CAHIERS DE TOPOLOGIE ET GEOMETRIE DIFFERENTIELLE CATEGORIQUES

Vol. LV-3 (2014)

CLASSIFICATION DES MATRICES ASSOCIEES AUX CATEGORIES FINIES

par Samer ALLOUCH et Carlos SIMPSON

Résumé. Dans cet article, on trouve les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une matrice carrée positive admet au moins une catégorie finie correspondante. On déduit en corollaire qu'il suffit de vérifier cette condition pour toute sous-matrice d'ordre ≤ 4.

Abstract. In this paper, we find necessary and sufficient conditions for a positive square matrix to have at least one corresponding category. A corollary is that it suffices to verify this condition for every sub-matrix of order ≤ 4.

Keywords. Category, Cardinality, Matrix, Equivalence Relation, Order.
Mathematics Subject Classification (2010). 18A99, 05B30, 05C50.

1. Introduction

La théorie des catégories étudie les structures mathématiques et les relations qu'elles entretiennent. Les catégories sont utilisées dans la plupart des branches mathématiques et dans certains secteurs de l'informatique théorique et en mathématiques de la physique.

L'objectif du présent travail est d'étudier la correspondance entre les catégories finies d'ordre n et les matrices carrées de taille n. Cette correspondance figure dans plusieurs papiers comme ceux de Leinster et Berger [9] [5], le papier de Kapranov [8] et les papiers de Fiore, Lück et Sauer [6] [7]. La question abordée ici est de savoir, pour une matrice donnée M, s'il existe une catégorie A associé à M ou non.

Une catégorie A est dite *finie* si les ensembles d'objets $Ob(A)$ et flèches $Fl(A)$ sont finis. Elle est une *catégorie aux objets ordonnées* si l'ensemble d'objets $Ob(A)$ est muni d'une relation d'ordre linéaire, permettant d'utiliser la notation $Ob(A) = \{x_1, ..., x_n\}$ où $x_i < x_j$ si et seulement si $i < j$.

Une catégorie finie A d'ordre n aux objets ordonnées dont les objets sont désignés $\{x_1, ..., x_n\}$, donne lieu à la matrice carrée $M = m_{ij}$ d'ordre

n définie par $m_{ij} = |A(x_i, x_j)|$ pour $1 \leq i, j \leq n$. Cette matrice associée est notée M_A . Changer l'ordre des objets changera la matrice par conjugaison avec une permutation.

On désigne par $\mathcal{C}at(M)$ l'ensemble des catégories finies aux objets ordonnées, à isomorphisme près, qui sont associées à la matrice M. Dans ce papier nous déterminons *l'état* de l'ensemble $\mathcal{C}at(M)$, c'est-à-dire, s'il est vide ou non.

Nous pensons, par ailleurs, que l'étude de l'ensemble $\mathcal{C}at(M)$ va s'avérer intéressante en général. Cette question semble présenter des analogies avec la classification d'objets géométriques. Le présent papier est un premier pas dans cette direction. Le fait de trouver des inégalités caractérisant les matrices M pour lesquelles $\mathcal{C}at(M)$ est non-vide, suggère entre autres de considérer par la suite la question de la classification des catégories correspondantes à ces matrices dans les cas proches de la limite pour les inégalités.

Pour une catégorie finie ordonnée A, la matrice M_A a plusieurs propriétés :

1. Si A, B sont deux catégories finies aux objets ordonnés telles que A isomorphe à B, alors $M_A = M_B$.
2. Si B est une sous-catégorie pleine de A, alors M_B est une sous-matrice régulière (cf page 6) de M_A.
3. $M_{A^{op}} = {}^tM_A$.

Pour faciliter l'étude de $\mathcal{C}at(M)$, on va définir la notion d'une catégorie finie réduite et une notion correspondante de matrice réduite. Une catégorie A finie d'ordre n dont les objets sont $\{x_1, \ldots, x_n\}$ est dite *non-réduite* s'il existe deux objets distincts x_i et x_j $(i \neq j)$ qui sont isomorphes. On dira que A est *réduite* si deux objets distincts sont toujours non-isomorphes. On dira qu'une matrice M est *non-réduite* s'il existe $i \neq j$ tel que

$$\forall k,\ M_{ki} = M_{kj} \quad \text{et} \quad \forall k,\ M_{ik} = M_{jk},$$

cela veut dire que la ligne i égale à la ligne j et la colonne i égale à la colonne j. On dit qu'une matrice M est *réduite* si elle n'est pas non-réduite. Ensuite et après cette définition nous démontrons le théorème 2.5 de réduction dont l'énoncé est le suivant :

—*Si M est une matrice non réduite, alors on peut réduire M en une sous-matrice N réduite telle que $\mathcal{C}at(M) \neq \emptyset$ si et seulement si $\mathcal{C}at(N) \neq \emptyset$.*

D'après ce qui précède nous pouvons nous restreindre à étudier l'état de $\mathcal{C}at(M)$ pour une matrice M réduite.

Dans un même ordre d'idées, nous allons partitionner notre matrice en blocs. Soit A une catégorie finie aux objets ordonnés, on considère la relation d'équivalence sur $Ob(A)$ définie par :

$$x_i \mathcal{R} x_j \Longleftrightarrow \begin{cases} \mathcal{H}om_A(x_i, x_j) \neq \emptyset \\ \quad\text{et} \\ \mathcal{H}om_A(x_j, x_i) \neq \emptyset \end{cases}$$

Grâce à cette relation, on peut partager la matrice M_A en plusieurs blocs. Illustrons par un exemple—soit M la matrice définie par :

$$\mathbf{M} = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 2 & 9 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \end{array} \right).$$

On aura (d'après notre critère ci-dessous) que $\mathcal{C}at(M) \neq \emptyset$, c'est-à-dire qu'il existe une catégorie A associée à M. La relation R aura deux classes d'équivalence : $Ob(A)/\mathcal{R} = \{\lambda, \beta\}$ et on pourra écrire $Ob(A) = \{\lambda^0, \lambda^1, \beta^0, \beta^1\}$. On appellera

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ un bloc associé à λ, $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 9 \end{pmatrix}$ un bloc associé à λ vers β,

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ un bloc associé à β, et $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ un bloc associé à β vers λ.

La relation d'équivalence ne dépend que de la matrice M_A, et on note que si M_A est strictement positive alors il n'y a qu'une seule classe d'équivalence. Dans le cas ou des entrées de M_A s'annulent, il convient de considérer non seulement la relation d'équivalence mais aussi une relation d'ordre. On définit la notion d'acceptabilité d'une matrice :

Définition 1.1. *Soit $M = (m_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{N})$. On définit deux relations sur $\{x_1, ..., x_n\}$ par rapport à M par :*

1. $x_i \mathcal{G}_M x_j$ *si* $m_{ij} > 0$.

2. *$x_i \mathcal{R}_M x_j$ si $x_i \mathcal{G}_M x_j$ et $x_j \mathcal{G}_M x_i$.*

On dira que M est acceptable *si et seulement si la relation $\mathcal{G}_M$ est à la fois réflexive et transitive et la relation $\mathcal{R}_\mathcal{M}$ est une relation d'équivalence.*

Si M est acceptable alors, les classes d'équivalence de $\mathcal{R}_\mathcal{M}$ seront notées $\lambda, \mu, \ldots$. Les objets dans ces classes seront notes $\lambda^i \ldots$.
D'autre part, on définit la relation d'ordre sur les classes d'équivalence par : $\lambda \geq \mu$ si et seulement si $\lambda^i G_M \mu^j$ pour tous $\lambda^i \in \lambda$ et $\mu^j \in \mu$.
On note $\lambda > \mu$ si $\lambda \geq \mu$ et $\lambda \neq \mu$.

Voici maintenant un résumé des résultats de classification, les démonstrations desquels se trouvent dans les sections 5 et 6.
Soit $M = (m_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{N})$ est une matrice réduite, alors nous avons deux cas :

1. Si M est strictement positive :

1. Si $m_{ii} > 1$ pour tout $1 \leq i \leq n$, alors $\mathcal{C}at(M) \neq \emptyset$, voir [5].
2. S'il existe au moins une i' tel que $m_{i'i'} = 1$ dans ce cas on a deux possibilités :
   (a) si i' est le seul indice que $m_{i'i'} = 1$,

   $$\text{alors } \mathcal{C}at(M) \neq \emptyset \text{ si et seulement si } \begin{cases} m_{ii} > m_{i1}m_{1i} & \forall i > 1 \\ m_{ij} \geq m_{i1}m_{1j} & \forall i, j > 1 \end{cases}$$

   (b) s'il existe d'autres indices $\{i_1, i_2, \ldots\}$ différents de i' tel que ; $m_{i_1 i_1} = m_{i_2 i_2} = \ldots = 1$ alors $\mathcal{C}at(M) = \emptyset$.

2. Si M est une matrice positive réduite, on utilise la partition de la matrice en classes d'équivalence et la notion d'acceptabilité (Définition 1.1). Noter que $\mathcal{C}at(M) = \emptyset$ si les conditions du paragraphe précédent ne sont pas respectées sur les blocs diagonaux ; en supposant qu'elles le sont, on introduit la notation suivante. On dira que $\lambda \in \mathcal{U}$ si λ est une classe d'équivalence contenant un objet, qui sera noté λ^0, tel que $M(\lambda^0, \lambda^0) = 1$. On dira $\lambda \in \mathcal{V}$ sinon, et les autres objets seront notés $\lambda^1, \lambda^2, \ldots$. Avec ces notations, le critère pour l'existence d'une catégorie est :

$$
\mathcal{C}at(M) \neq \emptyset \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rll}
M & \text{acceptable} & \\
M(\lambda^i, \lambda^i) \geq & a(\lambda^i)b(\lambda^i) + 1 & \forall \lambda \in \mathcal{U}, i \geq 1 \\
M(\lambda^i, \lambda^j) \geq & a(\lambda^i)b(\lambda^j) & \forall \lambda \in \mathcal{U} \\
M(\lambda^i, \mu^j) \geq & M(\lambda^i, \mu^0) & \forall \lambda > \mu, \mu \in \mathcal{U} \\
M(\lambda^i, \mu^j) \geq & M(\lambda^0, \mu^j) & \forall \lambda > \mu, \lambda \in \mathcal{U} \\
M(\lambda^i, \mu^j) \geq & M(\lambda^0, \mu^j) + M(\lambda^i, \mu^0) & \\
 & \qquad -M(\lambda^0, \mu^0) & \forall \lambda \geq \mu \in \mathcal{U}
\end{array} \right.
$$

avec $a(\lambda^i) := M(\lambda^i, \lambda^0)$ et $b(\lambda^j) := M(\lambda^0, \lambda^j)$.

Si M est une matrice non-réduite, on utilise le théorème de réduction 2.5 pour obtenir la sous-matrice réduite N de M, telle que $\mathcal{C}at(M)$ et $\mathcal{C}at(N)$ ont le même état. Alors, on a maintenant une matrice réduite N qu'on peut étudier d'après ce qui précède.

Par inspection de la forme des conditions ci-dessus, nous remarquons dans Corollaire 6.4 qu'une matrice M est catégorique, si et seulement si pour toute sous-matrice régulière N de M, d'ordre ≤ 4, on a que N est catégorique.

2. Matrices et leurs catégories

Définition 2.1. *Une catégorie finie est une catégorie ayant un ensemble fini d'objets et un ensemble fini de flèches, voir [1].*

Définition 2.2. *La notion de* semi-catégorie *est obtenue de la définition de catégorie en supprimant la condition que pour chaque objet il existe une identité.*
Si nous avons un ensemble non-vide $U \subset Ob(A)$ tel qu'il existe id_x pour $x \in U$, mais qu'il n'existe pas nécessairement un id_x pour $x \notin U$, alors on dit que A (ou (A, U)) est une semi-catégorie partiellement unitaire.

Le rajout formel d'identités permet de passer d'une semi-catégorie partiellement unitaire à une catégorie, voir la propriété 2.1(6) ci-dessous.

On note par $\mathcal{M}_n(\mathbb{N})$ l'ensemble des matrices carrés d'ordre n dont les coefficients sont des entiers naturels. Soit A une catégorie finie avec $Ob(A) = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$, on définit sa matrice $M_A = (m_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{N})$ par

$$m_{i,j} :=\mid Hom_A(x_i, x_j) \mid$$

qui est le cardinal de l'ensemble des flèches de source x_i et de but x_j, voir [2].

Définition 2.3. *Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{N})$, on dit que M est une* matrice catégorique *[2] s'il existe une catégorie finie A d'ordre n tel que $M = M_A$.*
On note $\mathcal{C}at(M) = \{A$ catégorie finie d'ordre $n/\ M = M_A\}$.
Donc, M est catégorique si et seulement si $\mathcal{C}at(M) \neq \emptyset$.

Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{N})$ et $N \in \mathcal{M}_k(\mathbb{N})$ on dit que $N = (n_{uv})$ est une *sous-matrice régulière* de $M = (m_{ij})$ s'il existe un sous-ensemble ordonné

$$\{i_1, \ldots, i_k\} \subset \{1, \ldots, n\}$$

tel que $n_{uv} = m_{i_u i_v}$. On pourra noter que $M' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{N})$ est une sous-matrice régulière de M, si et seulement si M' est conjugué de M par une permutation.

Si A est une catégorie finie d'ordre n aux objets ordonnés, et si $B \subset A$ est une sous-catégorie pleine, muni elle-même d'un ordre qui peut être différent de l'ordre induit de A, alors M_B est une sous-matrice régulière de M_A.

2.1 Quelques propriétés de Cat(M)

Soit M une matrice dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{N})$, on va étudier le phénomène de savoir si M est une matrice catégorique ou non. Voilà d'abord quelques propriétés :

1. $\mathcal{C}at(M) \neq \emptyset$ si et seulement si $\mathcal{C}at({}^tM) \neq \emptyset$.
   En effet : Si $A \in \mathcal{C}at(M)$ alors on peut considérer la catégorie opposée $A^{op} \in \mathcal{C}at({}^tM)$ voir [4].
2. Soit $M = (m_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ une matrice carrée dont les coefficients sont des entiers naturels strictement positifs avec $m_{ii} \geq 2$ pour tout $1 \leq i \leq n$, alors $\mathcal{C}at(M) \neq \emptyset$ voir [5, Lemma 4.1].

3. Pour toute N sous-matrice régulière de M $\mathcal{C}at(M) \neq \emptyset$ implique $\mathcal{C}at(N) \neq \emptyset$.
   En effet : si N est une sous-matrice régulière de M alors il existe un sous-ensemble $I = \{i_1, ..., i_m\} \subseteq \{1, ..., n\}$ tel que :
   $$n_{a,b} = m_{i_a, j_b}.$$
   Soit $A \in \mathcal{C}at(M)$ tel que $Ob(A) = \{x_1, ..., x_n\}$, on prend la sous-catégorie pleine B dont les objets sont $\{x_{i_1}, ..., x_{i_m}\}$, et $B \in \mathcal{C}at(N)$.
4. Soit $\sigma \in S_n$ est une permutation, alors $\mathcal{C}at(M) \neq \emptyset$ si et seulement si $\mathcal{C}at(M^\sigma) \neq \emptyset$ et en plus $\mathcal{C}at(M) \cong \mathcal{C}at(M^\sigma)$.
   En effet : soit $A \in \mathcal{C}at(M)$ alors, A^σ la catégorie définie par : $Ob(A^\sigma) = Ob(A)$ et $Hom_{A^\sigma}(x_i, x_j) = Hom_A(x_{\sigma(i)}, x_{\sigma(j)})$.
   Donc $|Hom_{A^\sigma}(x_i, x_j)| = |Hom_A(x_{\sigma(i)}, x_{\sigma(j)})| = m_{\sigma(i),\sigma(j)}$ ce qui donne $A^\sigma \in \mathcal{C}at(M^\sigma)$.
5. Si M est catégorique alors elle satisfait à la propriété de transitivité suivante : si $m_{i,j} > 0$ et $m_{j,k} > 0$ alors $m_{i,k} > 0$. En effet : si $Hom_A(x_i, x_j)$ et $Hom_A(x_j, x_k)$ sont non-vides, contenant des éléments notés f et g, alors $gf \in Hom_A(x_i, x_k)$ donc $m_{i,k} > 0$.
6. Si (A, U) est une semi-catégorie partiellement unitaire, et si on rajoute formellement les identités id_x pour $x \in Ob(A) - U$, on obtient une catégorie A'. La matrice M' de A' est obtenue de la matrice M de A par $M'_{ij} = M_{ij} + 1$ si $i = j$ avec $x_i \notin U$, et $M'_{ij} = M_{ij}$ sinon.

La propriété (5) combinée avec la condition évidente $m_{ii} > 0$ constituent la condition que la matrice M soit *acceptable*, voir la définition 1.1. Cette condition, nécessaire pour l'existence d'une catégorie associée, sera en vigueur partout.

2.2 Dédoublement

Dans le cadre des semi-catégories, avant d'ajouter les unités pour passer à une catégorie, il pourra être utile de considérer le *dédoublement* comme dans [4], qui consiste à rajouter des "doublures" de certains morphismes.

Lemme 2.4. *Soit A une semi-catégorie partiellement unitaire avec matrice M et condition d'unité sur un sous-ensemble d'objets*

$$U \subset Ob(A) = \{x_1, \ldots, x_n\}.$$

Soit M' une matrice avec $M'_{ij} \geq M_{ij}$. Supposons que $M'_{ij} = M_{ij}$ si $x_i \in U$ ou si $x_j \in U$, et que $M'_{ij} = 0$ si $M_{ij} = 0$. Alors il existe une catégorie partiellement unitaire A' avec $Ob(A') = Ob(A)$ ayant des unités sur U, dont la matrice est M'.

Démonstration. On choisit des ensembles $B(x_i, x_j)$ de cardinalité $M'_{ij} - M_{ij}$ disjoints des ensembles de flèches de A, et on pose $A'(x_i, x_j) := A(x_i, x_j) \sqcup B(x_i, x_j)$, muni de l'inclusion $\nu : A(x_i, x_j) \hookrightarrow A'(x_i, x_j)$. D'après l'hypothèse on peut choisir une fonction $\phi : B(x_i, x_j) \to A(x_i, x_j)$ ce qui fournit une application notée de même $\phi : A'(x_i, x_j) \to A(x_i, x_j)$ telle que $\phi \circ \nu$ est l'identité. On définit une semi-catégorie A' dont les ensembles des flèches sont ces $A'(x_i, x_j)$. La composition de A' est définie par

$$u \cdot v := \nu(\phi(u) \cdot \phi(v)).$$

L'associativité de celle-ci est conséquence de l'associativité de A. L'hypothèse que $B(x_i, x_j) = \emptyset$ si x_i ou x_j sont dans U, implique que pour $x_i \in U$, $\nu(id_{x_i})$ agit comme l'identité de x_i dans A', donc A' est une semi-catégorie partiellement unitaire avec condition d'unité sur l'ensemble U. On dira que $v \in B(x_i, x_j) \subset A'(x_i, x_j)$ est une *doublure* de son image $\phi(v) \in A(x_i, x_j)$. $\square$

Exercice : En utilisant ce lemme et la propriété (6), prouver la propriété (2) et même sa version pour les matrices positives : si M satisfait la propriété de transitivité (5) et si $m_{ii} \geq 2$ alors $\mathcal{C}at(M) \neq \emptyset$.

2.3 Catégories et matrices réduites

S'il existe deux indices $i \neq j$ tel que $x_i \cong x_j$, alors A est dite non-réduite sinon on dit réduite.
D'autre part, s'il existe deux indices $i \neq j$ tels que la ligne i est égale la ligne j, et la colonne i est égale la colonne j, on dit que M est non-réduite sinon on dit réduite.
Considérons maintenant la question de réduire une matrice. La réponse est présentée dans le théorème suivant :

Théorème 2.5. *Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{N})$ une matrice non réduite, on peut réduire M en une sous-matrice N réduite telle que : $\mathcal{C}at(M) \neq \emptyset$ si et seulement si $\mathcal{C}at(N) \neq \emptyset$.*

Démonstration. Supposons que M est une matrice $n \times n$ non-réduite. On peut définir une rélation d'équivalence sur l'ensemble d'indices $\{1, \ldots, n\}$ en disant que $i \sim j$ si pour tout k, $m_{ki} = m_{kj}$ et $m_{ik} = m_{jk}$. Celle-ci est symétrique, réflexive et transitive. On obtient donc une partition de l'ensemble d'indices en réunion disjointe des classes d'équivalence

$$\{1, \ldots, n\} = U_1 \sqcup U_2 \sqcup \cdots \sqcup U_m.$$

Choisissons un représentant $r(a) \in U_a$ pour chaque classe. Dans l'autre sens, on note $c(i) \in \{1, \ldots, m\}$ l'unique classe telle que $i \in U_{c(i)}$. Donc $c(r(a)) = a$ et $r(c(i)) \sim i$. On obtient une sous-matrice de taille $m \times m$

$$n_{ab} := m_{r(a),r(b)}.$$

Il est à noter qu'on peut faire en sorte que $r(a) < r(b)$ pour $a < b$: on choisit $r(a)$ le plus petit élément de U_a, et on numérote les classes U_a par ordre croissant à partir de leur plus petit élément. Dans ce cas N est vraiment une sous-matrice de M. Noter que N est réduite, puisque les éléments de U_a et U_b ne sont pas équivalents pour $a \neq b$. Si A est une catégorie dont la matrice est M, on obtient une sous-catégorie pleine $B \subset A$ qui consiste en les objets $r(a)$ seulement, pour $a = 1, \ldots, m$. La matrice de B est N.
On conclut que si M marche, alors N marche. L'équivalence entre i et $r(c(i))$ implique que pour tout k on a

$$m_{k,i} = m_{k,r(c(i))}, \quad m_{i,k} = m_{r(c(i)),k}.$$

On en déduit que pour tout i, j on a

$$m_{i,j} = m_{r(c(i)),j} = m_{r(c(i)),r(c(j))} = n_{c(i),c(j)}.$$

Ceci indique comment aller dans l'autre sens. Supposons que B soit une catégorie dont la matrice est N. Notons par $y_1, \ldots, y_m$ les objets de B. On définit une catégorie A avec objets notés $x_1, \ldots, x_n$ en posant

$$A(x_i, x_j) \cong B(y_{c(i)}, y_{c(j)}).$$

Si on veut être plus précis on pourrait définir

$$A(x_i, x_j) := \{(j, i, \beta), \quad \beta \in B(y_{c(i)}, y_{c(j)})\}.$$

La composition est la même que celle de B, c.à.d.

$$(k,j,\beta)(j,i,\beta') := (k,i,\beta\beta').$$

De même pour les identités, l'associativité et les règles des identités sont faciles à vérifier. Donc A est une catégorie.
On a :

$$|A(x_i,x_j)| = |B(y_{c(i)},y_{c(j)})| = n_{c(i),c(j)} = m_{i,j}.$$

Donc A correspond à la matrice M.
De cette discussion on conclut : étant donnée une matrice non-réduite M, on peut établir par la construction précédente une sous-matrice N qui est réduite, telle que M est catégorique si et seulement si N est catégorique.
La sous-matrice N est unique à permutation d'indices près. □

En conséquence de ce théorème nous pouvons nous restreindre à la considération des matrices réduites.

Lemme 2.6. *Soit $M = (m_{ij})$ une matrice réduite avec $m_{i,j} > 0$ pour tout i,j, et s'il existe $i \neq j$ tels que $m_{i,i} = m_{j,j} = 1$, alors $\mathcal{C}at(M) = \emptyset$.*

Démonstration. On suppose que $\mathcal{C}at(M) \neq \emptyset$ alors il existe une catégorie A associée à M, et comme M est réduite alors A est réduite.
D'autre part, on a $m_{i,j} > 0$ et $m_{ji} > 0$ ce qui donne $A(x_i,x_j) \neq \emptyset$ et $A(x_j,x_i) \neq \emptyset$, alors il existe $f \in A(x_i,x_j)$ et $g \in A(x_j,x_i)$; donc $fg = id_{x_j}$ et $gf = id_{x_i}$ car $|A(x_i,x_i)| = m_{ii} = 1$ et $|A(x_j,x_j)| = m_{jj} = 1$. Alors $x_i \cong x_j$ et A est non-réduite, il y a contradiction donc $\mathcal{C}at(M) = \emptyset$. □

3. Exemples

3.1 Exemples sur matrice carrée d'ordre 2

1. Soit M la matrice suivante :

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

   On trouve A_2 la catégorie dont les objets sont les deux ensembles $x_1 = \{1\}$ et $x_2 = \{1,2\}$ et les morphismes sont les applications injectifs, on remarque que $M_{A_2} = M$ et $2 \times 1 \geq 0 \times 2$.

2.

Soit M $= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et soit A une catégorie du schéma suivant :

$$\begin{tikzcd} \mathbb{N} \arrow[loop left, "id"] \arrow[r, bend left, "f(x)=x+1"] & \mathbb{N}^* \arrow[l, bend left, "g(y)=y-1"] \arrow[loop right, "id"] \end{tikzcd}$$

On trouve que A est une catégorie associée à M c.à.d $A \in \mathcal{C}at(M)$.

3.

Soit M $= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, on trouve que $\mathcal{C}at(M) = \emptyset$.

C'est le lemme 2.6. Explicitement, s'il existe une catégorie dans $\mathcal{C}at(M)$ dont les objets sont $\{x, y\}$ et les morphismes sont définis par : $A(x, x) = \{id_x\}$, $A(y, y) = \{id_y\}$, $A(x, y) = \{f_1, f_2\}$ avec $f_1 \neq f_2$, et $A(y, x) = \{g_1, g_2\}$ avec $g_1 \neq g_2$. On remarque que $f_i g_j = id_y$ et $g_j f_i = id_x$ pour tout i,j $\in \{1, 2\}$ alors :
$g_1(f_1 g_2) = g_1 id_y = g_1 = (g_1 f_1) g_2 = id_x g_2 = g_2$, une contradiction donc A n'existe pas et $\mathcal{C}at(\mathcal{M}) = \emptyset$.

3.2 Exemple sur matrice carrée d'ordre 3

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

M est une matrice catégorique et $M = M_A$.
A est définit par le schéma suivant :

$$\begin{tikzcd} x_2 \arrow[loop above, "f_{22}"] \arrow[loop left, "1"] \arrow[rr, shift left, "f_{23}"] \arrow[dr, shift left, "f_{21}"] & & x_3 \arrow[ll, shift left, "f_{32}"] \arrow[loop above, "1"] \arrow[loop right, "f_{33}"] \arrow[dl, shift left, "f_{31}"] \\ & x_1 \arrow[loop left, "1"] \arrow[ul, shift left, "f_{12}"] \arrow[ur, shift left, "f_{13}"] & \end{tikzcd}$$

Avec $f_{jk} \circ f_{ij} = f_{ik}$ pour tout $i, j \in \{1, 2, 3\}$

4. Partition d'une matrice

4.1 Relation d'équivalence sur les objets, et notations

Pour faciliter le travail, on va construire une nouvelle notation pour une catégorie. Soit A une catégorie finie aux objets ordonnés, on définit une relation d'équivalence sur l'ensemble $Ob(A) = \{x_1, \ldots, x_n\}$:

$$x_i \mathcal{R} x_j \Longleftrightarrow \begin{cases} |\mathcal{H}om_A(x_i, x_j)| = m_{ij} > 0 \\ \qquad \text{et} \\ |\mathcal{H}om_A(x_j, x_i)| = m_{ji} > 0 \end{cases}$$

Elle est différente de celle utilisée dans la preuve du théorème 2.5 ci-dessus. On trouve que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence et ne dépend que de la matrice M_A. Le fait qu'elle soit une relation d'équivalence est une conséquence de la propriété de transitivité 2.1 (5) que nous devons supposer sur les matrices. Par la définition 1.1, M est dite *acceptable* (condition nécessaire pour l'existence d'une catégorie associée) si cette propriété de transitivité et la condition évidente $m_{ii} \geq 1$ sont satisfaites.

Comme $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence, alors

$$Ob(A)/\mathcal{R} = \{U_1, ..., U_p, V_1, ..., V_q\} = \mathcal{U} \bigcup \mathcal{V}$$

avec U_i les classes qui contiennent au moins un objet $x = a_r$ tel que $m_{r,r} = 1$, et V_j les classes qui ne contiennent aucun $y = a_s$ tel que $m_{s,s} = 1$. Nous supposons que la matrice est réduite. Par le lemme 2.6, les classes U_i contiennent exactement un objet $x = a_r$ tel que $m_{r,r} = 1$.

On notera maintenant par λ, μ etc. les classes d'équivalence. On notera les objets de la classe λ par $\lambda^0, \ldots, \lambda^{|\lambda|-1}$ pour $\lambda \in \mathcal{U}$, ou bien $\lambda^1, \ldots, \lambda^{|\lambda|}$ pour $\lambda \in \mathcal{V}$. Pour $\lambda \in \mathcal{U}$, l'objet λ^0 est celui où $M(\lambda^0, \lambda^0) = 1$.

L'ensemble des classes est muni d'un ordre partiel tel que $\lambda \geq \mu$ quand $M(\lambda^i, \mu^j) > 0$, l'axiome d'ordre est garanti par la condition 2.1 (5). De même le fait que la relation d'ordre est bien définie indépendamment du choix des représentants λ^i et μ^j est conséquence de 2.1 (5). Cette relation d'ordre ne dépend que de la matrice M_A.

On établira la notation $\mu^j \lambda^i X$ pour les morphismes dans $\mathcal{H}om_A(\lambda^i, \mu^j)$. A noter que l'ordre des objets μ^j et λ^i est inversé, ceci a pour but de rendre plus lisible les formules de composition.

On commence avec les notations pour les morphismes $\lambda^j\lambda^i X$. D'abord, pour l'identité on écrira $\lambda^i\lambda^i I$ (pas besoin d'exposant car il n'y a qu'une seule identité pour chaque objet λ^i).

Ensuite, on aura des morphismes dont les notations peuvent être de la forme $\lambda^j\lambda^i F^{u,v}$.

Par exemple, pour $\lambda \in \mathcal{U}$, nous posons

$$a(\lambda^i) := |\mathcal{H}om_A(\lambda^i, \lambda^0)| \text{ et } \quad b(\lambda^j) := |\mathcal{H}om_A(\lambda^0, \lambda^j)|.$$

On note par $\lambda^0\lambda^i G^{1,u}$ les différents morphismes de λ^i vers λ^0 pour $1 \leq u \leq a(\lambda^i)$. De même on note par $\lambda^j\lambda^0 G^{v,1}$ les différents morphismes de λ^0 vers λ^j pour $1 \leq v \leq b(\lambda^j)$.

Nous allons prouver ci-dessous que si $M_A = M = (m_{i,j})$ alors,

$$m_{ii} > m_{1i}m_{i1} \text{ et } m_{ij} \geq m_{i1}m_{1j} \text{ avec } i \neq j.$$

En fait, on va montrer que les morphismes

$$\lambda^j\lambda^i G^{v,u} := \lambda^j\lambda^0 G^{v,1} \circ \lambda^0\lambda^i G^{1,u}$$

sont distincts, et différents de l'identité. Ceci permettra d'utiliser cette notation pour les désigner.

En particulier pour $i = 0$ il n'y a que $u = 1$, pour $j = 0$ il n'y a que $v = 1$. On fera la convention que

$$\lambda^0\lambda^0 G^{1,1} = \lambda^0\lambda^0 I$$

est l'identité ; cependant pour $i > 0$ on a

$$\lambda^i\lambda^i G^{1,1} \neq \lambda^i\lambda^i I.$$

Pour $\lambda \in \mathcal{U}$ et soit $i = 0$, soit $j = 0$, ces morphismes sont les seuls morphismes.

Pour $i, j \geq 1$, et dans tous les cas $\lambda \in \mathcal{V}$, on peut avoir en plus d'autres morphismes avec une notation comme par exemple $\lambda^j\lambda^i H^k$, pour

$$1 \leq k \leq M(\lambda^i, \lambda^j) - a(\lambda^i)b(\lambda^j) \text{ si } i \neq j$$

ou pour

$$1 \leq k \leq M(\lambda^i, \lambda^j) - a(\lambda^i)b(\lambda^j) - 1 \text{ si } i = j.$$

Ce nombre de morphismes supplémentaires peut être égal à 0. Ces H^k s'occupent de la technique "d'ajouter des morphismes" du lemme 2.4.

On considère maintenant les morphismes dans le cas $\lambda^i\mu^j$ avec $\lambda > \mu$ (c.à.d, $M(\lambda^i, \mu^j) > 0$ pour tous i, j), et en supposant par exemple que $\lambda, \mu \in \mathcal{U}$. Il y aura les types de morphismes suivants : $\mu^j\lambda^i A^k$, $\lambda^i\mu^j B^k$, $\mu^j\lambda^i C^k$, $\mu^j\lambda^i D^k$, avec :
–pour $\mu^j\lambda^i A^k$, $1 \leq k \leq M(\lambda^0, \mu^0)$;
–pour $\mu^j\lambda^i B^k$, $1 \leq k \leq M(\lambda^i, \mu^0) - M(\lambda^0, \mu^0)$;
-pour $\mu^j\lambda^i C^k$, $1 \leq k \leq M(\lambda^0, \mu^j) - M(\lambda^0, \mu^0)$; et
-pour $\mu^j\lambda^i D^k$, $1 \leq k \leq M(\lambda^i, \mu^j) - M(\lambda^i, \mu^0) - M(\lambda^0, \mu^j) + M(\lambda^0, \mu^0)$.

Voir Section 6 pour plus de details.

4.2 Blocs d'une matrice

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{N})$ tel que M une matrice catégorique c.à.d il existe une catégorie $A \in \mathcal{C}at(M)$, d'après 4.1 alors $Ob(A)/\mathcal{R} = \{\lambda, \beta, ...\}$.
Soient $\lambda, \beta \in Ob(A)/\mathcal{R}$, on dit qu'un bloc associé à λ c'est la sous-matrice qui consiste des modules de morphismes de la forme $\lambda^j\lambda^i Z$ pour tout $i, j \leq |\lambda|$, et un bloc associé à λ vers β le sous-matrice qui consiste des modules des morphismes de la forme $\beta^j\lambda^i Z$ pour tout $i \leq |\lambda|$ et $j \leq |\beta|$.
Par exemple : Soit M une matrice définie par :

$$\mathbf{M} = \left(\begin{array}{cc|cc|c} 1 & b & c & d & a \\ e & f & k & l & n \\ \hline 0 & 0 & 1 & x & 0 \\ 0 & 0 & q & m & 0 \\ \hline r & y & z & t & s \end{array}\right), \text{avec } a, b, c, d, e, f, k, l, m, n, q \text{ et } x \in \mathbb{N}^*$$

On va voir après que M peut être catégorique, dans ce cas il existe $A \in \mathcal{C}at(M)$ avec $Ob(A)/\mathcal{R} = \{\lambda, \beta\}$ et $Ob(A) = \{\lambda^0, \lambda^1, \lambda^2, \beta^0, \beta^1\}$. On a

$$\begin{pmatrix} 1 & b & a \\ e & f & n \\ r & y & s \end{pmatrix} \text{ un bloc associé à } \lambda, \begin{pmatrix} c & d \\ k & l \\ z & t \end{pmatrix} \text{ un bloc associé à } \lambda \text{ vers } \beta,$$

$$\begin{pmatrix} 1 & x \\ q & m \end{pmatrix} \text{ un bloc associé à } \beta, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ un bloc associé à } \beta \text{ vers } \lambda.$$

5. Etude des matrices strictement positives

5.1 Etude des matrices strictement positives d'ordre 2

Théorème 5.1.

Soit $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, *une matrice réduite avec* a, b, c *et* $d \in \mathbb{N}^*$

$$\mathcal{C}at(M) \neq \emptyset \quad \textit{si et seulement si} \quad \begin{cases} a, d > 1 \\ \quad \textit{ou} \\ a \geq bc + 1 \qquad \textit{et} \qquad d = 1 \\ \quad \textit{ou} \\ d \geq bc + 1 \qquad \textit{et} \qquad a = 1. \end{cases}$$

Si $\mathcal{C}at(M) \neq \emptyset$ et $a = 1$, alors il existe une catégorie A tel que $M = M_A$. Noter que si M est réduite, alors A est réduite en particulier $d > 1$, sinon, alors $a = d = 1$ donne que les deux objets x_1 et x_2 sont isomorphes, contradiction.
Comme $b, c, d > 0$ ce qui donne, $Ob(A) = \{\lambda^0, \lambda^1\}$ et les morphismes sont données par 4.1 :

$$\begin{array}{rcl} A(\lambda^0, \lambda^0) & = & \{id_{\lambda^0}\} \\ A(\lambda^1, \lambda^1) & = & \{id_{\lambda^1}, \lambda^1\lambda^1 K^m / 1 \leq m \leq d-1\} \text{ pour l'instant} \\ A(\lambda^0, \lambda^1) & = & \{\lambda^1\lambda^0 G^{v,u} / 1 \leq u \leq a(\lambda^0) = 1, 1 \leq v \leq b(\lambda^1) = b\} \\ & = & \{\lambda^1\lambda^0 G^{v,1} / 1 \leq v \leq b\} \\ A(\lambda^1, \lambda^0) & = & \{\lambda^0\lambda^1 G^{v,u} / 1 \leq u \leq a(\lambda^1) = c, 1 \leq v \leq b(\lambda^0) = 1\} \\ & = & \{\lambda^0\lambda^1 G^{1,u} / 1 \leq u \leq c\} \end{array}$$

D'abord on a quelques remarques :

1. Il n'existe pas u, v tel que $(\lambda^1\lambda^0 G^{v,1})(\lambda^0\lambda^1 G^{1,u}) = id_{\lambda^1}$
   On pose qu'il existe u et v tel que : $(\lambda^1\lambda^0 G^{v,1})(\lambda^0\lambda^1 G^{1,u}) = id_{\lambda^1}$, et on choisit $\lambda^1\lambda^1 K^m \neq id_{\lambda^1}$, on a

$$\begin{array}{rcl} (\lambda^1\lambda^0 G^{v,1}) & = & (\lambda^1\lambda^0 G^{v,1})\big[\overbrace{(\lambda^0\lambda^1 G^{1,u})(\lambda^1\lambda^1 K^m)(\lambda^1\lambda^0 G^{v,1})}^{id_{\lambda^0}}\big] \\ & = & \big[\underbrace{(\lambda^1\lambda^0 G^{v,1})(\lambda^0\lambda^1 G^{1,u})}_{id_{\lambda^1}}\big]\big[(\lambda^1\lambda^1 K^m)(\lambda^1\lambda^0 G^{v,1})\big] \\ & = & (\lambda^1\lambda^1 K^m)(\lambda^1\lambda^0 G^{v,1}). \end{array}$$

Donc

$$\begin{aligned}\big[(\lambda^1\lambda^1K^m)(\lambda^1\lambda^0G^{v,1})\big](\lambda^0\lambda^1G^{1,u}) &= (\lambda^1\lambda^0G^{v,1})(\lambda^0\lambda^1G^{1,u}) \\ &= id_{\lambda^1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= (\lambda^1\lambda^1K^m)\big[(\lambda^1\lambda^0G^{v,1})(\lambda^0\lambda^1G^{1,u})\big] \\ &= (\lambda^1\lambda^1K^m) \text{ contradiction.}\end{aligned}$$

2. Si $(\lambda^1\lambda^0G^{v,1})(\lambda^0\lambda^1G^{1,u}) = (\lambda^1\lambda^0G^{q,1})(\lambda^0\lambda^1G^{1,p})$, alors $p = u$ et $q = v$. En effet,

$$\begin{aligned}(\lambda^1\lambda^0G^{q,1}) &= (\lambda^1\lambda^0G^{q,1})\big[(\lambda^0\lambda^1G^{1,p})(\lambda^1\lambda^0G^{q,1})\big] \\ &= \big[(\lambda^1\lambda^0G^{q,1})(\lambda^0\lambda^1G^{1,p})\big](\lambda^1\lambda^0G^{q,1}) \\ &= \big[(\lambda^1\lambda^0G^{v,1})(\lambda^0\lambda^1G^{1,u})\big](\lambda^1\lambda^0G^{q,1}) \\ &= (\lambda^1\lambda^0G^{v,1})\big[(\lambda^0\lambda^1G^{1,u})(\lambda^1\lambda^0G^{q,1})\big] \\ &= (\lambda^1\lambda^0G^{v,1}).\end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned}(\lambda^0\lambda^1G^{1,p}) &= \big[(\lambda^0\lambda^1G^{1,p})(\lambda^1\lambda^0G^{q,1})\big](\lambda^0\lambda^1G^{1,p}) \\ &= (\lambda^0\lambda^1G^{1,p1})\big[(\lambda^1\lambda^0G^{q,1})(\lambda^0\lambda^1G^{1,p})\big] \\ &= (\lambda^0\lambda^1G^{1,p})\big[(\lambda^1\lambda^0G^{v,1})(\lambda^0\lambda^1G^{1,u})\big] \\ &= \big[(\lambda^0\lambda^1G^{1,p})(\lambda^1\lambda^0G^{v,1})\big](\lambda^0\lambda^1G^{1,u}) \\ &= (\lambda^0\lambda^1G^{1,u}).\end{aligned}$$

Ces remarques donnent la formule $d - 1 \geq bc$ c.à.d $d \geq bc + 1$.

Elles permettent également d'établir la notation

$$(\lambda^1\lambda^1G^{v,u}) := (\lambda^1\lambda^0G^{v,1})(\lambda^0\lambda^1G^{1,u}),$$

avec les $(\lambda^1\lambda^1G^{v,u})$ distincts et différents de l'identité pour $1 \leq u \leq c$ et $1 \leq v \leq b$. On pourrait donc écrire

$$A(\lambda^1, \lambda^1) =$$

$$\{id_{\lambda^1}, \lambda^1\lambda^1G^{v,u}/1 \leq u \leq c \text{ et } 1 \leq v \leq b, \lambda^1\lambda^1K^p/1 \leq p \leq d - (bc + 1)\}.$$

A noter qu'on a $(\lambda^1\lambda^1G^{v,u})(\lambda^1\lambda^1G^{q,p}) = (\lambda^1\lambda^1G^{v,p})$, la preuve étant similaire à celle de la remarque 2 ci-dessus.

Dans l'autre sens, on a deux cas :
Si $a > 1$ et $d > 1$ alors $\mathcal{C}at(M) \neq \emptyset$ (voir [5]).
Si $a = 1$ et $d \geq bc + 1$, on prend la catégorie A dont les objets sont $\{\lambda^0, \lambda^1\}$ et les morphismes sont définis par :

$$
\begin{array}{rcl}
A(\lambda^0,\lambda^0) & = & \{id_{\lambda^0}\} \\
A(\lambda^0,\lambda^1) & = & \{\lambda^1\lambda^0G^{v,1}/1 \leq v \leq b\} \\
A(\lambda^1,\lambda^0) & = & \{\lambda^0\lambda^1G^{1,u}/1 \leq u \leq c\} \\
A(\lambda^1,\lambda^1) & = & \{id_{\lambda^1}\} \cup \{\lambda^1\lambda^1G^{v,u}/1 \leq u \leq b \,\text{et}\, 1 \leq v \leq c\} \\
 & & \qquad \cup \quad \{\lambda^1\lambda^1K^p/1 \leq p \leq d-(bc+1)\}.
\end{array}
$$

La loi de composition est définie par :

$$
\begin{array}{rcl}
(\lambda^p\lambda^jG^{v,u})(\lambda^j\lambda^iG^{m,n}) & = & (\lambda^p\lambda^iG^{v,n}) \\
(\lambda^1\lambda^1K^i\,)\;\;(\lambda^1\lambda^jG^{v,u}) & = & (\lambda^1\lambda^jG^{1,u}) \\
(\lambda^j\lambda^1G^{v,u})\;\;(\lambda^1\lambda^1K^i\,) & = & (\lambda^j\lambda^1G^{v,b}) \\
(\lambda^1\lambda^1K^i\,)\;\;(\lambda^1\lambda^1K^{i'}\,) & = & (\lambda^1\lambda^1G^{1,b})
\end{array}
$$

(pour s'amuser on a pris K^i des doublures de $G^{1,b}$, mais on aurait pu dédoubler $G^{1,1}$ ou autre). On vérifie que A est une catégorie en effet :

$$
\big[(\lambda^q\lambda^pG^{y,x})(\lambda^p\lambda^jG^{v,u})\big](\lambda^j\lambda^iG^{m,n}) = (\lambda^q\lambda^jG^{y,u})(\lambda^j\lambda^iG^{m,n}) = (\lambda^q\lambda^iG^{y,n})
$$
$$
= (\lambda^q\lambda^pG^{y,x})(\lambda^p\lambda^iG^{v,n}) = (\lambda^q\lambda^pG^{y,x})\big[(\lambda^p\lambda^jG^{v,u})(\lambda^j\lambda^iG^{m,n})\big],
$$
$$
\big[(\lambda^1\lambda^1K^s)(\lambda^1\lambda^jG^{v,u})\big](\lambda^j\lambda^iG^{v',u'}) = (\lambda^1\lambda^jG^{1,u})(\lambda^j\lambda^iG^{v',u'}) = (\lambda^1\lambda^iG^{1,u'})
$$
$$
= (\lambda^1\lambda^1K^s)(\lambda^1\lambda^iG^{v,u'}) = (\lambda^1\lambda^1K^s)\big[(\lambda^1\lambda^jG^{v,u})(\lambda^j\lambda^iG^{v',u'})\big],
$$
$$
\big[(\lambda^j\lambda^1G^{v,u})(\lambda^1\lambda^1K^s)\big](\lambda^1\lambda^iG^{v',u'}) = (\lambda^j\lambda^1G^{v,b})(\lambda^1\lambda^iG^{v',u'}) = (\lambda^j\lambda^iG^{v,u'})
$$
$$
= (\lambda^j\lambda^1G^{v,u})(\lambda^1\lambda^iG^{1,u'}) = (\lambda^j\lambda^1G^{v,u})\big[(\lambda^1\lambda^1K^s)(\lambda^1\lambda^iG^{v',u'})\big],
$$
$$
\big[(\lambda^1\lambda^1K^s)(\lambda^1\lambda^1K^{s'})\big](\lambda^1\lambda^1K^{s''}) = (\lambda^1\lambda^1G^{1,b})(\lambda^1\lambda^1K^{s''}) = (\lambda^1\lambda^1G^{1,b})
$$
$$
= (\lambda^1\lambda^1K^s)(\lambda^1\lambda^1G^{1,b}) = (\lambda^1\lambda^1K^s)\big[(\lambda^1\lambda^1K^{s'})(\lambda^1\lambda^1K^{s''})\big].
$$

Donc $\mathcal{C}at(M) \neq \emptyset$.

5.2 Etude des matrices strictement positives d'ordre 3

Soit $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ c & n & m \\ p & q & r \end{pmatrix}$, une matrice réduite dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{N}^*)$.

$$\text{Alors, } \mathcal{C}at(M) \neq \emptyset \ \text{ si et seulement si } \begin{cases} q \geq ap \\ m \geq bc \\ r \geq bp + 1 \\ n \geq ac + 1. \end{cases}$$

Si $\mathcal{C}at(M) \neq \emptyset$, alors $r \geq bp + 1$ et $r \geq bp + 1$, voir 2.1 (3) et 5.1.

Remarque :
Si $(\lambda^2\lambda^0G^{v,1})(\lambda^0\lambda^1G^{1,u}) = (\lambda^2\lambda^0G^{v',1})(\lambda^0\lambda^1G^{1,u'})$ alors $(u, v) = (u', v')$.

$$\text{On a } \Big[(\lambda^0\lambda^2G^{1,x})(\lambda^2\lambda^0G^{v,1})\Big](\lambda^0\lambda^1G^{1,u}) = id_{\lambda^0}(\lambda^0\lambda^1G^{1,u}) = (\lambda^0\lambda^1G^{1,u})$$

$$= \Big[(\lambda^0\lambda^2G^{1,x})(\lambda^2\lambda^0G^{v',1})\Big](\lambda^0\lambda^1G^{1,u'}) = id_{\lambda^0}(\lambda^0\lambda^1G^{1,u'}) = (\lambda^0\lambda^1G^{1,u'}),$$

$$\text{et } (\lambda^2\lambda^0G^{v,1})\Big[(\lambda^0\lambda^1G^{1,u})(\lambda^1\lambda^0G^{x,1})\Big] = (\lambda^2\lambda^0G^{v,1})id_{\lambda^0} = (\lambda^2\lambda^0G^{v,1})$$

$$= (\lambda^2\lambda^0G^{v',1})\Big[(\lambda^0\lambda^1G^{1,u'})(\lambda^1\lambda^0G^{x,1})\Big] = (\lambda^2\lambda^0G^{v',1})id_{\lambda^0} = (\lambda^2\lambda^0G^{v',1}).$$

Ce qui donne, $(u, v) = (u', v')$.
Cette remarque donne que $m \geq bc$, de même pour $q \geq ap$. Cela termine la démonstration de l'implication directe.

Dans l'autres sens, si on a $q \geq ap$, $m \geq bc$, $r \geq bp + 1$ et $n \geq ac + 1$ on va démontrer que $\mathcal{C}at(M) \neq \emptyset$.
On définit une catégorie A dont les objets sont $\{\lambda^0, \lambda^1, \lambda^2\}$ et les morphismes

sont définis par :

$$\begin{aligned}
A(\lambda^0,\lambda^0) &= \{id_{\lambda^0}\},\\
A(\lambda^0,\lambda^1) &= \{\lambda^1\lambda^0G^{v,1}/1\le v\le a\}\\
A(\lambda^1,\lambda^0) &= \{\lambda^0\lambda^1G^{1,u}/1\le u\le c\}\\
A(\lambda^0,\lambda^2) &= \{\lambda^2\lambda^0G^{v,1}/1\le v\le b\}\\
A(\lambda^2,\lambda^0) &= \{\lambda^0\lambda^2G^{1,u}/1\le u\le p\}\\
A(\lambda^2,\lambda^1) &= \{\lambda^1\lambda^2G^{v,u}/1\le u\le a, 1\le v\le p\}\\
&\quad\cup\ \{\lambda^1\lambda^2M^1,...,\lambda^1\lambda^2M^{(q-ap)}\}\\
A(\lambda^1,\lambda^2) &= \{\lambda^2\lambda^1G^{v,u}/1\le u\le b, 1\le v\le c\}\\
&\quad\cup\ \{\lambda^2\lambda^1H^1,...,\lambda^2\lambda^1H^{(m-bc)}\}\\
A(\lambda^2,\lambda^2) &= \{id_{\lambda^2}\}\cup\{\lambda^2\lambda^2G^{v,u}/1\le u\le b, 1\le v\le p\}\\
&\quad\cup\ \{\lambda^2\lambda^2N^1,...,\lambda^2\lambda^2N^{(r-bp-1)}\}\\
A(\lambda^1,\lambda^1) &= \{id_{\lambda^1}\}\cup\{\lambda^1\lambda^1G^{u,v}/1\le u\le a, 1\le v\le c\}\\
&\quad\cup\ \{\lambda^1\lambda^1K^1,...,\lambda^1\lambda^1K^{(n-ac-1)}\}.
\end{aligned}$$

On utilisera la notation $id_{\lambda^0}=\lambda^0\lambda^0G^{1,1}$. En revanche, les id_{λ^1} et id_{λ^2} ne sont pas produits d'autres morphismes et agissent comme l'identité. Pour les autres morphismes, la loi de composition interne est définie par :
$(\lambda^k\lambda^jG^{v,u})(\lambda^j\lambda^iG^{y,x})=(\lambda^k\lambda^iG^{v,x})$

$$\begin{array}{ll}
(\lambda^1\lambda^1K^t)(...)=(\lambda^1\lambda^1G^{1,a})(...), & (\lambda^2\lambda^2N^i)(.....)=(\lambda^2\lambda^2G^{1,b})(.....)\\
(.....)(\lambda^1\lambda^1K^i)=(.....)(\lambda^1\lambda^1G^{1,a}), & (.....)(\lambda^2\lambda^2N^i)=(.....)(\lambda^2\lambda^2G^{1,b})\\
(\lambda^2\lambda^1H^i)(......)=(\lambda^2\lambda^1G^{1,b})(......), & (\lambda^1\lambda^2M^i)(......)=(\lambda^2\lambda^1G^{1,a})(......)\\
(......)(\lambda^2\lambda^1H^i)=(......)(\lambda^2\lambda^1G^{1,b}), & (......)(\lambda^1\lambda^2M^i)=(......)(\lambda^1\lambda^2G^{1,a})
\end{array}$$

L'idée de cette construction est de construire d'abord une semicatégorie partiellement unitaire (avec seulement l'identité de λ^0, associée à la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & a & b\\ c & ac & bc\\ p & ap & bp\end{pmatrix}$$

et dont les seuls morphismes sont $(\lambda^k\lambda^jG^{v,u})$. Ensuite, on étend celle-ci en une semicatégorie partiellement unitaire associée à la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ c & n-1 & m \\ p & q & r-1 \end{pmatrix}$$

en rajoutant les morphismes $\lambda^1\,\lambda^1\,K^t$, $\lambda^2\lambda^2N^i$, $\lambda^2\lambda^1H^i$ et $\lambda^1\lambda^2M^1$ qui sont les “doublures” de $\lambda^1\,\lambda^1G^{1,a}$, $\lambda^2\lambda^2G^{1,b}$, $\lambda^2\lambda^1G^{1,a}$ et $\lambda^1\lambda^2G^{1,b}$ respectivement, à la manière du lemme 2.4. Enfin, on rajoute formellement les identités id_{λ^1} et id_{λ^2}.

Cette description permet de vérifier l'associativité, sinon on peut le faire explicitement. Dans le cas d'une matrice d'ordre 2 ci-dessus (5.1), on a vu les équations d'associativité qui correspondent aux morphismes (G, K, N), donc il reste à vérifier les équations associés aux (G, K, N, H, M) qui sont résumés dans le schéma ci-dessous avec un morphisme $H : \lambda^1 \to \lambda^2$ (même idée si on prend $M : \lambda^2 \to \lambda^1$).

$$\begin{tikzcd}
\lambda^1 \arrow[dr, "K"] & & & & & \lambda^1 \\
\lambda^0 \arrow[r, "G"] & \lambda^1 \arrow[dddr, "K"] & & & \lambda^1 \arrow[ur, "K"] \arrow[r, "G"] \arrow[dr, "H"] & \lambda^0 \\
\lambda^2 \arrow[ur, "M"] & & & & & \lambda^2 \\
& & & & & \\
\lambda^i \arrow[r, "G"] & \lambda^0 \arrow[r, "G"] & \lambda^1 \arrow[r, "H"] & \lambda^2 \arrow[r, "G"] \arrow[uuur, "M"] \arrow[dddr, "N"] & \lambda^0 \arrow[r, "G"] & \lambda^j \\
& & & & & \\
\lambda^1 \arrow[dr, "H"] & & & & & \lambda^1 \\
\lambda^0 \arrow[r, "G"] & \lambda^2 \arrow[uuur, "M"] & & & \lambda^2 \arrow[ur, "M"] \arrow[r, "G"] \arrow[dr, "N"] & \lambda^0 \\
\lambda^2 \arrow[ur, "N"] & & & & & \lambda^2
\end{tikzcd}$$

Nous avons par exemple :.

$$\begin{aligned}
\big[(\lambda^1\lambda^2M^i)(\lambda^2\lambda^2N^j)\big](\lambda^2\lambda^1H^k) &= \big[(\lambda^1\lambda^2G^{1,b})(\lambda^2\lambda^2G^{1,b})\big](\lambda^2\lambda^1G^{1,a}) \\
&= (\lambda^1\lambda^2G^{1,b})(\lambda^2\lambda^1G^{1,a}) = (\lambda^1\lambda^1G^{1,a}) \\
&= (\lambda^1\lambda^2M^i)\big[(\lambda^2\lambda^2N^j)(\lambda^2\lambda^1H^k)\big].
\end{aligned}$$

Les autres équations suivent la même idée ; on conclut que $\mathcal{C}at(M) \neq \emptyset$.

5.3 Etude des matrices strictement positives d'ordre n

Soit M une matrice réduite dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{N}^*)$ tel que :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & m_{12} & \cdots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \cdots \\ m_{n1} & m_{n2} & \cdots & m_{nn} \end{pmatrix}$$

alors

$$\mathcal{C}at(M) \neq \emptyset \text{ si et seulement si } \begin{cases} m_{ii} > m_{i1}m_{1i} \\ m_{ij} \geq m_{i1}m_{1j} \end{cases}.$$

Supposons qu'on a $\mathcal{C}at(M) \neq \emptyset$ alors, il existe une catégorie A d'ordre n, dont les objets sont $\{\lambda^0, \lambda^1, ..., \lambda^{n-1}\}$. Pour $2 \leq i \leq n$, la matrice

$$M^{1,i} := \begin{pmatrix} 1 & m_{1i} \\ m_{i1} & m_{ii} \end{pmatrix}$$

est une sous-matrice régulière de M, donc $\mathcal{C}at(M^{1,i}) \neq \emptyset$. Par la section 5.1 on obtient $m_{ii} \geq m_{i1}m_{1i} + 1$.

Pour $2 \leq i \neq j \leq n$, la matrice

$$M^{1,i,j} := \begin{pmatrix} 1 & m_{1i} & m_{1j} \\ m_{i1} & m_{ii} & m_{ij} \\ m_{j1} & m_{ji} & m_{jj} \end{pmatrix}$$

est une sous-matrice régulière de M, donc $\mathcal{C}at(M^{1,i}) \neq \emptyset$. Par la section 5.2 on obtient $m_{ij} \geq m_{i1}m_{1j}$ et $m_{ji} \geq m_{j1}m_{1i}$. Ceci prouve l'implication directe.

Dans l'autre sens, si $m_{ij} \geq m_{i1}m_{1j}$ et $m_{ii} > m_{i1}m_{1i}$ $\forall 1 < i \neq j \leq n$, on va démontrer que $\mathcal{C}at(M) \neq \emptyset$.
Soit A une structure algébrique, dont les objets sont $\{\lambda^0, ..., \lambda^{n-1}\}$ et les morphismes sont donnés par :

$$\begin{aligned}
A(\lambda^0, \lambda^0) &= \{id_{\lambda^0}\} \\
A(\lambda^i, \lambda^0) &= \{\ (\lambda^0\lambda^i\, G^{1,1}), ..., (\lambda^0\, \lambda^i\, G^{1,m_{i1}})\} \\
A(\lambda^0, \lambda^j) &= \{\ (\lambda^j\lambda^0 G^{1,1}), ..., (\lambda^j, \lambda^0 G^{m_{1j},1})\} \\
A\,(\lambda^i, \lambda^j) &= \{\,(\lambda^j\lambda^i G^{1,1}), ..., (\lambda^j\lambda^i G^{m_{1j},m_{i1}})\} \\
&\qquad \cup \quad \{(\lambda^j\lambda^i H^1), ..., (\lambda^i\lambda^j H^{t_{i,j}})\} \\
A\,(\lambda^i, \lambda^i) &= \{\ id_{\lambda^i}, (\lambda^i\lambda^i G^{1,1}), ..., (\lambda^i\lambda^i G^{m_{1i},m_{i1}})\} \\
&\qquad \cup \quad \{(\lambda^i\lambda^i E^1), ..., (\,\lambda^i\,\lambda^i\ E^{s_i}\,)\},
\end{aligned}$$

la loi de composition est donnée par $(\lambda^k\lambda^j G^{d,c})(\lambda^j\lambda^i G^{b,a}) = (\lambda^k\lambda^i G^{d,a})$ et pour les compositions de morphismes différents des id_{λ^i} pour $2 \leq i \leq n$:

$$\begin{aligned}
(\lambda^j\,\lambda^i H^p)(...) = (\lambda^j\lambda^i G^{1,1})(...), \quad (...)(\lambda^j\,\lambda^i H^p) &= (...)(\lambda^j\lambda^i G^{1,1}) \\
(\lambda^i\,\lambda^i E^k)(...) = (\lambda^i\lambda^i G^{1,1})(...), \quad (...)(\,\lambda^i\,\lambda^i E^k) &= (...)(\lambda^i\lambda^i G^{1,1}).
\end{aligned}$$

Pour $2 \leq i \leq n$ les id_{λ^i} sont ensuite rajoutés comme identités. La loi d'associativité est vérifiée voir (5.2), donc M est catégorique.

Finalement, pour le cas général on a l'énoncé suivant. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{N}^*)$ une matrice réduite alors :

1. Si $m_{ii} > 1\,\forall\, 1 \leq i \leq n$, alors $\mathcal{C}at(M) \neq \emptyset$ voir la propriété 2.1 (2).
2. S'il existe i tel que $m_{ii} = 1$ dans ce cas on a deux possibilités :
   (a) si i le seul indice que $m_{ii} = 1$, alors :
   $\mathcal{C}at(M) \neq \emptyset$ si et seulement si $m_{jj} \geq m_{j1}m_{1j}$ et $m_{jk} \geq m_{j1}m_{1k}$ pour toutes $j, k \neq i$ et $j \neq k$ voir (5.3)+(4).
   (b) s'il existe une autre indice $i' \neq i$ tel que $m_{i,i} = m_{i'i'} = 1$ alors $\mathcal{C}at(M) = \emptyset$ car M est réduite voir le (2.5).

Lemme 5.2. *Soit* $M = (m_{ij})_{i,j} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{N}^*)$ *alors :*
$\mathcal{C}at(M) \neq \emptyset$ *si et seulement si pour toute* N *sous-matrice régulière d'ordre* ≤ 3, $\mathcal{C}at(N) \neq \emptyset$.

Démonstration. Pour la partie directe voir 2.1 (3).
Pour la partie indirecte, on suppose que $\mathcal{C}at(N) \neq \emptyset$, pour toute N sous-matrice régulière d'ordre ≤ 3.
Si M est réduite alors on a deux cas :

1. Si $m_{ii} > 1$ pour tout $1 \leq i \leq n$, alors $\mathcal{C}at(M) \neq \emptyset$ voir le lemme de [5] rappelé dans 2.1 (2).
2. S'il existe au moins une i' tel que $m_{i'i'} = 1$ dans ce cas on a deux possibilités :
   (a) Il existe un coefficient unité unique sur le diagonal, on peut supposer $m_{11} = 1$ voir le corollaire (4).
   Soit $2 \leq i \leq n$, on prend la sous-matrice régulière N :
   $$N = \begin{pmatrix} 1 & m_{1i} \\ m_{i1} & m_{ii} \end{pmatrix}.$$
   D'après l'hypothèse, on a $\mathcal{C}at(N) \neq \emptyset$ ce qui donne $m_{ii} > m_{i1}m_{1i}$.
   Soient $i \neq j \in \{1, ..., n\}$, on prend la sous-matrice régulière N :
   $$N = \begin{pmatrix} 1 & m_{1i} & m_{1j} \\ m_{i1} & m_{ii} & m_{ij} \\ m_{j1} & m_{ji} & m_{jj} \end{pmatrix}.$$
   D'après l'hypothèse, on a $\mathcal{C}at(N) \neq \emptyset$ ce qui donne $m_{ij} \geq m_{i1}m_{1j}$.
   Donc $\mathcal{C}at(N) \neq \emptyset$ voir (5.3)
   (b) si existent d'autres indices $\{i_1, i_2, \ldots\}$ différents de i' avec $m_{i_1i_1} = m_{i_2i_2} = ... = 1$, alors comme par hypothèse M est réduite, on prend la sous-matrice régulière N de taille 2 ou 3 contenant les indices i', $i_1 \neq i'$, et éventuellement un autre indice j, telle que les lignes (resp. colonnes) de N correspondants à i' et i_1 sont distincts. D'après l'hypothèse, on a $\mathcal{C}at(N) \neq \emptyset$ mais dans ce cas les objets $x_{i'}$ et x_{i_1} seraient isomorphes, impossible.

Si M non-réduite, alors il existe une sous-matrice réduite M' voir (2.5) et par l'argument ci-dessus, $\mathcal{C}at(M') \neq \emptyset$ donc $\mathcal{C}at(M) \neq \emptyset$. □

6. Etude des matrices positives

6.1 Etude d'une matrice d'ordre 4 à un seul bloc zéro

Soit M une matrice réduite dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{N})$ avec $b, c, d, e, f, k, l, x, q$ et m sont non nuls tel que :

$$M = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & b & c & d \\ e & f & k & l \\ \hline 0 & 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & q & m \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \triangle_1 & \triangle_{1\to 2} \\ \hline 0 & \triangle_2 \end{array}\right).$$

Théorème 6.1. *Avec ces notations, on a*

$$\mathcal{C}at(M) \neq \emptyset \textit{ si et seulement si } \begin{cases} f \geq be + 1 \\ m \geq xq + 1 \\ k, d, l \geq c \\ l \geq k + d - c \end{cases}.$$

Démonstration. Soit A une catégorie associée à M, alors $Ob(A)/\mathcal{R} = \{1, 2\}$ alors les objets sont $\{1^0, 1^1, 2^0, 2^1\}$ et les morphismes sont définis par rapport à chaque bloc :

$$\triangle_{1\to 2} \begin{cases} A(1^0, 2^0) & = & \{2^0 1^0 A^1, ..., 2^0 1^0 A^c\} = A \\ A(1^1, 2^0) & = & \{2^0 1^1 B^1, ..., 2^0 1^1 B^k\} = B \\ A(1^0, 2^1) & = & \{2^1 1^0 C^1, ..., 2^1 1^0 C^d\} = C \\ A(1^1, 2^1) & = & \{2^1 1^1 D^1, ..., 2^1 1^1 D^l\} = D \end{cases}$$

$$\triangle_{1\to 1} \begin{cases} A(1^0, 1^0) & = & \{id_{1^0}\} \\ A(1^0, 1^1) & = & \{(1^1 1^0 G^{1,1}) = G_1, ..., 1^1 1^0 G^{1,b}\} \\ A(1^1, 1^0) & = & \{(1^0 1^1 G^{1,1}) = F_1, ..., 1^0 1^1 G^{e,1}\} \\ A(1^1, 1^1) & = & \{id_{1^1}, 1^1 1^1 G^{1,1}, ..., 1^1 1^1 G^{b,e}\} \\ & & \cup \quad \{1^1 1^1 X^1, ..., 1^1 1^1 X^{f-be-1}\} \end{cases}$$

$$\triangle_{2\to 2} \begin{cases} A(2^0, 2^0) & = & \{id_{2^0}\} \\ A(2^0, 2^1) & = & \{(2^1 2^0 G^{1,1}) = N_1, ..., 2^1 2^0 G^{1,x}\} \\ A(2^1, 2^0) & = & \{(2^0 2^1 G^{1,1}) = M_1, ..., 2^0 2^1 G^{q,1}\} \\ A(2^1, 2^1) & = & \{id_{2^0}, 2^1 2^1 G^{1,1}, ..., 2^1 2^1 G^{x,q}\} \\ & & \cup \quad \{2^1 2^1 X^1, ..., 2^1 2^1 X^{m-xz-1}\}. \end{cases}$$

Comme $\mathcal{C}at(M) \neq \emptyset$ et d'après 2.1 (3), alors $\mathcal{C}at(\triangle_1) \neq \emptyset$ et $\mathcal{C}at(\triangle_2) \neq \emptyset$ ce qui donne $f \geq be+1$ et $m \geq xq+1$ voir le théorème 5.1. On obtient par ailleurs la notation utilisée ci-dessus pour ces morphismes.

Il reste à démontrer que $k, d, l \geq c$, $l \geq k$, $l \geq d$ et $l \geq k+d-c$.
On prend $k < c$, alors il existe au moins $p \in \{1, ..., k\}$ et $u', u'' \in \{1, ..., c\}$ avec $u \neq u''$ tel que :
$(2^0 1^0 A^{u'})(1^0 1^1 G^{1,1}) = (2^0 1^0 A^{u''})(1^0 1^1 G^{1,1}) = (2^0 1^1 B^p)$, ce qui donne :
$\Big[(2^0 1^0 A^{u'})(1^0 1^1 G^{1,1})\Big](1^1 1^0 G^{1,1}) = \Big[(2^0 1^0 A^{u''})(1^0 1^1 G^{1,1})\Big](1^1 1^0 G^{1,1})$.
D'autre part ;

$$\begin{aligned}
\Big[(2^0 1^0 A^{u'})(1^0 1^1 G^{1,1})\Big](1^1 1^0 G^{1,1}) &= (2^0 1^0 A^{u'})\Big[(1^0 1^1 G^{1,1})(1^1 1^0 G^{1,1})\Big] \\
&= (2^0 1^0 A^{u'}) id_{1^0} = (2^0 1^0 A^{u'}) \\
&= \Big[(2^0 1^0 A^{u''})(1^0 1^1 G^{1,1})\Big](1^1 1^0 G^{1,1}) \\
&= (2^0 1^0 A^{u''}) id_{1^0} = (2^0 1^0 A^{u''})
\end{aligned}$$

Alors $(2^0 1^0 A^{u'}) = (2^0 1^0 A^{u''})$ ce qui donne $u' = u''$, une contradiction, donc $k \geq c$. La même chose pour $d \geq c$ et $l \geq c$.

Pour $l \geq k+d-c$, on va noter quelques applications. L'idée est d'utiliser la composition à gauche ou à droite par les différents morphismes désignés par le symbole $G^{1,1}$ pour obtenir des applications entre les différents ensembles de morphismes A, B, C, D. Nous avons les flèches :
$N_1 := (2^1 2^0 G^{1,1}) : 2^0 \to 2^1$ $\qquad F_1 := (1^0 1^1 G^{1,1}) : 1^1 \to 1^0$
$M_1 := (2^0 2^1 G^{1,1}) : 2^1 \to 2^0$ $\qquad G_1 := (1^1 1^0 G^{1,1}) : 1^0 \to 1^1$.
La composition avec celles-ci donne :
$gN_1 : B \to D$ tel que $gN_1(2^0 1^1 B^i) = N_1(2^0 1^1 B^i) = (2^1 2^0 G^{1,1})(2^0 1^1 B^i)$,
$gM_1 : D \to B$ tel que $gM_1(2^1 1^1 D^i) = M_1(2^1 1^1 D^i) = (2^0 2^1 G^{1,1})(2^1 1^1 D^i)$,
$dF_1 : C \to D$ tel que $dF_1(2^1 1^0 C^i) = (2^1 1^0 C^i)F_1 = (2^1 1^0 C^i)(1^0 1^1 G^{1,1})$,
$dG_1 : D \to C$ tel que $dG_1(2^1 1^1 D^i) = (2^1 1^1 D^i)G_1 = (2^1 1^1 D^i)(1^1 1^0 G^{1,1})$,
et de manière similaire

$$dF_1 : A \leftrightarrow B : dG_1, \qquad gN_1 : A \leftrightarrow C : gM_1.$$

Lemme 6.2. *Les applications gN_1 et dF_1 sont injectives.*

Démonstration. On remarque $gM_1 \circ gN_1 = id_B$ et $dG_1 \circ dF_1 = id_C$. En effet,

$$\begin{aligned} gM_1 \circ gN_1((2^0 1^1 B^i)) &= gM_1\Big[(2^1 2^0 G^{1,1})(2^0 1^1 B^i)\Big] \\ &= (2^0 2^1 G^{1,1})\Big[(2^1 2^0 G^{1,1})(2^0 1^1 B^i)\Big] \\ &= \Big[(2^0 2^1 G^{1,1})(2^1 2^0 G^{1,1})\Big](2^0 1^1 B^i) \\ &= id_{2^0}(2^0 1^1 B^i) = (2^0 1^1 B^i). \end{aligned}$$

Donc $gM_1 \circ gN_1 = id_B$, la même pour $dG_1 \circ dF_1 = id_C$. De même pour les applications entre A et B ou A et C. $\square$

On obtient le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "gN_1"] \arrow[d, "dF_1"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & C \arrow[d, "dF_1"] \\ B \arrow[r, "gN_1"'] & D. \end{tikzcd}$$

Ce diagramme est commutatif, car $dF_1 gN_1(u) = dF_1(N_1.u) = N_1 u F_1 = gN_1 dF_1(u)$.
Aussi les flèches sont toutes injectives par le lemme 6.2.
On peut donc considérer $dF_1(gN_1(A)) \subset D$ et on notera cela par $N_1.A.F_1$.
On a également $dF_1(C) \subset D$, noté par $C.F_1$,
similairement $gN_1(B) = N_1.B \subset D$.
On peut maintenant dire plus précisément ce que l'on veut démontrer : que

$$\begin{array}{rcl} (\,C.F_1 - N_1.A.F_1) & \subset & D \\ & \text{et} & \\ (N_1.B - N_1.A.F_1) & \subset & D \end{array}$$

soient disjoints entre eux, ce qui conduira à l'inégalité recherchée.
Par l'absurde, supposons qu'il existe $y \in (C.F_1 - N_1.A.F_1) \cap (N_1.B - N_1.A.F_1)$; alors
$y \in (C.F_1 - N_1.A.F_1)$ donc il existe $u \in (C - N_1.A)$ tel que $y = dF_1(u) = uF_1$, et

$y \in (N_1.B - N_1.A.F_1)$ donc il existe $v \in (B - A.F_1)$ tel que $y = gN_1(v) = N_1 v$.
On a $y = uF_1 = N_1 v$. Le calcul principal de cette démonstration est que :

$$\begin{aligned} gN_1.gM_1(u) &= N_1 M_1 u = N_1 M_1 u F_1 G_1 \\ &= N_1 M_1 N_1 v G_1 = N_1 v G_1 = u F_1 G_1 = u. \end{aligned}$$

On a $u \in (C - N_1.A)$ c.à.d $u \in C$ alors il existe a tel que $u = (2^1 1^0 C^a)$.
D'autre part $gM_1(u) = (2^0 2^1 G^{1,1})(2^1 1^0 C^a) = (2^0 1^0 A^a)$ ce qui donne $gM_1(u) \in A$ alors $gN_1.gM_1(u) = u \in N_1.A$; une contradiction.
Alternativement, de façon similaire,

$$\begin{aligned} dF_1.dG_1(v) &= vG_1 F_1 = M_1 N_1 v G_1 F_1 \\ &= M_1 u F_1 G_1 F_1 = M_1 u F_1 = M_1 N_1 v = v. \end{aligned}$$

Comme $v \in B$ alors il existe b tel que $v = (2^0 1^1 B^b)$.
D'autre part $dG_1(v) = (2^0 1^1 B^b)(1^1 1^0 G^{1,1}) = (2^0 1^0 A^b)$, d'où $dG_1(v) \in A$ alors $dF_1.dG_1(v) = v \in A.F_1$, encore une contradiction.
On conclut que $(C.F_1 - N_1.A.F_1) \bigcap (N_1.B - N_1.A.F_1) = \emptyset$.

Nous avons donc trois sous-ensembles

$$N_1.A.F_1, \quad (N_1.B - N_1.A.F_1), \quad (C.F_1 - N_1.A.F_1)$$

disjoints de D, de cardinalités respectives

$$\begin{aligned} Card(N_1.A.F_1) &= c, \\ Card(N_1.B - N_1.A.F_1) &= k - c, \\ Card(C.F_1 - N_1.A.F_1) &= d - c. \end{aligned}$$

Comme $Card(D) = l$ on obtient $c + (k - c) + (d - c) \leq l$ d'où $d + k - c \leq l$, l'inégalité voulue.

Pour le retour, i.e. l'existence d'une catégorie si les inégalités sont satisfaites, nous verrons la démonstration plus bas dans le cas général. □

Remarque : La démonstration de $k \geq c$ utilisait le fait que $A(1^0, 1^0)$ consiste seulement de l'identité, mais n'utilisait pas cette propriété pour $A(2^0, 2^0)$. On pourra donc utiliser ce même argument pour les coefficients dans un bloc correspondant à des flèches entre une classe $\lambda \in \mathcal{U}$ et une classe μ dans $\mathcal{V}$, ou inversement.

6.2 Etude d'une matrice réduite d'ordre n

Théorème 6.3. *Soit* $M = (m_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{N})$ *une matrice réduite alors,*

$$\mathcal{C}at(M) \neq \emptyset \Leftrightarrow \begin{cases} \qquad M & \textit{acceptable} & \\ M(\lambda^i, \lambda^i) \geq & a(\lambda^i)b(\lambda^i) + 1 & \forall \lambda \in \mathcal{U}, i \geq 1 \\ M(\lambda^i, \lambda^j) \geq & a(\lambda^i)b(\lambda^j) & \forall \lambda \in \mathcal{U} \\ M(\lambda^i, \mu^j) \geq & M(\lambda^i, \mu^0) & \forall \lambda > \mu, \mu \in \mathcal{U} \\ M(\lambda^i, \mu^j) \geq & M(\lambda^0, \mu^j) & \forall \lambda > \mu, \lambda \in \mathcal{U} \\ M(\lambda^i, \mu^j) \geq & M(\lambda^0, \mu^j) + M(\lambda^i, \mu^0) & \\ & \qquad -M(\lambda^0, \mu^0) & \forall \lambda \geq \mu \in \mathcal{U} \end{cases}$$

Ici $\{\lambda^i, ..., \beta^j, ...etc\}$ *est l'ensemble des objets partagé en classes d'équivalence avec la relation d'ordre, et on note :*
$a(\lambda^i) := M(\lambda^i, \lambda^0)$ *et* $b(\lambda^j) := M(\lambda^0, \lambda^j)$.

Démonstration. D'abord pour l'implication directe, on pose $\mathcal{C}at(M) \neq \emptyset$. Alors il existe A une catégorie associé à M et on a d'après la partition de M que les objets peuvent être notés $\{\lambda^i, \ldots, \mu^j, \ldots\}$.
Donc M sera :

$$M = \bigcup_{\lambda \in \mathcal{U}} M^\lambda \bigoplus \bigcup_{\mu \in \mathcal{V}} M^\mu \bigoplus \bigcup_{\substack{\lambda \in \mathcal{U} \\ \mu \in \mathcal{V}}} M^{\lambda,\mu}$$

On va démontrer que M est acceptable.
En effet soit $\lambda^i \in Ob(A)$ comme $M^\lambda > 0$ alors $|A(\lambda^i, \lambda^i)| \geq 1$ donc $\lambda^i \geq \lambda^i$ alors $\geq$ est réflexive.
Pour la transitivité soient λ^i,μ^j et ϕ^k trois objets tels que $\lambda^i \geq \mu^j$ et $\mu^j \geq \phi^k$, alors il existe deux morphismes $F = \mu^j \lambda^i H^a$ et $G = \phi^k \mu^j J^b$.
On a $K = G \circ F = (\phi^k \mu^j J^b)(\mu^j \lambda^i H^a) = (\phi^k \lambda^i M^c)$ donc $\lambda^i \geq \phi^k$ alors $\geq$ est transitive.
D'autre part, le résultat de (5.3) s'applique à chaque sous-matrice diagonale à coefficients strictement positifs M^λ, M^μ, ... Pour les sous-matrices $M^{\lambda,\mu}$ quand $\lambda > \mu$ la condition est tirée du théorème 6.1 et la remarque qui lui succède. On obtient ainsi les conditions numériques énoncées.

Dans l'autre sens, supposons que M satisfait aux conditions numériques, et on va démontrer que $\mathcal{C}at(M) \neq \emptyset$.

On travaille d'abord sur le cas où $\lambda, \beta, \ldots \in \mathcal{U}$ et après on ajoutera les identités, donc M devient :

$$M = \bigcup_{\lambda \in \mathcal{U} \bigcup \mathcal{V}} M^{\lambda} \bigoplus \bigcup_{\lambda, \mu \in \mathcal{U} \bigcup \mathcal{V}} M^{\lambda, \mu}$$

Afin de simplifier la construction, on fera appel à la stratégie de dédoublement du lemme 2.4. On souhaite construire une semi-catégorie partiellement unitaire avec conditions d'unité sur les λ^0 pour $\lambda \in \mathcal{U}$. Par le lemme 2.4 et le rajout d'unités ensuite, il suffit de considérer la construction d'une semi-catégorie partiellement unitaire, avec le bon nombre de morphismes de λ^i vers μ^j quand $\lambda > \mu$, mais pour les bloc diagonaux, avec condition d'unité seulement sur les $A(\lambda^0, \lambda^0)$ pour $\lambda \in \mathcal{U}$, et en supposant que $M(\lambda^i, \lambda^j) = a(\lambda^i)b(\lambda^j)$ pour $\lambda \in \mathcal{U}$.
Pour $\lambda \in \mathcal{V}$ on peut prendre $a(\lambda^i) = b(\lambda^j) = 1$ et $M(\lambda^i, \lambda^j) = 1$, mais pour $i = j$ l'unique morphisme n'est pas considéré comme identité.
Soit A une semi-catégorie dont les objets sont notés λ^i avec $\lambda \in Ob(A)/\mathcal{R}$ et les morphismes sont :
$Mor(A) = \Big\{(\lambda^j, \lambda^i, (u, v)) \big| \lambda \in \mathcal{U} \cup \mathcal{V}\Big\} \cup \Big\{(\mu^j, \lambda^i, k) \big| \lambda \geq \mu \in \mathcal{U} \cup \mathcal{V}\Big\}$.
Ici $1 \leq v \leq a(\lambda^i)$ et $1 \leq u \leq b(\lambda^j)$, en mettant $(\lambda^0, \lambda^0, (u, v)) = id_{\lambda^1}$ si $\lambda \in \mathcal{U}$.
Un morphisme noté $(\mu^j, \lambda^i, \ldots)$ aura source λ^i et but μ^j.

Les intervalles dans lesquelles se trouvent les entiers k seront maintenant précisés. Pour cela on introduit la notation suivante.

Pour $\lambda > \mu$, on notera

$$|\mu^0, \lambda^0| := \{1, 2, \ldots, M(\mu^0, \lambda^0)\}, \;\; |\mu^0, \lambda^i| := \{1, 2, \ldots, M(\mu^0, \lambda^i)\},$$

mais en revanche

$$|\mu^n, \lambda^0| := \{1 + M(\mu^0, \lambda^0) - M(\mu^n, \lambda^0), \ldots, M(\mu^0, \lambda^0)\}$$

(ce qui peut contenir des nombres négatifs), et enfin

$$|\mu^n, \lambda^i| := \{1 + M(\mu^0, \lambda^0) - M(\mu^n, \lambda^0), \ldots, h\},$$

où $h = M(\mu^n, \lambda^i) + M(\mu^0, \lambda^0) - M(\mu^n, \lambda^0)$.
De cette façon,

$$\#|\mu^0, \lambda^0| = M(\mu^0, \lambda^0), \;\; \#|\mu^0, \lambda^i| = M(\mu^0, \lambda^i),$$

$$\#|\mu^n, \lambda^0| = M(\mu^n, \lambda^0), \quad \#|\mu^n, \lambda^i| = M(\mu^n, \lambda^i).$$

D'autre part

$$|\mu^0, \lambda^i| \cap |\mu^n, \lambda^0| = |\mu^0, \lambda^0|.$$

On notera souvent par $H'(\mu^n, \lambda^i)$ le complémentaire

$$H'(\mu^n, \lambda^i) := \{M(\mu^0, \lambda^i) + 1, \ldots, h\}$$

ayant

$$\#H'(\mu^n, \lambda^i) = M(\mu^n, \lambda^i) - M(\mu^0, \lambda^i) - M(\mu^n, \lambda^0) + M(\mu^0, \lambda^0)$$

éléments. L'hypothèse dit que ce nombre d'éléments est ≥ 0.

Ainsi $|\mu^n, \lambda^i|$ est la réunion disjointe des quatre parties suivantes :

$$|\mu^0, \lambda^0|, \quad |\mu^0, \lambda^i| - |\mu^0, \lambda^0|, \quad |\mu^n, \lambda^0| - |\mu^0, \lambda^0|, \quad H'(\mu^n, \lambda^i).$$

Si $\lambda \in \mathcal{V}$, il n'existe pas d'objet λ^0 et pour la définition des intervalles on fera la convention que $M(\mu^n, \lambda^0) := 1$ pour tout n. De même si $\mu \in \mathcal{V}$ on fera la convention que $M(\mu^0, \lambda^i) := 1$ pour tout i. Ainsi l'intervalle noté conventionnellement par $|\mu^0, \lambda^0|$, ayant au moins un entier $k = 1$, est contenu dans $|\mu^n, \lambda^i|$. Nous n'avons alors pas besoin de distinguer les cas suivant que les classes soient dans $\mathcal{U}$ ou $\mathcal{V}$.

On définit la loi de composition interne par quatre équations :

1. $(\mu^j, \lambda^i, k) \circ (\lambda^i, \varphi^n, k') = (\mu^j, \varphi^n, 1)$
   (l'utilisation des symboles différents φ, λ, μ ici veut dire qu'on a l'hypothèse $\varphi \neq \lambda \neq \mu$, une convention en vigueur partout).

2. $(\lambda^j, \lambda^i, (u, v)) \circ (\lambda^i, \lambda^n, (u', v')) = (\lambda^j, \lambda^n, (u, v'))$.

3. $(\lambda^j, \lambda^i, (v, u)) \circ (\lambda^i, \mu^n, k) = (\lambda^j, \mu^n, k')$

$$\text{avec } k' = \begin{cases} k & \text{si } k \in |\mu^0, \lambda^0| \\ 1 & \text{si } k \in |\mu^0, \lambda^i| - |\mu^0, \lambda^0| \\ k & \text{si } k \in |\mu^n, \lambda^0| - |\mu^0, \lambda^0| \\ 1 & \text{si } k \in H'(\mu^n, \lambda^i). \end{cases}$$

Noter que si $\lambda \in \mathcal{V}$ alors $(\lambda^j, \lambda^i, (v,u)) \circ (\lambda^i, \mu^n, k) = (\lambda^j, \mu^n, 1)$; en revanche si $\lambda \in \mathcal{U}$ et $i = 0$ alors, $(\lambda^j, \lambda^i, (v,u)) \circ (\lambda^i, \mu^n, k) = (\lambda^j, \mu^n, k)$. On peut vérifier que $k' \in |\mu^n, \lambda^j|$, c'est la raison pour laquelle on a mis $k' = 1$ dans le deuxième et le quatrième cas.

4. $(\mu^n, \lambda^j, k) \circ (\lambda^j, \lambda^i, (u,v)) = (\mu^n, \lambda^i, k')$

$$k' = \begin{cases} k & \text{si } k \in |\lambda^0, \mu^0| \\ 1 & \text{si } k \in |\lambda^j, \mu^0| - |\lambda^0, \mu^0| \\ k & \text{si } k \in |\lambda^0, \mu^n| - |\lambda^0, \mu^0| \\ 1 & \text{si } k \in H'(\mu^n, \lambda^i). \end{cases}$$

Encore, si $\lambda \in \mathcal{V}$ alors $(\mu^n, \lambda^j, k) \circ (\lambda^j, \lambda^i, (u,v)) = (\mu^n, \lambda^i, 1)$ et si $\lambda \in \mathcal{U}$ et $j = 0$ alors, $(\mu^n, \lambda^j, k) \circ (\lambda^j, \lambda^i, (u,v)) = (\mu^n, \lambda^i, k)$. On vérifie que $k' \in |\mu^n, \lambda^i|$.

Pour l'unité partielle :
Comme $k' = k$ pour $i = 0$ voir (3) ou $j = 0$ voir (4) quand $\lambda \in \mathcal{U}$, $(\lambda^0\lambda^0(1,1))$ agit comme une l'identité.

Pour l'associativité :
soient λ,μ,φ,$\phi \in Ob(A)/\sim$ alors il y a 8 formes des équations associatives :

(1) $\lambda^i \longrightarrow \mu^j \longrightarrow \phi^t \longrightarrow \varphi^n$ (5) $\lambda^i \longrightarrow \lambda^j \longrightarrow \mu^t \longrightarrow \mu^n$
(2) $\lambda^i \longrightarrow \mu^j \longrightarrow \mu^t \longrightarrow \phi^n$ (6) $\lambda^i \longrightarrow \lambda^j \longrightarrow \lambda^t \longrightarrow \mu^n$
(3) $\lambda^i \longrightarrow \mu^j \longrightarrow \phi^t \longrightarrow \phi^n$ (7) $\lambda^i \longrightarrow \mu^j \longrightarrow \mu^t \longrightarrow \mu^n$
(4) $\lambda^i \longrightarrow \lambda^j \longrightarrow \mu^t \longrightarrow \varphi^n$ (8) $\lambda^i \longrightarrow \lambda^j \longrightarrow \lambda^t \longrightarrow \lambda^n$.

Rappelons que les symboles $\lambda, \mu, \phi, \varphi$ distincts représentent par convention des classes différentes.

équation 1 :

$$\begin{aligned} \Big[(\varphi^n\phi^t, a)(\phi^t\mu^j, b)\Big](\mu^j\lambda^i, c) &= (\varphi^n\mu^j, 1)(\mu^j\lambda^i, c) = (\varphi^n\lambda^i, 1) \\ &= (\varphi^n\phi^t, a)(\phi^t\lambda^i, 1) \\ &= (\varphi^n\phi^t, a)\Big[(\phi^t\mu^j, b)(\mu^j\lambda^i, c)\Big] \\ &= (\varphi^n\phi^t, a)\Big[(\phi^t\mu^j, b)(\mu^j\lambda^i, c)\Big]. \end{aligned}$$

équation 2 :

$$\begin{aligned}\Big[(\phi^n\mu^t,a)(\mu^t\mu^j,(u,v))\Big](\mu^j\lambda^i,b) &= (\phi^n\mu^j,c)(\mu^j\lambda^i,b)=(\phi^n\lambda^i,1)\\ &= (\phi^n\mu^t,a)(\mu^t\lambda^i,d)\\ &= (\phi^n\mu^t,a)\Big[(\mu^t\mu^j(u,v))(\mu^j\lambda^i,b)\Big]\end{aligned}$$

pour c et d qui dépendent de a et de b d'une manière qui n'est pas important pour le calcul.

équation 3 :

$$\begin{aligned}\Big[(\phi^n\phi^t(u,v))(\phi^t\mu^j,a)\Big](\mu^j\lambda^i,b) &= (\phi^n\mu^j,c)(\mu^j\lambda^i,b)=(\phi^n\lambda^j,1)\\ &= (\phi^n\phi^t,(u,v))(\phi^t\lambda^i,1)\\ &= (\phi^n\phi^t,(u,v))\Big[(\phi^t\mu^j,a)(\mu^j\lambda^i,b)\Big].\end{aligned}$$

Par ailleurs l'équation 4 est comme l'équation 3.

équation 5 : Considérons

$$\begin{aligned}Q=\Big[(\mu^n\mu^t,(a,b))(\mu^t\lambda^j,k)\Big](\lambda^j\lambda^i,(c,d)) &= (\mu^n\lambda^j,k')(\lambda^j\lambda^i,(c,d))\\ &= (\mu^n\lambda^i,k''),\end{aligned}$$

$$\text{avec } k'=\begin{cases} k & \text{si } k\in|\lambda^0,\mu^0|\\ 1 & \text{si } k\in|\lambda^0,\mu^t|-|\lambda^0,\mu^0|\\ k & \text{si } k\in|\lambda^j,\mu^0|-|\lambda^0,\mu^0|\\ 1 & \text{si } k\in H'(\lambda^j,\mu^t)\end{cases}$$

et avec

$$k''=\begin{cases} k' & k'\in|\lambda^0,\mu^0|\\ 1 & k'\in|\lambda^j,\mu^0|-|\lambda^0,\mu^0|\\ k' & k'\in|\lambda^0,\mu^n|-|\lambda^0,\mu^0|\\ 1 & k'\in H'(\lambda^j,\mu^n)\end{cases} = \begin{cases} k & k\in|\lambda^0,\mu^0|\\ 1 & k\in|\lambda^0,\mu^t|-|\lambda^0,\mu^0|\\ 1 & k\in|\lambda^j,\mu^0|-|\lambda^0,\mu^0|\\ 1 & k\in H'(\lambda^j,\mu^t).\end{cases}$$

Pour la dernière égalité on va vérifier que k''=1 si $k\in|\lambda^j,\mu^0|-|\lambda^0,\mu^0|$; en effet, dans ce cas $k'=k$ donc $k'\in|\lambda^j,\mu^0|-|\lambda^0,\mu^0|$ ce qui donne $k''=1$.

Les autres lignes sont faciles à vérifier. Donc $Q = (\mu^n\lambda^i, k'')$ avec

$$k'' = \begin{cases} k & \text{si } k \in |\lambda^0, \mu^0| \\ 1 & \text{si } k \in |\lambda^j, \mu^t| - |\lambda^0, \mu^0|. \end{cases}$$

D'autre part, soit

$$\begin{array}{rcl} Q' = (\mu^n\mu^t, (a,b))\Big[(\mu^t\lambda^j, k)(\lambda^j\lambda^i, (c,d))\Big] & = & (\mu^n\mu^t, (a,b))(\mu^t\lambda^i, k') \\ & = & (\mu^n\lambda^i, k''), \end{array}$$

$$\text{avec } k' = \begin{cases} k & \text{si } k \in |\lambda^0, \mu^0| \\ 1 & \text{si } k \in |\lambda^j, \mu^0| - |\lambda^0, \mu^0| \\ k & \text{si } k \in |\lambda^0, \mu^t| - |\lambda^0, \mu^0| \\ 1 & \text{si } k \in H'(\lambda^j, \mu^t) \end{cases}$$

et avec

$$k'' = \begin{cases} k' & k' \in |\lambda^0, \mu^0| \\ 1 & k' \in |\lambda^0, \mu^t| - |\lambda^0, \mu^0| \\ k' & k' \in |\lambda^i, \mu^0| - |\lambda^0, \mu^0| \\ 1 & k' \in H'(\lambda^i, \mu^t) \end{cases} = \begin{cases} k & k \in |\lambda^0, \mu^0| \\ 1 & k \in |\lambda^j, \mu^0| - |\lambda^0, \mu^0| \\ 1 & k \in |\lambda^0, \mu^t| - |\lambda^0, \mu^0| \\ 1 & k \in H'(\lambda^i, \mu^t). \end{cases}$$

Comme avant si $k \in |\lambda^0, \mu^t| - |\lambda^0, \mu^0|$ alors $k' = k$ donc $k' \in |\lambda^0, \mu^t| - |\lambda^0, \mu^0|$ et $k'' = 1$. Ceci donne $Q' = (\mu^n\lambda^i, k'')$ avec

$$k'' = \begin{cases} k & \text{si } k \in |\lambda^0, \mu^0| \\ 1 & \text{si } k \in |\lambda^j, \mu^t| - |\lambda^0, \mu^0|. \end{cases}$$

En conclusion, $Q = Q'$ quelque soit $k \in |\lambda^j, \mu^t|$. On obtient l'équation 5.
<u>équation 6</u> : Soit

$$\begin{array}{rcl} Q = \Big[(\mu^n\lambda^t, k)(\lambda^t\lambda^j, (a,b))\Big](\lambda^j\lambda^i, (c,d)) & = & (\mu^n\lambda^j, k')(\lambda^j\lambda^i, (c,d)) \\ & = & (\mu^n\lambda^i, k''), \end{array}$$

$$\text{avec } k' = \begin{cases} k & \text{si } k \in |\lambda^0, \mu^0| \\ 1 & \text{si } k \in |\lambda^t, \mu^0| - |\lambda^0, \mu^0| \\ k & \text{si } k \in |\lambda^0, \mu^n| - |\lambda^0, \mu^0| \\ 1 & \text{si } k \in H'(\lambda^t, \mu^n) \end{cases}$$

et avec

$$k'' = \begin{cases} k' & k' \in |\lambda^0, \mu^0| \\ 1 & k' \in |\lambda^j, \mu^0| - |\lambda^0, \mu^0| \\ k' & k' \in |\lambda^0, \mu^n| - |\lambda^0, \mu^0| \\ 1 & k' \in H'(\lambda^j, \mu^n) \end{cases} = \begin{cases} k & k \in |\lambda^0, \mu^0| \\ 1 & k \in |\lambda^t, \mu^0| - |\lambda^0, \mu^0| \\ k & k \in |\lambda^0, \mu^n| - |\lambda^0, \mu^0| \\ 1 & k \in H'(\lambda^t, \mu^n). \end{cases}$$

D'autre part, soit

$$\begin{aligned} Q' = (\mu^n\lambda^t, k)\Big[(\lambda^t\lambda^j, (a,b))(\lambda^j\lambda^i, (c,d))\Big] &= (\mu^n\lambda^t, k)(\lambda^t\lambda^i, (a,d)) \\ &= (\mu^n\lambda^i, k'), \end{aligned}$$

$$\text{avec } k' = \begin{cases} k & \text{si } k \in |\lambda^0, \mu^0| \\ 1 & \text{si } k \in |\lambda^t, \mu^0| - |\lambda^0, \mu^0| \\ k & \text{si } k \in |\lambda^0, \mu^n| - |\lambda^0, \mu^0| \\ 1 & \text{si } k \in H'(\lambda^t, \mu^n). \end{cases}$$

Alors $Q = Q'$ sur $|\lambda^t, \mu^n|$, ce qui donne l'équation 6.
Par ailleurs on remarque que l'équation 7 est semblable à l'équation 6.
équation 8 :

$$\begin{aligned} &\Big[(\lambda^n\lambda^t, (a,b))(\lambda^t\lambda^j, (c,d))\Big](\lambda^j\lambda^i, (e,f)) \\ &\qquad = (\lambda^n\lambda^j, (a,d))(\lambda^j\lambda^i, (e,f)) = (\lambda^n\lambda^i, (a,f)) \\ &\qquad = (\lambda^n\lambda^t, (a,b))(\lambda^t\lambda^i, (c,f)) \\ &\qquad = (\lambda^n\lambda^t, (a,b))\Big[(\lambda^t\lambda^j, (c,d))(\lambda^j\lambda^i, (e,f))\Big]. \end{aligned}$$

On a vérifié toutes les égalités de l'associativité alors, A est une semi-catégorie associée à notre matrice M.

Pour une matrice qui satisfait aux inégalités du théorème, obtenue de la matrice M traitée ci-dessus en rajoutant 1 sur la diagonale sauf pour les $M(\lambda^0, \lambda^0)$, et avec une augmentation éventuelle de certains autres coefficients dans les blocs diagonaux, on peut rajouter les identités et doublures nécessaires pour obtenir une catégorie associée. Ceci termine la démonstration du théorème 6.3. □

Corollaire 6.4. *Soit* $M = (m_{ij})_{i,j} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{N})$ *une matrice positive, alors :* $\mathcal{C}at(M) \neq \emptyset$ *si et seulement si pour toute* N *sous-matrice régulière d'ordre* ≤ 4*,* $\mathcal{C}at(N) \neq \emptyset$*.*

Démonstration. Pour l'aller voir 2.1 (3).

Pour le retour, on pose que $\mathcal{C}at(N) \neq \emptyset$, pour toute N sous-matrice régulière d'ordre ≤ 4. On peut voir que M est acceptable à cause de cette hypothèse. Voir le lemme 5.2 pour le cas $M > 0$, et aussi pour l'argument permettant de supposer que M soit réduite.

S'il existe au moins un coefficient nul, alors et d'après la partition de la matrice M il existe au moins deux classes. Supposons par exemple $\lambda, \mu \in \mathcal{U}$, et soient $i \neq j$. On prend N la sous-matrice régulière d'ordre 4 :

$$N = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & M(\lambda^0, \lambda^i) & M(\lambda^0, \mu^0) & M(\lambda^0, \mu^j) \\ M(\lambda^i, \lambda^0) & M(\lambda^i, \lambda^i) & M(\lambda^i, \mu^0) & M(\lambda^i, \mu^j) \\ \hline 0 & 0 & 1 & M(\mu^0, \mu^j) \\ 0 & 0 & M(\mu^j, \mu^0) & M(\mu^j, \mu^j) \end{array}\right).$$

Comme N est d'ordre 4, alors $\mathcal{C}at(N) \neq \emptyset$.
Le théorème 6.3 appliqué à N donne les propriétés suivants :

1. $M(\lambda^i, \mu^j) \geq M(\lambda^i, \mu^0) \geq M(\lambda^0, \mu^0)$
2. $M(\lambda^i, \mu^j) \geq M(\lambda^0, \mu^j) \geq M(\lambda^0, \mu^0)$
3. $M(\lambda^i, \mu^j) \geq M(\lambda^0, \mu^j) + M(\lambda^i, \mu^0) - M(\lambda^0, \mu^0)$.

Si l'une seule des classes est dans $\mathcal{U}$ on obtient les inégalités correspondantes avec une sous-matrice d'ordre 3, et de même on obtient les inégalités sur les blocs diagonaux comme dans le lemme 5.2. Ceci donne toutes les conditions requises pour appliquer le théorème 6.3 à M et conclure que $\mathcal{C}at(M) \neq \emptyset$. □

Références

[1] http ://ncatlab.org/nlab/show/finite+category.

[2] http ://golem.ph.utexas.edu /category/2011/03/which_graphs_can_be_given_a_ca.html

[3] S. Allouch. Classification des catégories finies. http ://math.unice.fr/~carlos/documents/allouchJun07.pdf, Mémoire de M2, Nice, 15 juin (2007).

[4] S. Allouch. Sur l'existence d'une catégorie ayant une matrice strictement positive donnée. Preprint arXiv :0806.0060v1 (2008).

[5] C. Berger, T. Leinster. The Euler characteristic of a category as the sum of a divergent series. Homology, Homotopy Appl. 10 (2008), 41-51.

[6] T. Fiore, W. Lück, R. Sauer. Finiteness obstructions and Euler characteristics of categories. Adv. Math. 226 (2011), 2371-2469.

[7] T. Fiore, W. Lück, R. Sauer. Euler characteristics of categories and homotopy colimits. Doc. Math. 16 (2011), 301-354.

[8] M. Kapranov. On the derived categories of coherent sheaves on some homogeneous spaces. Invent. Math. 92 (1988), 479-508.

[9] T. Leinster. The Euler characteristic of a category. Doc. Math., 13 (2008), 21-49, arXiv :math/0610260.

Samer Allouch
Department of Maths/Physics/Computer Science
Lebanese University, Faculty of Science
Tripoli, Lebanon
alloushadam@hotmail.com

Carlos Simpson
C.N.R.S., Laboratoire J. A. Dieudonné
Université Nice Sophia Antipolis
06108 Nice Cedex 2, France
carlos@unice.fr