naturelle globulaire $r : w \to v.\hat{b}_{\mathbb{G}}$ vérifiant les conditions voulues, ce qui achève la preuve du Lemme clé (voir 1.5).

Références

[1] M.A.BATANIN, On the definition of weak ω-category, *Macquarie University Report*, 96 (207) : 24, (1996).

[2] M.A.BATANIN, Monoïdal globular categories as a natural environment for the theory of weak n-categories, *Advances in Mathematics* 136 (1998), p. 39-103.

[3] M.A.BATANIN, On the Penon method of weakening of algebraic structures, *Journal of Pure and Applied Algebra* (2002), vol. 172, p. 1-23.

[4] M.A.BATANIN, The Eckmann-Hilton argument and higher operads, *Advances in Mathematics*, 217 (2008) p. 334-385,

[5] M.BATANIN AND R.STREET, The universal property of the multitude of trees, *Journal of Pure and Applied Algebra* (2000), vol. 154, p. 3-13.

[6] R.BLACKWELL,G.M.KELLY, AND A.J.POWER, Two-dimensional monad theory, *Journal of Pure and Applied Algebra* (1989), vol. 59, p. 1-41.

[7] J.BOURKE, *Codescent objects in 2-dimensional universal algebra*, PhD thesis, University of Sydney, (2010),

[8] M.BUNGE, Coherent extensions and relational algebras, *Transactions of the AMS*. 197 (1974) p. 355-390.

[9] A.BURRONI, Exposés oraux non-publiés dans les années 90.

[10] A.BURRONI, *Pseudo-algèbres*, *Cahiers Top. Géo. Diff. Cat.*, XVI-4 (1975), p. 343-393.

[11] A.CARBONI AND P.JOHNSTONE, Connected limits, familial representability and Artin glueing, *Mathematical Structures in Computer Science* (1995) p. 441-459.

[12] P.CARTIER, *Conférence sur les "multicatégories" donnée à l'I.H.E.S.* , Paris, (1994).

[13] E.CHENG AND M.MAKKAI, A note on the Penon definition of n-category, *Cahiers Top. Géo. Diff. Cat.* (2010), LI-3, p. 205-223.

[14] C.KACHOUR, *Aspects of Globular Higher Category Theory*, Thesis (2012), Macquarie University, Faculty of Science.

[15] S.LACK, Codescent objects and coherence, *Journal of Pure and Applied Algebra*, (2002), vol. 175, p. 223-241.

[16] J.PENON, Approche polygraphique des ∞-catégories non strictes, *Cahiers Top. Géo. Diff. Cat.* (1999), XL-1, p. 31-80.

[17] J.PENON, Pureté de la monade de Batanin, I et II, *Cahiers Top. Géo. Diff. Cat.*, (2020), LXI-1, , p. 57-110, (2021), LXII-1, pp. 3-63.

[18] A.J.POWER, A general coherence result, *Journal of Pure and Applied Algebra*, (1989) vol. 57, p.165-173.

[19] R.STREET, The formal theory of monads, *Journal of Pure and Applied Algebra*, (1972) vol. 2, p.149-168.

[20] R.STREET, The role of Michael Batanin's monoidal globular categories, *Proceedings of the Workshop on Higher Category Theory and Physics at Northwestern*, (1997).

[21] R.STREET, The petit Topos of Globular Sets, *Journal of Pure and Applied Algebra* (2000), vol. 154, p. 299-315.

[22] M.WEBER, Operads within monoidal pseudo algebras, *Applied Categorical Structures* (2005), vol. 13, p. 389-420.

[23] M.WEBER, Internal algebra classifiers as codescent objects of crossed internal categories, *Theory and applications of categories*, (2015), vol. 30, p.1713-1792.

Jacques PENON
25, rue Chapsal,
94340, Joinville-le-Pont
France
Email : `tryphon.penon@gmail.com`