CAHIERS DE TOPOLOGIE ET GEOMETRIE DIFFERENTIELLE CATEGORIQUES

VOLUME LXII-1 (2021)

PURETÉ DE LA MONADE DE BATANIN, II

Jacques PENON

Résumé des deux parties. Nous montrons que la monade de Batanin $\mathbb{B}$ a une propriété très forte appelée "pureté". Dans une prochaine publication nous verrons que cette propriété nous permet de donner un ensemble d'exemples de ses algèbres (appelées ω-catégories faibles par M.Batanin). Avant de le montrer nous caractérisons $\mathbb{B}$ avec un matériel syntaxique.
La première partie est parue en *CTGDC*, LXI-1 (2020), 57-110.
Abstract of the two parts. We prove that the Batanin's monad $\mathbb{B}$ has a very strong property called "purity". In a next publication we'll see that this property enables us to give a set of examples for its algebras (called weak ω-categories by M.Batanin). Before proving it, we characterize $\mathbb{B}$ with a syntactic equipment.
The first part appeared in *CTGDC*, LXI-1 (2020), 57-110.
Keywords. Weak ω-category. Globular set. Cartesian monad. Operad. Tree. Syntax.
Mathematics Subject Classification (2010). 18D05.

.

PARTIE II
(CARACTÉRISATION DE LA MONADE DE BATANIN)

Table des matières

Introduction de la partie II

Avant de caractériser la monade de Batanin, on commence par re-présenter la monade ω des ∞-catégories strictes, puis la monade $\mathbb{P}$ des prolixes en utilisant l'outillage syntaxique de la première partie. Mais c'est surtout grâce aux arbres feuillus qu'on va pouvoir construire une monade $\mathbb{B}$ à partir de $\mathbb{P}$ qui remplira toutes les conditions requises (c'est-à-dire, finalement, d'être pure) et qui s'avérera être la monade de Batanin.

1. Monade associée à un langage relativement dimensionnel

Introduction : Toutes les monades construites dans la première partie étaient sur la catégorie $\mathbb{E}ns$. Nous allons en construire maintenant de nouvelles sur $\mathbb{E}ns/\mathbb{N}$ en toute généralité, ce qui nous permettra dans les prochaines sections de passer à des monades sur $\mathbb{G}lob$ (la catégorie des "ensembles globulaires"). Certaines notations données dans cette section, comme $\mathrm{Op}(a,(b_o,...,b_{n-1}))$ et $a\{c_o,...,c_{n-1}\}$ sont indispensables pour la compréhension de la suite de cet article.

1.1 Variation des constantes dans le cas relativement dimensionnel

Conventions 1.1. : On se donne un langage relativement dimensionnel (S,ar,δ) (voir la définition dans la première partie, section 2) sans constante. Pour chaque $(C,dim)\in|\mathbb{E}ns/\mathbb{N}|$, on pose $S(C)=S\coprod C$ puis on suit les conventions données dans la première partie, section 3, où l'on définit $ar:S(C)\to\mathbb{N}$, $A(C)$ et pour toute application $f:C\to C'$, une nouvelle application $A(f):A(C)\to A(C')$. On tient compte encore de la remarque qui fait suite à ces conventions.
On définit ensuite $\delta=(\delta(s):\mathbb{N}^{ar(s)}\to\mathbb{N})_{s\in S(C)}$ en posant $\delta(u_0(s))=\delta(s)$ et $\delta(u_1(c)):\mathbb{N}^0\simeq 1\to\mathbb{N},\ 0\mapsto dim(c)$. On obtient ainsi un nouveau langage relativement dimensionnel $(S(C),ar,\delta)$. On construit alors, comme on le fait à la section 2 de la partie 1, deux applications $\dim:A(C)\to\mathbb{N}$ et $\overline{\dim}:A(C)\to\mathbb{M}o(\mathbb{N})$.
On note $U:\mathbb{E}ns/\mathbb{N}\to\mathbb{E}ns$ le foncteur d'oubli canonique.

Proposition 1.2. : Soit $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}'$ une flèche de $\mathbb{E}ns/\mathbb{N}$. Alors :
$\forall a\in AU(\mathbb{C}),\ \dim\tilde{f}(a)=\dim(a)$ et $\overline{\dim}\tilde{f}(a)=\overline{\dim}(a)$.

Preuve : Par induction sur $\mathrm{L}(a)$.

Notations 1.3. : 1) Chaque flèche $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}'$ de $\mathbb{E}ns/\mathbb{N}$ induit une nouvelle flèche $\tilde{f}:(AU(\mathbb{C}),\dim)\to(AU(\mathbb{C}'),\dim)$. On construit ainsi un endo-foncteur de $\mathbb{E}ns/\mathbb{N}$, noté $\mathcal{A}$.
2) Choisissons un objet final $\mathbb{I}\in|\mathbb{E}ns/\mathbb{N}|$. On notera $U(\mathbb{I})=\{0_n/n\in\mathbb{N}\}$. Alors $dim:U(\mathbb{I})\to\mathbb{N}$ est bijective et $dim^{-1}(n)=0_n$.
3) Pour chaque $a\in AU(\mathbb{C})$, notons $|a|=\tilde{!}_{\mathbb{C}}(a)\in AU(\mathbb{I})$.

Proposition 1.4. : Soit $\mathbb{C} \in |\mathbb{E}ns/\mathbb{N}|$.
1) Soit aussi $a \in AU(\mathbb{C})$, alors $\dim(|a|) = \dim(a)$ et $\overline{\dim}(|a|) = \overline{\dim}(a)$.
2) Soient maintenant $a, a' \in AU(\mathbb{C})$. Si $|a| = |a'|$ et $l_{U\mathbb{C}}(a) = l_{U\mathbb{C}}(a')$, alors $a = a'$.

Preuve : Le (1) résulte de la proposition précédente et le (2) résulte de la première partie, section 3.

1.2 L'opération Op

Notation 1.5. : Soient $\mathbb{C} \in |\mathbb{E}ns/\mathbb{N}|$, $a \in AU(\mathbb{I})$, $n = l(a)$ et $(b_o, ..., b_{n-1})$ dans $AU(\mathbb{C})^n$. On suppose que $\overline{\dim}(a) = (\dim b_o, ..., \dim b_{n-1})$. Dans ce cas on note :

$$\mathrm{Op}(a, (b_o, ..., b_{n-1})) = \mathrm{op}(\underline{a}, (b_o, ..., b_{n-1})) \in AU(\mathbb{C}).$$

Proposition 1.6. : Posons $\hat{C} = C \coprod U(\mathbb{I})$ et $u_0 : C \to \hat{C}$, $u_1 : U(\mathbb{I}) \to \hat{C}$ les injections canoniques. Alors :

$$\tilde{u}_0 \mathrm{Op}(a, (b_o, ..., b_{n-1})) = \mathrm{OP}(\tilde{u}_1(a), (\tilde{u}_0 b_o, ..., \tilde{u}_0 b_{n-1})).$$

Preuve : Posons $\alpha = \tilde{u}_0 \mathrm{Op}(a, (b_o, ..., b_{n-1}))$ et $\beta = \mathrm{OP}(\tilde{u}_1(a), (\tilde{u}_0 b_o, ..., \tilde{u}_0 b_{n-1}))$. On montre que $\underline{\alpha} = \mathrm{OP}(\underline{a}, (\underline{b_o}, ..., \underline{b_{n-1}})) = \underline{\beta}$ et que $l_{\hat{C}}(\alpha) = l_{\hat{C}}(\beta)$. On en déduit que $\alpha = \beta$.

Proposition 1.7. : Soient $\mathbb{C} \in |\mathbb{E}ns/\mathbb{N}|$, $a \in AU(\mathbb{I})$, $n = l(a)$ et $(b_o, ..., b_{n-1})$ dans $AU(\mathbb{C})^n$ tels que $\overline{\dim}(a) = (\dim b_o, ..., \dim b_{n-1})$.
1) On a $\dim \mathrm{Op}(a, (b_o, ..., b_{n-1})) = \dim(a)$ et
$\overline{\dim}\, \mathrm{Op}(a, (b_o, ..., b_{n-1})) = \overline{\dim}(b_0)...\overline{\dim}(b_{n-1})$.
2) Pour toute flèche $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}'$ de $\mathbb{E}ns/\mathbb{N}$, on a :
$\tilde{f}\mathrm{Op}(a, (b_o, ..., b_{n-1})) = \mathrm{Op}(a, (\tilde{f} b_o, ..., \tilde{f} b_{n-1}))$.
3)a) $|\mathrm{Op}(a, (b_o, ..., b_{n-1}))| = \mathrm{Op}(a, (|b_o|, ..., |b_{n-1}|))$.
b) $l_{U\mathbb{C}}\mathrm{Op}(a, (b_o, ..., b_{n-1})) = l_{U\mathbb{C}}(b_0)...l_{U\mathbb{C}}(b_{n-1})$.
4)a) $l\, \mathrm{Op}(a, (b_o, ..., b_{n-1})) = \sum_{j \in [n]} l(b_j)$.
b) $\mathrm{L}\, \mathrm{Op}(a, (b_o, ..., b_{n-1})) = \mathrm{L}(a) - l(a) + \sum_{j \in [n]} \mathrm{L}(b_j)$.
5) Si $b \in AU(\mathbb{C})$ alors $\mathrm{Op}(|b|, (b_o, ..., b_{n-1})) = \mathrm{OP}(b, (b_o, ..., b_{n-1}))$.

Preuve : Le (1) résulte de la proposition précédente modulo la section 2 de la première partie.
Les (2), (3), (4) et (5) résultent de la section 3 de la première partie.

Proposition 1.8. : Soient $s \in S$ tel que $ar(s) = n \geq 1$, $(a_o, ..., a_{n-1})$ dans $AU(\mathbb{C})^n$ et $(c_o, ..., c_{n-1}) \in U(\mathbb{I})^n$ tels que $\forall j \in [n]$, $\dim(a_j) = \dim(c_j)$. On pose $\hat{s} = s(c_o(\varnothing), ..., c_{n-1}(\varnothing)) \in AU(\mathbb{I})$, alors :
1) $\overline{\dim}(\hat{s}) = (\mathrm{dim} a_o, ..., \mathrm{dim} a_{n-1})$,
2) $\mathrm{Op}(\hat{s}, (a_o, ..., a_{n-1})) = s(a_o, ..., a_{n-1})$.

Preuve : Le (1) est immédiat. Le (2) résulte de la section 3 de la première partie.

Proposition 1.9. : Soit $\mathbb{C} \in |\mathbb{E}ns/\mathbb{N}|$.
1) Soit aussi $a \in AU(\mathbb{C})$ et $n = \dim(a)$ alors $\mathrm{Op}(0_n(\varnothing), (a)) = a$,
2) Soient $\alpha \in AU(\mathbb{I})$, $(\alpha_o, ..., \alpha_{p-1})$ dans $AU(\mathbb{I})^p$, $(\bar{a}_o, ..., \bar{a}_{p-1})$ dans $Mo(AU(\mathbb{C}))^p$ tels que $\overline{\dim}(\alpha) = (\dim \alpha_o, ..., \dim \alpha_{p-1})$ et $\forall j \in [p]$, $\overline{\dim}(\alpha_j) = Mo(\dim)(\bar{a}_j)$. Alors :

$$\mathrm{Op}(\alpha, (\mathrm{Op}(\alpha_0, \bar{a}_0), ..., \mathrm{Op}(\alpha_{n-1}, \bar{a}_{n-1})) = \mathrm{Op}(\mathrm{Op}(\alpha, (\alpha_o, ..., \alpha_{n-1})), \bar{a}_0 ... \bar{a}_{n-1}).$$

Preuve : Résulte de la section 3 de la première partie.

Proposition 1.10. : Soient $s \in S$ tel que $n = ar(s) \geq 1$, $(\alpha_o, ..., \alpha_{n-1})$ dans $AU(\mathbb{I})^n$ et $(\bar{a}_o, ..., \bar{a}_{n-1}) \in Mo(AU(\mathbb{C}))^n$. On suppose que $\forall j \in [n]$, $\overline{\dim}(\alpha_j) = Mo(\dim)(\bar{a}_j)$. Alors :

$$s(\mathrm{Op}(\alpha_0, \bar{a}_0), ..., \mathrm{Op}(\alpha_{n-1}, \bar{a}_{n-1})) = \mathrm{Op}(s(\alpha_o, ..., \alpha_{n-1}), \bar{a}_0 ... \bar{a}_{n-1}).$$

Preuve : Résulte de la section 3 de la première partie.

Proposition 1.11. : Soient $\alpha \in AU(\mathbb{I})$, $n = l(\alpha)$ et $\bar{a}, \bar{a}' \in AU(\mathbb{C})^n$ tels que $\overline{\dim}(\alpha) = Mo(dim)(\bar{a}) = Mo(dim)(\bar{a'})$. Alors on a l'implication :

$$\mathrm{Op}(\alpha, \bar{a}) = \mathrm{Op}(\alpha, \bar{a}') \Longrightarrow \bar{a} = \bar{a}'.$$

Preuve : Résulte de la section 3 de la première partie.

1.3 La notation $a\{c_o, ..., c_{n-1}\}$

Notation 1.12. : Soient $a \in AU(\mathbb{I})$ et $n = l(a)$. Soient aussi $\mathbb{C}$ dans $|\mathbb{E}ns/\mathbb{N}|$ et $(c_o, ..., c_{n-1}) \in U(\mathbb{C})^n$. On suppose que $\overline{\dim}(a) = (\mathrm{dim} c_o, ..., \mathrm{dim} c_{n-1})$. Alors on note :

$$a\{c_o, ..., c_{n-1}\} = \underline{a}[c_o, ..., c_{n-1}].$$

Remarque 1.13. : En fait on a $a\{c_o,...,c_{n-1}\} = \mathrm{Op}(a,(c_o(\varnothing),...,c_{n-1}(\varnothing)))$

Proposition 1.14. : Soient $a \in AU(\mathbb{I})$, $n = l(a)$, $(c_o,...,c_{n-1}) \in U(\mathbb{C})^n$ tel que $\overline{\dim}(a) = (\dim c_o,...,\dim c_{n-1})$. Alors :
1) $\underline{\dim}\ a\{c_o,...,c_{n-1}\} = \underline{\dim}(a)$,
2) $\overline{\dim}\ a\{c_o,...,c_{n-1}\} = \overline{\dim}(a)$,
3) $|a\{c_o,...,c_{n-1}\}| = a$,
4) $l_{U\mathbb{C}}\ a\{c_o,...,c_{n-1}\} = (c_o,...,c_{n-1})$,
5) pour toute flèche $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}'$ de $\mathbb{E}ns/\mathbb{N}$, on a $\tilde{f}(a\{c_o,...,c_{n-1}\}) = a\{f(c_o),...,f(c_{n-1})\}$.

Preuve : Pour le (1) et (2), on utilise la remarque précédente. Pour le (3), si on pose $\forall j \in [n],\ c'_j = !_{\mathbb{C}}(c_j)$, on voit que $|a\{c_o,...,c_{n-1}\}| = \underline{a}[c'_o,...,c'_{n-1}] = \underline{a}[l_{U\mathbb{I}}(a)] = a$. Le (4) et le (5) résultent de la section 3 de la première partie.

Proposition 1.15. : $\forall a \in AU(\mathbb{C}),\ |a|\{l_{U\mathbb{C}}(a)\} = a$.

Preuve : Résulte de la section 3 de la première partie.

Proposition 1.16. : Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $(\alpha_o,...,\alpha_{n-1}) \in AU(\mathbb{I})^n$ et $(\bar{c}_o,...,\bar{c}_{n-1})$ dans $Mo(U(\mathbb{C}))^n$ tels que $\forall j \in [n],\ \overline{\dim}(\alpha_j) = Mo(\dim)(\bar{c}_j)$ Alors :
1) Pour tout $s \in S$ tel que $ar(s) = n$, on a :

$$s(\alpha_0\{\bar{c}_0\},..,\alpha_{n-1}\{\bar{c}_{n-1}\}) = s(\alpha_0,..,\alpha_{n-1})\{\bar{c}_0...\bar{c}_{n-1}\}.$$

2) Pour tout $\alpha \in AU(\mathbb{I})$, $l(\alpha) = n$ et $\overline{\dim}(\alpha) = (\dim\alpha_o,...,\dim\alpha_{n-1})$, on a :

$$\mathrm{Op}(\alpha,(\alpha_0\{\bar{c}_0\},...,\alpha_{n-1}\{\bar{c}_{n-1}\})) = \mathrm{Op}(\alpha,(\alpha_o,...,\alpha_{n-1}))\{\bar{c}_0...\bar{c}_{n-1}\}.$$

Preuve : Le (1) résulte de la proposition 1.10 et le (2) de la proposition 1.9.

1.4 La monade $\mathcal{A}$

Proposition 1.17. : Soit $\mathbb{C} \in |\mathbb{E}ns/\mathbb{N}|$.
1) $\forall A \in A^2U(\mathbb{C}),\ \mu_{U\mathbb{C}}(A) = \mathrm{Op}(|A|, l_{AU(\mathbb{C})}(A))$.
2) a) $\forall c \in U(\mathbb{C}),\ \dim\eta_{U\mathbb{C}}(c) = \dim(c)$.
b) $\forall A \in A^2U(\mathbb{C}),\ \dim\mu_{U\mathbb{C}}(A) = \dim(A)$.

Preuve : Sans difficulté.

Notations 1.18. : On peut donc noter $\eta_{\mathbb{C}} : \mathbb{C} \to \mathcal{A}(\mathbb{C})$ et $\mu_{\mathbb{C}} : \mathcal{A}^2(\mathbb{C}) \to \mathcal{A}(\mathbb{C})$ les flèches de $\mathbb{E}ns/\mathbb{N}$ telles que $U\eta_{\mathbb{C}} = \eta_{U\mathbb{C}}$ et $U\mu_{\mathbb{C}} = \mu_{U\mathbb{C}}$. $\eta_{\mathbb{C}}$ et $\mu_{\mathbb{C}}$ sont clairement naturels en $\mathbb{C}$. On note $\eta : Id_{\mathbb{E}ns/\mathbb{N}} \to \mathcal{A}$ et $\mu : \mathcal{A}^2 \to \mathcal{A}$ les transformations naturelles obtenues.

Proposition 1.19. : 1) $\mathcal{A} = (\mathcal{A}, \eta, \mu)$ est une monade cartésienne sur $\mathbb{E}ns/\mathbb{N}$ et $(U, Id_{\mathcal{A}}) : (\mathbb{E}ns/\mathbb{N}, \mathcal{A}) \to (\mathbb{E}ns, \mathbb{A})$ est un morphisme de catégories munies de monades.
2) $(\mathbb{E}ns/\mathbb{N}, U, \mathcal{A}, \eta, \mu, \mathrm{L})$ est une monade concrète syntaxique (où pour tout $\mathbb{C} \in |\mathbb{E}ns/\mathbb{N}|$, $\mathrm{L}_{\mathbb{C}} = \mathrm{L}_{U\mathbb{C}}$).

Preuve : Le (1) résulte de la section 3 de la première partie. Le (2) résulte de la section 1 de la première partie.

Proposition 1.20. : Soient $\mathbb{C} \in |\mathbb{E}ns/\mathbb{N}|$, $\alpha \in AU(\mathbb{I})$, $n = l(\alpha)$.
1) Soit aussi $(B_o, ..., B_{n-1}) \in A^2U(\mathbb{C})^n$ tels que $\overline{\dim}(\alpha) = (\dim B_o, ..., \dim B_{n-1})$. Alors :

$$\mu_{U\mathbb{C}}(\mathrm{Op}(\alpha, (B_o, ..., B_{n-1}))) = \mathrm{Op}(\alpha, (\mu_{U\mathbb{C}}B_o, ..., \mu_{U\mathbb{C}}B_{n-1})).$$

2) Soit maintenant $(b_o, ..., b_{n-1}) \in AU(\mathbb{C})^n$ tel que $\overline{\dim}(\alpha) = (\dim b_o, ..., \dim b_{n-1})$ Alors :

$$\mu_{U\mathbb{C}}(\alpha\{b_o, ..., b_{n-1}\}) = \mathrm{Op}(\alpha, (b_o, ..., b_{n-1})).$$

Preuve : Le (1) résulte de la proposition 1.9 et le (2) de la section 3 de la première partie.

1.5 Arbres feuillus dans le cadre relativement dimensionnel

Les conventions suivantes sont un cas particulier des conventions 1.1 et de celles de la section 5 de la première partie.

Conventions 1.21. : On se donne tout d'abord un langage (S, ar) sans constante, muni d'une structure relativement dimensionnelle $\delta = (\delta(s) : \mathbb{N}^{ar(s)} \to \mathbb{N})_{s\in S}$. A ce langage on rajoute deux nouveaux symboles Δ et $\square$ où $ar(\Delta) = 1$ et $ar(\square) = 2$. Posons $S' = S \cup \{\Delta, \square\}$.

On prolonge ensuite à (S', ar) la structure relativement dimensionnelle de (S, ar) en posant :

$$\delta(\Delta) = Id : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \quad \text{et} \quad \delta(\square) : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}, (x, y) \mapsto 1 + Sup(x, y).$$

Comme dans la section 5 de la première partie, on le munit ensuite d'une structure chargée en considérant l'application $ch : S' \to \mathbb{Z}$ définie par :

$$ch(\Delta) = -1, \ ch(\square) = +1 \quad \text{et} \quad \forall s \in S, \ ch(s) = 0.$$

Ensuite, pour chaque $(C, dim) \in |\mathbb{E}ns/\mathbb{N}|$, on construit le nouveau langage relativement dimentionnel $(S'(C), ar, \delta)$ comme aux conventions 1.1. On le munit à son tour d'une structure chargée, comme on l'avait fait à la section 5 de la première partie, en posant :

$$\forall \sigma \in S', \ ch.u_0(\sigma) = ch(\sigma), \ \forall c \in C, \ ch.u_1(c) = 0.$$

Après les mêmes abus de langage qu'aux conventions 1.1, on note pour simplifier $A(C) = \mathbb{A}rb(S'(C), ar)$ puis $A^f(C)$ l'ensemble des $a \in A(C)$ qui sont feuillus pour $(S'(C), ar, ch)$.

Notation 1.22. : L'application $(C, dim) \mapsto (A^f(C), dim)$ se prolonge en un sous-foncteur de $\mathcal{A}$. On le note $\mathcal{A}^f$.

Proposition 1.23. : Soit $\mathbb{C} \in |\mathbb{E}ns/\mathbb{N}|$.
1) $\forall c \in U\mathbb{C}, \ c(\varnothing) \in A^f U(\mathbb{C})$.
2) $\forall s \in S, \ (n = ar(s) \geq 1), \ \forall (a_o, ..., a_{n-1}) \in A^f U(\mathbb{C})^n$,
$s(a_o, ..., a_{n-1}) \in A^f U(\mathbb{C})$.
3) $\forall \alpha \in A^f U(\mathbb{I}), \ \forall (b_o, ..., b_{n-1}) \in A^f U(\mathbb{C})^n, \ n = l(\alpha)$ et
$\overline{\dim}(\alpha) = (\dim b_o, ..., \dim b_{n-1}) \ \Rightarrow \ \mathrm{Op}(\alpha, (b_o, ..., b_{n-1})) \in A^f U(\mathbb{C})$.

Preuve : Le (1) est immédiat. Pour le (2), voir la section 2 de la première partie, et pour le (3) voir la section 5 de la première partie.

Proposition 1.24. : Soit $a \in AU(\mathbb{C})$, alors :
1) $a \in A^f U(\mathbb{C})$ ssi $|a| \in A^f U(\mathbb{I})$.
2) Lorsque $a \in A^f U(\mathbb{C})$ on a l'equivalence :
a est irréductible ssi $|a|$ est irréductible.

Preuve : Immédiat.

Proposition 1.25. : Soit $a \in A^f U(\mathbb{C})$ tel que $\mathrm{sym}(a) = \Box$, alors il existe un unique $\alpha \in A^f U(\mathbb{I})$ irréductible vérifiant $\mathrm{L}(\alpha) > 1$ et un unique $\underline{(a_o, ..., a_{n-1})}$ dans $A^f U(\mathbb{C})^n$, tels que $n = l(\alpha)$, $\overline{\dim}(\alpha) = (\dim a_o, ..., \dim a_{n-1})$ et $a = \mathrm{Op}(\alpha, (a_0, ..., a_{n-1}))$.

Preuve : Ecrivons la décomposition canonique $a = \mathrm{op}(\beta, (a_0, ..., a_{n-1}))$ (voir la définition dans la section 5 de la première partie). Pour chaque $j \in [n]$, soit $c_j \in U(\mathbb{I})$ tel que $\dim(c_j) = \dim(a_j)$. On pose ensuite $\alpha = \beta[c_0, ..., c_{n-1}]$. La fin de la preuve est sans difficulté.

Définition 1.26. : La décomposition $a = \mathrm{Op}(\alpha, (a_0, ..., a_{n-1}))$ est appelée la *décomposition canonique (relativement dimensionnelle)* de a.

1.6 L'opération $\odot$

Notations 1.27. : Soient $a, b \in A^f U(\mathbb{I})$ tels que $l(a) = p$, $l(b) = q$ et $n = p + q$ Ecrivons $l_{U\mathbb{I}}(a) = (c_o, ..., c_{p-1})$, $l_{U\mathbb{I}}(b) = (c'_o, ..., c'_{q-1})$. On sait que $\underline{a}$, $\underline{b}$ et $\underline{a} \boxdot \underline{b}$ sont dans $A^f(1)$ et que $l(\underline{a} \boxdot \underline{b}) = n$. On pose alors : $a \odot b = (\underline{a} \boxdot \underline{b})[c_0, ..., c_{p-1}, c'_0, ..., c'_{q-1}]$.

Proposition 1.28. : 1) $l(a \odot b) = l(a) + l(b) = l(a \Box b)$.
2) $\mathrm{L}(a \odot b) = \mathrm{L}(a \Box b) + l(a \Box b)$.
3) $l_{U\mathbb{I}}(a \odot b) = l_{U\mathbb{I}}(a).l_{U\mathbb{I}}(b)$.
4) $\underline{\dim}(a \odot b) = \underline{1} + \underline{\sup}(\underline{\dim} a, \underline{\dim} b)$.
5) $\overline{\dim}(a \odot b) = \overline{\dim}(a).\overline{\dim}(b)$.
6) $a \odot b \in A^f U(\mathbb{I})$.
7) $a \odot b$ est irréductible.

Preuve : Sans difficulté.

Proposition 1.29. : Soit $a \in A^f U(\mathbb{I})$ tel que $\mathrm{sym}(a) = \Box$ et a est irréductible. Alors il existe un unique couple $(a_1, a_0) \in A^f U(\mathbb{I})^2$ tel que $a = a_1 \odot a_0$.

Preuve : *Existence* : On a vu dans la section 5 de la première partie qu'il existe un unique (b_1, b_0) dans $A^f(1)^2$ tel que $a = b_1 \boxdot b_0$. Posons $p = l(b_1)$, $q = l(b_0)$ alors $p + q = l(a)$. Ecrivons $l_{U\mathbb{I}}(a) = (c_o, ..., c_{p+q-1})$

et posons $a_1 = b_1[c_o, ..., c_{p-1}]$, $a_0 = b_0[c_p, ..., c_{p+q-1}]$. On montre que $a_1, a_0 \in A^f U(\mathbb{I})$ et que $a = a_1 \odot a_0$.
Unicitée : Résulte encore des sections 3 et 5 de la première partie.

1.7 La monade $\mathcal{A}^f$

Proposition 1.30. : Soit $\mathbb{C} \in |\mathbb{E}ns/\mathbb{N}|$.
1) $\forall c \in U(\mathbb{C}),\ \eta_{U\mathbb{C}}(c) \in A^f U(\mathbb{C})$.
2) $\forall A \in A^{f2}U(\mathbb{C}),\ \mu_{U\mathbb{C}}\tilde{\imath}_{U\mathbb{C}}(A) \in A^f U(\mathbb{C})$ (où $\imath : A^f \to A$ est la transformation naturelle canonique).

Preuve : Le (1) est immédiat. Pour le (2), on a $\mu_{U\mathbb{C}}\tilde{\imath}_{U\mathbb{C}}(A) = \mathrm{Op}(|A|, l_{A^f U(\mathbb{C})}(A))$ où $|A| \in A^f U(\mathbb{I})$ et $l_{A^f U(\mathbb{C})}(A) \in MoA^f U(\mathbb{C}) \subset MoAU(\mathbb{C})$. Donc $\mu_{U\mathbb{C}}\tilde{\imath}_{U\mathbb{C}}(A) \in A^f U(\mathbb{C})$.

Notations 1.31. : On peut alors définir les flèches $\eta'_{\mathbb{C}} : \mathbb{C} \to \mathcal{A}^f(\mathbb{C})$ et $\mu'_{\mathbb{C}} : \mathcal{A}^{f2}(\mathbb{C}) \to \mathcal{A}^f(\mathbb{C})$ dans $\mathbb{E}ns/\mathbb{N}$, par restriction de $\eta_{\mathbb{C}} : \mathbb{C} \to \mathcal{A}(\mathbb{C})$ et $\mu_{\mathbb{C}} : \mathcal{A}^2(\mathbb{C}) \to \mathcal{A}(\mathbb{C})$. On vérifie que $\eta'_{\mathbb{C}}$ et $\mu'_{\mathbb{C}}$ sont naturels en $\mathbb{C}$.

Proposition 1.32. : $\mathcal{A}^f = (\mathcal{A}^f, \eta', \mu')$ est une monade sur $\mathbb{E}ns/\mathbb{N}$ qui est cartésienne.

Preuve : Le fait que $\mathcal{A}^f$ est une monade résulte de la section 3 de la première partie. Sa cartésianité vient de ce que l'inclusion $\mathcal{A}^f \to \mathcal{A}$ est un morphisme de monade qui est cartésien et $\mathcal{A}$ est cartésienne.

Proposition 1.33. : $(\mathbb{E}ns/\mathbb{N}, U, \mathcal{A}^f, \eta', \mu', \mathrm{L}')$ est une monade concrète syntaxique (où pour tout $\mathbb{C} \in |\mathbb{E}ns/\mathbb{N}|$, $\mathrm{L}'_{\mathbb{C}}$ est la restriction ce $\mathrm{L}_{\mathbb{C}}$).

Preuve : Résulte de la section 1 de la première partie.

2. La monade ω

Introduction : La monade des ∞-catégories strictes est bien connue (voir [2],[4],[13] et [14]). Nous en donnons ici une présentation légèrement différente qui est en cohérence avec l'ensemble de ce travail. Bien que n'étant pas syntaxique, elle se construit malgré tout avec des arbres et en utilise de nombreuses propriétés. Le lien entre arbre et ensemble globulaire, qui apparait ici avec l'application Γ (notée $(-)^*$ dans [2]), va continuer à être fort utile dans les sections qui suivent, ainsi que les morphismes u^k.

2.1 L'ensemble globulaire $\mathbb{A}rb$

• Habituellement on appelle ensemble globulaire un foncteur $\underline{Gl}^{op} \to \mathbb{E}ns$ où $\underline{Gl}$ désigne la catégorie qui a pour objets les entiers naturels et où les morphismes ...

$$0 \underset{d_0^1}{\overset{d_0^0}{\rightrightarrows}} 1 \underset{d_1^1}{\overset{d_1^0}{\rightrightarrows}} 2 \underset{d_2^1}{\overset{d_2^0}{\rightrightarrows}} 3 \rightrightarrows . ....$$

... vérifient les équations $\forall k \in [2],\ \forall j \in [n],\ d_{j+1}^0.d_j^k = d_{j+1}^1.d_j^k$.
Nous allons maintenant en donner une définition légèrement différente plus en adéquation avec les outils utilisés ici.

Notations et définitions 2.1. : 1) Un *ensemble globulaire* $\mathbb{G}$ est la donnée :
- d'un ensemble G,
- d'une application $dim : G \to \mathbb{N}$ (Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, notons : $G/n = \{c \in G/\ dim(c) > n\}$),
- d'une famille de couples d'applications $(\partial_p^1, \partial_p^0 : G/p \to G)_{p\in\mathbb{N}}$,

vérifiant les propriétés suivantes :
$(EG1)\ \forall c \in G, \forall p \in \mathbb{N}, \forall k \in [2],\ dim(c) > p \ \Rightarrow\ dim\ \partial_p^k(c) = p$,
$(EG2)\ \forall c \in G, \forall p, q \in \mathbb{N}, \forall k, k' \in [2]$,

$$dim(c) > p > q \ \Rightarrow\ \partial_q^k \partial_p^{k'}(c) = \partial_q^k(c).$$

2) Un *morphisme* $g : \mathbb{G} \to \mathbb{G}'$ entre ensembles globulaires est une application $g : G \to G'$ telle que :
$(MEG1)\ \forall c \in G,\ dim\ g(c) = dim(c)$,
$(MEG2)\ \forall c \in G, \forall p \in \mathbb{N}, \forall k \in [2],\ dim(c) > p \ \Rightarrow\ \partial_p^k g(c) = g\partial_p^k(c)$.
3) Les ensembles globulaires et leurs morphismes forment une catégorie notée $\mathbb{G}lob$.

Proposition 2.2. : On a une équivalence de catégorie :

$$[\underline{Gl}^{op}, \mathbb{E}ns] \simeq \mathbb{G}lob.$$

<u>*Preuve*</u> : Elle est donnée par $G \mapsto (\coprod_{n\in\mathbb{N}} G(n), dim, (\partial_n^k)_{k\in[2],n\in\mathbb{N}})$ où $dim(m,x) = m$ et pour $m > n,\ \partial_n^k(m,x) = (n, G(d_{nm}^k)(x))$, la flèche $d_{nm}^k : n \to m$ étant la composée $n \xrightarrow{d_n^k} n+1 \xrightarrow{d_{n+1}^k} ... \xrightarrow{d_{m-1}^k} m$.

• Considérons maintenant le langage (S, ar), où $S = \mathbb{N}$ et $ar = Id_{\mathbb{N}}$

Notations 2.3. : - On note $\mathbb{A}rb = \mathbb{A}rb(S, ar)$.
- Pour chaque $a \in \mathbb{A}rb$, on pose $\dim(a) = \mathrm{h}(a) - 1$.

Définition 2.4. : Pour chaque $p \in \mathbb{N}$, on définit $\partial_p : \mathbb{A}rb \to \mathbb{A}rb$, par induction sur p.
- Si $p = 0$ alors, pour tout $a \in \mathbb{A}rb$, on pose $\partial_0(a) = 0(\varnothing)$.
- Si $p > 0$ alors, pour tout $a \in \mathbb{A}rb$,
.. Si $a = 0(\varnothing)$, on pose $\partial_p(a) = 0(\varnothing)$.
.. Si $a = n(a_0, ..., a_{n-1})$, où $n \geq 1$, on pose
$\partial_p(a) = n(\partial_{p-1}a_0, ..., \partial_{p-1}a_{n-1})$.

Proposition 2.5. : Soit $p \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{A}rb$.
1) - Si $p \geq \dim(a)$, alors $\partial_p(a) = a$.
- Si $\dim(a) \geq p$, alors $\dim\partial_p(a) = p$.
2) $\dim\partial_p(a) = \inf(p, \dim(a))$.
3) Pour tout $q \in \mathbb{N}$, si $q < p$, alors $\partial_q\partial_p(a) = \partial_q(a)$.

Preuve : Le (1) se montre par induction sur p. La première partie se fait sans difficulté. Pour la deuxième partie, lorsque $p > 0$ et $a = n(a_0, ..., a_{n-1})$, où $n \geq 1$, on commence par montrer, grâce à l'hypothèse d'induction, que $\forall i \in [n],\ dim\ \partial_{p-1}(a_i) \leq p - 1$. Le (2) résulte du (1). Le (3) se montre par induction sur q.

Corollaire 2.6. : $(\mathbb{A}rb, \dim, (\partial_p^1, \partial_p^0)_{p\in\mathbb{N}})$ est un ensemble globulaire, où pour tout $p \in \mathbb{N}$ et $k \in [2]$, $\partial_p^k : \mathbb{A}rb/p \to \mathbb{A}rb$ est la restriction de ∂_p.

Proposition 2.7. : Soient $a \in \mathbb{A}rb$ et $p \in \mathbb{N}$.
1) On suppose que $\partial_p(a) = n(a'_0, ..., a'_{n-1})$, où $n \geq 1$. Alors $p > 0$ et il existe un unique $(a_0, ..., a_{n-1}) \in \mathbb{A}rb^n$ tel que $a = n(a_0, ..., a_{n-1})$ et $\forall j \in [n]$,
$a'_j = \partial_{p-1}(a_j)$.
2) Si $p > 0$ et $\partial_p(a) = 0(\varnothing)$, alors $a = 0(\varnothing)$.

Preuve : Dans le (1), on distingue les cas $p \geq \dim(a)$ et $p < \dim(a)$. Le (2) est sans difficulté.

2.2 Les lois $\circ_p$ sur $\mathbb{A}rb$

Définition 2.8. : Soient $p \in \mathbb{N}$ et $(a^1, a^0) \in \mathbb{A}rb^2$. On suppose que $\partial_p(a^1) = \partial_p(a^0)$. On construit $a^1 \circ_p a^0$ par induction sur p (ou sur $\mathrm{L}(a^1) + \mathrm{L}(a^0)$).
- Si $\inf(\dim a^1, \dim a^0) = 0$: Soit $k \in [2]$ tel que $\dim(a^k) = 0$. Alors on pose :

$$a^1 \circ_p a^0 = a^{1-k}$$

- Si $\inf(\dim a^1, \dim a^0) > 0$:
.. si $p = 0$: On peut écrire de façon unique $\forall k \in [2],\ a^k = n_k(a^k_0, ..., a^k_{n_k-1})$ où $n_k \geq 1$. Alors on pose :

$$a^1 \circ_p a^0 = (n_1 + n_0)(a^1_0, ..., a^1_{n_1-1}, a^0_0, ..., a^0_{n_0-1})$$

.. si $p > 0$: Notons $b = \partial_p(a^1) = \partial_p(a^0)$. Alors b s'écrit $b = n(b_0, ..., b_{n-1})$, où $n \geq 1$ (voir la remarque $(R1)$) et dans ce cas on peut aussi écrire de façon unique $a^k = n(a^k_0, ..., a^k_{n-1})$ (voir $(R2)$). Alors on pose :

$$a^1 \circ_p a^0 = n(a^1_0 \circ_{p-1} a^0_0, ..., a^1_{n-1} \circ_{p-1} a^0_{n-1})$$

Remarque 2.9. : $(R1)$ On ne peut avoir $b = 0(\varnothing)$ (voir le (2) de la proposition 2.7).

$(R2)$ Résulte du (1) de la proposition 2.7.

Proposition 2.10. : Soient $p \in \mathbb{N}$ et $(a^1, a^0) \in \mathbb{A}rb^2$ tels que $\partial_p(a^1) = \partial_p(a^0)$.
1) Si $\inf(\dim a^1, \dim a^0) \leq p$ on a $a^1 \circ_p a^0 = a^{1-k}$ (où $k \in [2]$ est tel que $\dim(a^k) \leq p$).
2) On a $\dim(a^1 \circ_p a^0) = \sup(\dim\, a^1, \dim\, a^0)$.
3) Soit aussi $q \in \mathbb{N}$
- Si $q \leq p,\ \partial_q(a^1 \circ_p a^0) = \partial_q(a^1) = \partial_q(a^0)$.
- Si $q > p,\ \partial_q(a^1 \circ_p a^0) = \partial_q(a^1) \circ_p \partial_q(a^0)$.

Preuve : Par induction sur p.

Proposition 2.11. : Soient $p \in \mathbb{N}$ et $(a^2, a^1, a^0) \in \mathbb{A}rb^3$ tels que $\partial_p(a^2) = \partial_p(a^1) = \partial_p(a^0)$. Alors :

$$a^2 \circ_p (a^1 \circ_p a^0) = (a^2 \circ_p a^1) \circ_p a^0.$$

Preuve : Par induction sur p.

Proposition 2.12. : Soient $p, q \in \mathbb{N}$, où $p > q$ et $(a^{ij})_{(i,j)\in[2]^2} \in \mathbb{A}rb^{[2]^2}$ tels que $\forall k \in [2],\ \partial_p(a^{k1}) = \partial_p(a^{k0})$ et $\partial_q(a^{1k}) = \partial_q(a^{0k})$. Alors :

$$(a^{11} \circ_p a^{10}) \circ_q (a^{01} \circ_p a^{00}) = (a^{11} \circ_q a^{01}) \circ_p (a^{10} \circ_q a^{00}).$$

Preuve : Par induction sur q. On distingue les cas $\inf_{(k,k')} \dim(a^{kk'}) = 0$ et $\inf_{(k,k')} \dim(a^{kk'}) > 0$ (où l'on étudie les sous-cas $q = 0$ et $q > 0$).

2.3 Le multi-foncteur $\overset{n}{\oplus}$

Notation 2.13. : Donnons-nous une liste $\bar{\mathbb{G}} = (\mathbb{G}_j)_{j\in[n]}$ d'ensembles globulaires. A partir de cette liste on construit un nouvel ensemble globulaire, de la façon suivante :
Soit $(G'_j)_{j\in[n+1]}$ la nouvelle liste d'ensembles définie par $G'_0 = [n+1]$ et $\forall j \in [n],\ G'_{j+1} = G_j$. On pose alors $\hat{G} = \coprod_{j\in[n+1]} G'_j$. On définit ensuite $dim : \hat{G} \to \mathbb{N}$ par $dim(0, j) = 0$ et $dim(j+1, c) = dim(c) + 1$.
Pour chaque $p \in \mathbb{N}$ et $k \in [2]$, $\partial^k_p : \hat{G}/p \to \hat{G}$ est défini par :

$$\partial^0_0(j, c) = (0, j), \quad \partial^1_0(j, c) = (0, j-1).$$

et si $p > 0$, $\partial^k_p(j, c) = (j, \partial^k_{p-1}(c))$.
$(\hat{G}, dim, (\partial^1_p, \partial^2_p)_{p\in\mathbb{N}})$ est un ensemble globulaire que l'on note $\bigoplus_{j\in[n]} \mathbb{G}_j$ (ou encore $\overset{n}{\oplus}(\bar{\mathbb{G}})$).

$\overset{n}{\oplus}(\bar{\mathbb{G}})$ est en fait solution d'un problème universel que l'on va préciser maintenant.

Notations 2.14. : • Fixons la liste $\bar{\mathbb{G}} = (\mathbb{G}_j)_{j\in[n]}$ d'ensembles globulaires et notons $\mathcal{U}$ la catégorie qui a :
- Pour objets , les triplets $(\mathbb{G}, (u_i)_{i\in[n+1]}, (f_i)_{i\in[n]})$ où :
.. $\mathbb{G}$ est un ensemble globulaire,
.. $(u_i)_{i\in[n+1]}$ est une famille d'objets de $\mathbb{G}$ (i.e. $\forall j \in [n+1],\ dim(u_j) = 0$),
.. $(f_i : \mathbb{G}_i \to \mathbb{G}(u_{i+1}, u_i))_{i\in[n]}$ est une liste de morphismes d'ensembles globulaires (où plus généralement, pour $u, v \in \mathbb{G}$ tels que

$dim(u) = dim(v) = 0$, on note $\mathbb{G}(u,v)$ l'ensemble des $c \in G/0$ tels que $\partial_0^0(c) = u$ et $\partial_0^1(c) = v$ que l'on munit des applications
$dim' : \mathbb{G}(u,v) \to \mathbb{N},\ c \mapsto dim(c) - 1$ et $\partial_p'^k : \mathbb{G}(u,v)/p \to \mathbb{G}(u,v),$
$c \mapsto \partial_{p+1}^k(c))$.
- Pour flèches $g : (\mathbb{G}, (u_i), (f_i)) \to (\mathbb{G}', (u_i'), (f_i'))$, un morphisme d'ensemble globulaire $g : \mathbb{G} \to \mathbb{G}'$ tel que :
1) $\forall i \in [n+1],\ g(u_i) = u_i'$,
2) $\forall i \in [n],\ g|_i.f_i = f_i'$ où, $g|_i : \mathbb{G}(u_{i+1}, u_i) \to \mathbb{G}(u_{i+1}', u_i')$ est la restriction de g.
• A partir de la liste $\bar{\mathbb{G}}$, fixée précédemment, on construit
$\hat{\mathcal{G}} = (\hat{\mathbb{G}}, (\omega_i)_{i\in[n+1]}, (\sigma_i)_{i\in[n]})$ où $\hat{\mathbb{G}} = \bigoplus_{j\in[n]} \mathbb{G}_j,\ \omega_i = (0,i)$ et
$\sigma_i : \mathbb{G}_i \to \hat{\mathbb{G}}(\omega_{i+1}, \omega_i)$ est le morphisme d'ensembles globulaires donné par $\sigma_i(c) = (i+1, c)$.

Proposition 2.15. : On a $\hat{\mathcal{G}} \in |\mathcal{U}|$. $\hat{\mathcal{G}}$ est même un objet initial dans $\mathcal{U}$.

Preuve : Soit $\mathcal{G} = (\mathbb{G}, (u_i), (f_i)) \in |\mathcal{U}|$. On construit $g : \hat{\mathcal{G}} \to \mathcal{G}$, en posant $g(0,j) = u_j$ et si $j > 0,\ g(j,c) = f_{j-1}(c)$.

Notation 2.16. : Soient maintenant $(\mathbb{G}_j)_{j\in[n]}$ et $(\mathbb{G}_j')_{j\in[n]}$ deux listes de n ensembles globulaires et $(g_j : \mathbb{G}_j \to \mathbb{G}_j')_{j\in[n]}$ une liste de morphismes d'ensembles globulaires. Alors $(\bigoplus_j \mathbb{G}_j', (\omega_j'), (\sigma_j'.g_j)) \in |\mathcal{U}|$ et donc, comme $\hat{\mathcal{G}}$ est initial, il existe un unique morphisme d'ensemble globulaire $g : \bigoplus_{j\in[n]} \mathbb{G}_j \to \bigoplus_{j\in[n]} \mathbb{G}_j'$ tel que :

$$1)\ \forall j \in [n+1],\ g(\omega_j) = \omega_j', \quad 2)\ \forall \in [n],\ g|_j.\sigma_j = \sigma_j'.g_j.$$

g est noté $\bigoplus_{j\in[n]} g_j : \bigoplus_{j\in[n]} \mathbb{G}_j \to \bigoplus_{j\in[n]} \mathbb{G}_j'$.

Proposition 2.17. : L'application $\overset{n}{\oplus} : \mathbb{G}lob^n \to \mathbb{G}lob$ définie,
- sur les objets $(\mathbb{G}_j)_{j\in[n]}$ par $\overset{n}{\oplus}((\mathbb{G}_j)_{j\in[n]}) = \bigoplus_{j\in[n]} \mathbb{G}_j$,
- sur les flèches $(g_j : \mathbb{G}_j \to \mathbb{G}_j')_{j\in[n]}$ par $\overset{n}{\oplus}((g_j)) = \bigoplus_{j\in[n]} g_j$, est fonctorielle.

Preuve : Immédiat.

2.4 Ensemble globulaire associé à un arbre

Notation 2.18. : On construit une application $\mathbb{A}rb \to |\mathbb{G}lob|$, notée Γ , par induction sur la longueur des arbres (Dans [2], l'ensemble globulaire $\Gamma(a)$ est noté a^*). Soit $a \in \mathbb{A}rb$,
- Si $a = 0(\varnothing)$, on pose $\Gamma(a) = \Gamma_0$ où Γ_0 désigne $\{0\}$ vu comme ensemble globulaire ($dim(0) = 0$ et $\Gamma_0/0 = \varnothing$).
- Si $a = n(a_0, ..., a_{n-1})$, où $n \geq 1$, on pose $\Gamma(a) = \bigoplus_{j\in[n]} \Gamma(a_j)$.

Notation 2.19. : Pour chaque $k \in [2]$ et $p \in \mathbb{N}$ on construit des morphismes d'ensembles globulaires $\mathrm{d}^k_p(a) : \Gamma(\partial_p(a)) \to \Gamma(a)$, par induction sur p (ou sur $\mathrm{L}(a)$) :
- Si $a = 0(\varnothing)$, on pose $\mathrm{d}^k_p(a) = Id_{\Gamma_0}$.
- Si $a = n(a_0, ..., a_{n-1})$, où $n \geq 1$, alors,
.. si $p = 0$, $\mathrm{d}^k_0(a) : \Gamma_0 \to \Gamma(a)$ est défini par :

$$\mathrm{d}^0_0(a)(0) = (0, n) = \omega_n, \quad \mathrm{d}^1_0(a)(0) = (0, 0) = \omega_0.$$

- Si $p > 0$, on pose :
$\mathrm{d}^k_p(a) = \bigoplus_{j\in[n]} \mathrm{d}^k_{p-1}(a_j) : \bigoplus_{j\in[n]} \Gamma\partial_{p-1}(a_j) \to \bigoplus_{j\in[n]} \Gamma(a_j)$.

Proposition 2.20. : Soient $a \in \mathbb{A}rb$, $k \in [2]$ et $p \in \mathbb{N}$.
1) Si $dim(a) \leq p$ alors $\partial_p(a) = a$ et $\mathrm{d}^k_p(a) = Id_{\Gamma(a)}$.
2) Soient aussi $q \in \mathbb{N}$ tel que $q < p$ et $k' \in [2]$, alors
$\mathrm{d}^k_q(a) = \mathrm{d}^{k'}_p(a).\mathrm{d}^k_q\partial_p(a)$.

Preuve : (1) La première identité a déjà été montrée. La seconde se montre par induction sur p. Le (2) se montre aussi par induction sur p (ou sur $\mathrm{L}(a)$).

2.5 Les morphismes u^k

Notation 2.21. : Etant donnés $p \in \mathbb{N}$ et $(a^1, a^0) \in \mathbb{A}rb^2$ tels que $\partial_p(a^1) = \partial_p(a^0)$ on va construire des morphismes d'ensembles globulaires canoniques :

$$\Gamma(a^1) \xrightarrow{\mathrm{u}^1_{p(a^1,a^0)}} \Gamma(a^1 \circ_p a^0) \xleftarrow{\mathrm{u}^0_{p(a^1,a^0)}} \Gamma(a^0)$$

par induction sur p (ou sur $\mathrm{L}(a^1) + \mathrm{L}(a^0)$). Posons $a = a^1 \circ_p a^0$. Pendant la construction on note simplement u^1 et u^0 les deux morphismes $\mathrm{u}^1_{p(a^1,a^0)}$

et $\mathrm{u}^0_{p(a^1,a^0)}$.
- Si $\inf(\dim a^1, \dim a^0) = 0$, soit $k \in [2]$ tel que $dim(a^k) = 0$, alors on pose $\mathrm{u}^k = \mathrm{d}^k_p(a)$ et $\mathrm{u}^{1-k} = Id_{\Gamma(a)}$.
- Si $\inf(\dim a^1, \dim a^0) > 0$,
.. si $p = 0$, alors on peut écrire $\forall k \in [2],\ a^k = n_k(a^k_0, ..., a^k_{n_k-1})$ avec $n_k \geq 1$ et $a = (n_1 + n_0)(a^1_0, ..., a^1_{n_1-1}, a^0_0, ..., a^0_{n_0-1})$. Pour chaque $j \in \mathbb{N}$, posons $\omega^0_j = (0, n_1 + j)$ et $\omega^1_j = (0, j)$, et pour chaque $k \in [2],\ j \in [n_k]$ et $x \in \Gamma(a^k_j),\ \sigma^0_j(x) = (n_1 + j + 1, x)$ et $\sigma^1_j(x) = (j + 1, x)$. On vérifie que
$\forall k \in [2], \forall j \in [n_k],\ \sigma^k_j : \Gamma(a^k_j) \to \Gamma(a)(\omega^k_{j+1}, \omega^k_j)$ est un morphisme d'ensemble globulaire et que $(\Gamma(a), (\omega^k_j), (\sigma^k_j)) \in |\mathcal{U}|$. Il existe donc un unique morphisme d'ensemble globulaire
$\mathrm{u}^k : \Gamma(a^k) = \bigoplus_{j\in[n_k]} \Gamma(a^k_j) \to \Gamma(a)$ tel que $\forall j \in [n_k + 1]$,
$\mathrm{u}^k(\omega_j) = \omega^k_j$ et $\forall j \in [n_k],\ \mathrm{u}^k|_j.\sigma_j = \sigma^k_j$ (où $\mathrm{u}^k|_j$ est la restriction de u^k à $\Gamma(a^k)(\omega_{j+1}, \omega_j) \to \Gamma(a)(\omega^k_{j+1}, \omega^k_j)$).
.. si $p > 0$, on sait qu'il existe un unique $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall k \in [2]$, $a^k = n(a^k_0, ..., a^k_{n-1})$ et alors $a = n(a^1_0 \circ_{p-1} a^0_0, ..., a^1_{n-1} \circ_{p-1} a^0_{n-1})$. On pose alors :

$$\mathrm{u}^k = \bigoplus_{j\in[n]} \mathrm{u}^k_j : \Gamma(a^k) = \bigoplus_{j\in[n]} \Gamma(a^k_j) \to \bigoplus_{j\in[n]} \Gamma(a^1_j \circ_{p-1} a^0_j) = \Gamma(a).$$

(où $\mathrm{u}^k_j = \mathrm{u}^k_{(p-1)(a^1_j, a^0_j)}$).

Proposition 2.22. : Soient $p \in \mathbb{N}$ et $(a^1, a^0) \in \mathbb{A}rb^2$ tels que $\partial_p(a^1) = \partial_p(a^0)$. Alors, si $\inf(\mathrm{dim}a^1, \mathrm{dim}a^0) \leq p$ (soit $k \in [2]$ tel que $\dim(a^k) \leq p$), on a $\mathrm{u}^k = \mathrm{d}^k_p(a)$ et $\mathrm{u}^{1-k} = Id_{\Gamma(a)}$ (où $a = a^1 \circ_p a^0$).

Preuve : Par induction sur p.

Proposition 2.23. : Soient $p \in \mathbb{N}$ et $(a^1, a^0) \in \mathbb{A}rb^2$ tels que $\partial_p(a^1) = \partial_p(a^0)$. Notons $b = \partial_p(a^1) = \partial_p(a^0)$. Alors le carré suivant commute et c'est une somme amalgamée dans $\mathbb{G}lob$:

$$\begin{tikzcd}
\Gamma(b) \arrow[r, "\mathrm{d}^1_p(a^0)"] \arrow[d, "\mathrm{d}^0_p(a^1)"'] & \Gamma(a^0) \arrow[d, "\mathrm{u}^0"] \\
\Gamma(a^1) \arrow[r, "\mathrm{u}^1"] & \Gamma(a^1 \circ_p a^0)
\end{tikzcd}$$

où $\mathrm{u}^k = \mathrm{u}^k_{p(a^1,a^0)}$.

Preuve : Pour la commutation du carré, on l'obtient par induction sur p. Pour la somme amalgamée, on montre successivement que :
- Pour tout $k \in [2]$, u^k est injectif,
- $\forall (x^1, x^0) \in \Gamma(a^1) \times \Gamma(a^0)$, $\mathrm{u}^1(x^1) = \mathrm{u}^0(x^0) \;\Rightarrow\; \exists y \in \Gamma(b), \forall k \in [2]$, $\mathrm{d}^{1-k}_p(a^k)(y) = x^k$,
- la famille $\Gamma(a^1) \xrightarrow{\mathrm{u}^1} \Gamma(a^1 \circ_p a^0) \xleftarrow{\mathrm{u}^0} \Gamma(a^0)$ est épimorphe dans $\mathbb{E}ns$,
- notre carré vérifie la propriété universelle.
Les trois premières étapes se montrent par induction sur p.

Proposition 2.24. : Soient $p, q \in \mathbb{N}$ et $(a^1, a^0) \in \mathbb{A}rb^2$ tels que $\partial_p(a^1) = \partial_p(a^0)$. Pour simplifier, on note $a = a^1 \circ_p a^0$ et $\forall k \in [2]$, $\mathrm{u}^k = \mathrm{u}^k_{p(a^1,a^0)}$. Alors :
1) Si $q < p$, $\forall k, k' \in [2]$, $\mathrm{d}^k_q(a) = \mathrm{u}^{k'}.\mathrm{d}^k_q(a^{k'})$,
2) Si $q = p$, $\forall k \in [2]$, $\mathrm{d}^k_q(a) = \mathrm{u}^k.\mathrm{d}^k_q(a^k)$,
3) Si $q > p$, $\forall k, k' \in [2]$, $\mathrm{d}^k_q(a).\mathrm{u}^{k'}_q = \mathrm{u}^{k'}.\mathrm{d}^k_q(a^{k'})$, où $\mathrm{u}^{k'}_q = \mathrm{u}^{k'}_{p(\partial_q a^1, \partial_q a^0)}$.

Preuve : par induction sur p.

Proposition 2.25. : Soient $p \in \mathbb{N}$ et $(a^2, a^1, a^0) \in \mathbb{A}rb^3$ tels que $\partial_p(a^2) = \partial_p(a^1) = \partial_p(a^0)$. On note $\mathrm{u}^\varepsilon_{ij} = \mathrm{u}^\varepsilon_{p(a^i,a^j)}$, $\mathrm{u}^\varepsilon_{i(jk)} = \mathrm{u}^\varepsilon_{p(a^i, a^j \circ_p a^k)}$, $\mathrm{u}^\varepsilon_{(ij)k} = \mathrm{u}^\varepsilon_{p(a^i \circ_p a^j, a^k)}$ Alors :
1) $\mathrm{u}^1_{(21)0}.\mathrm{u}^0_{21} = \mathrm{u}^0_{2(10)}.\mathrm{u}^1_{10}$,
2) $\mathrm{u}^0_{(21)0} = \mathrm{u}^0_{2(10)}.\mathrm{u}^0_{10}$,
3) $\mathrm{u}^1_{2(10)} = \mathrm{u}^1_{(21)0}.\mathrm{u}^1_{21}$.

Preuve : Par induction sur p.

Proposition 2.26. : Soient $p, q \in \mathbb{N}$, où $p > q$ et $(a^{ij})_{(i,j) \in [2]^2} \in \mathbb{A}rb^{[2]^2}$ tels que $\forall k \in [2]$, $\partial_p(a^{k1}) = \partial_p(a^{k0})$ et $\partial_q(a^{1k}) = \partial_q(a^{0k})$. On note :
$e = (a^{11} \circ_p a^{10}) \circ_q (a^{01} \circ_p a^{00}) = (a^{11} \circ_q a^{01}) \circ_p (a^{10} \circ_q a^{00})$, $\mathrm{u}^\varepsilon_t = \mathrm{u}^\varepsilon_{t(\alpha,\beta)}$,

$\mathrm{u}^{\varepsilon}_{\bullet k} = \mathrm{u}^{\varepsilon}_{q(a^{1k},a^{0k})}$, $\mathrm{u}^{\varepsilon}_{k\bullet} = \mathrm{u}^{\varepsilon}_{p(a^{k1},a^{k0})}$. Alors le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd}
\Gamma(a^{11}) \arrow[r, "\mathrm{u}^1_{\bullet 1}"] \arrow[d, "\mathrm{u}^1_{1\bullet}"'] & \Gamma(a^{11}\circ_q a^{01}) \arrow[d, "\mathrm{u}^1_p"] & \Gamma(a^{01}) \arrow[l, "\mathrm{u}^0_{\bullet 1}"'] \arrow[d, "\mathrm{u}^1_{0\bullet}"] \\
\Gamma(a^{11}\circ_p a^{10}) \arrow[r, "\mathrm{u}^1_q"] & \Gamma(e) & \Gamma(a^{01}\circ_p a^{00}) \arrow[l, "\mathrm{u}^0_q"'] \\
\Gamma(a^{10}) \arrow[r, "\mathrm{u}^1_{\bullet 0}"] \arrow[u, "\mathrm{u}^0_{1\bullet}"] & \Gamma(a^{10}\circ_q a^{00}) \arrow[u, "\mathrm{u}^0_p"'] & \Gamma(a^{00}) \arrow[l, "\mathrm{u}^0_{\bullet 0}"'] \arrow[u, "\mathrm{u}^0_{0\bullet}"']
\end{tikzcd}$$

Preuve : Par induction sur q.

2.6 L'∞-catégorie stricte $\omega(\mathbb{G})$

Notations 2.27. : Soit $\mathbb{G}$ un ensemble globulaire. On note $\omega(\mathbb{G})$ l'ensemble des triplets (n,a,g) où $n\in\mathbb{N}$, $a\in\mathbb{A}rb$, tel que $dim(a)\leq n$, et $g:\Gamma(a)\to\mathbb{G}$ est un morphisme d'ensemble globulaire. On définit ensuite l'application $dim:\omega(\mathbb{G})\to\mathbb{N}$ en posant $dim(n,a,g)=n$. Pour chaque $p\in\mathbb{N}$ et $k\in[2]$ on définit aussi une application $\partial^k_p:\omega(\mathbb{G})\to\omega(\mathbb{G})$ en posant $\partial^k_p(n,a,g)=(p,\partial_p(a),g.\mathrm{d}^k_p(a))$.

Proposition 2.28. : $(\omega(\mathbb{G}),dim,(\partial^1_p,\partial^0_p)_{p\in\mathbb{N}})$ est un ensemble globulaire.

Preuve : Résulte essentiellement de la proposition 2.20.

Notations 2.29. : Lorsque $\alpha\in\omega(\mathbb{G})$, on définit $\underline{\alpha}\in\mathbb{A}rb$ et $g_\alpha:\Gamma(\underline{\alpha})\to\mathbb{G}$ la flèche de $\mathbb{G}lob$ telle que $\alpha=(dim(\alpha),\underline{\alpha},g_\alpha)$.

On va maintenant montrer que $\omega(\mathbb{G})$ a canoniquement une structure d'∞-catégorie stricte. Commençons donc par donner une définition "globale" des ∞-catégories strictes (Pour le concept originel voir [8]) :

Définition 2.30. : On appelle ∞-*catégorie stricte* la donnée :
- d'un ensemble C,
- d'une application $dim:C\to\mathbb{N}$,
- d'une application $\imath:C\to C$,
- d'une famille d'applications $(\partial^k_p:C\to C)_{(k,p)\in[2]\times\mathbb{N}}$,

- d'une autre famille d'applications $(\circ_p : \underset{p}{\circledast} C \to C)_{p\in\mathbb{N}}$ où on note $\underset{p}{\circledast} C = \{(x_1, x_0)\ C^2 /\ dim(x_1) = dim(x_0) > p$ et $\partial^0_p(x_1) = \partial^1_p(x_0)\}$.

Ces données doivent satisfaire les axiomes suivants :
$(GD)\ \forall k \in [2], \forall p \in \mathbb{N}, \forall x \in C,\ dim\, \partial^k_p(x) = p,$
$(GG)\ \forall k, k' \in [2], \forall p, q \in \mathbb{N}, \forall x \in C,\ q < p\ \Rightarrow\ \partial^k_q \partial^{k'}_p(x) = \partial^k_q(x),$
$(GR)\ \forall k \in [2], \forall p, n \in \mathbb{N}, \forall x \in C,\ p \geq n = dim(x)\ \Rightarrow\ \partial^k_p(x) = \imath^{p-n}(x),$
$(CD)\ \forall p \in \mathbb{N}, \forall (x_1, x_0) \in \underset{p}{\circledast} C,\ dim(x_1 \circ_p x_0) = dim(x_1) = dim(x_0),$
$(CG)\ \forall p, q \in \mathbb{N}, \forall (x_1, x_0) \in \underset{p}{\circledast} C, \forall k \in [2],$

$$q \leq p\ \Rightarrow\ \partial^k_q(x_1 \circ_p x_0) = \partial^k_q(x_k),$$
$$q > p\ \Rightarrow\ \partial^k_q(x_1 \circ_p x_0) = \partial^k_q(x_1) \circ_p \partial^k_q(x_0),$$

$(Uni)\ \forall p, n \in \mathbb{N}, \forall x \in C,\ p < n = dim(x)\ \Rightarrow\ x \circ_p (\imath^{n-p}.\partial^0_p)(x) = x$ et $(\imath^{n-p}.\partial^1_p)(x) \circ_p x = x,$
$(Ass)\ \forall p \in \mathbb{N}, \forall (x_2, x_1, x_0) \in C^3,$
$(x_2, x_1), (x_1, x_0) \in \underset{p}{\circledast} C\ \Rightarrow\ x_2 \circ_p (x_1 \circ_p x_0) = (x_2 \circ_p x_1) \circ_p x_0,$
$(Ech)\ \forall p, q \in \mathbb{N}, \forall (x_{00}, x_{01}, x_{10}, x_{11}) \in C^4,\ p > q$ et $\forall k \in [2],$
$(x_{k1}, x_{k0}) \in \underset{p}{\circledast} C$ et $(x_{1k}, x_{0k}) \in \underset{q}{\circledast} C\ \Rightarrow$
$(x_{11} \circ_p x_{10}) \circ_q (x_{01} \circ_p x_{00}) = (x_{11} \circ_q x_{01}) \circ_p (x_{10} \circ_q x_{00}).$

Notations et définitions 2.31. : Sur $\omega(\mathbb{G})$ on définit les lois suivantes :
- une application $\imath : \omega(\mathbb{G}) \to \omega(\mathbb{G})$, en posant $\imath(n, a, g) = (n + 1, a, g)$,
- pour chaque $p \in \mathbb{N}$ l'application $\circ_p : \underset{p}{\circledast} \omega(\mathbb{G}) \to \mathbb{G},\ (\alpha_1, \alpha_0) \mapsto \alpha_1 \circ_p \alpha_0$

où $\alpha_1 \circ_p \alpha_0$ est défini de la façon suivante :
Tout d'abord posons, pour chaque $k \in [2],\ \alpha_k = (n_k, a_k, g_k)$. Alors, par hypothèse, $n_1 = n_0,\ \partial_p(a_1) = \partial_p(a_0)$ et on a l'identité $g_1.\mathrm{d}^1_p(a_0) = g_0.\mathrm{d}^0_p(a_1)$ et donc, grâce à la somme amalgamée donnée à la proposition 2.23, on obtient l'unique morphisme d'ensemble globulaire $g_{10} : \Gamma(a_1 \circ_p a_0) \to \mathbb{G}$ qui vérifie $g_{10}.\mathrm{u}^1 = g_1$ et $g_{10}.\mathrm{u}^0 = g_0$ (où $\mathrm{u}^k = \mathrm{u}^k_{p(a_1, a_0)}$).
On peut alors poser $\alpha_1 \circ_p \alpha_0 = (n, a_1 \circ_p a_0, g_{10})$ (où $n = n_1 = n_0$).

Proposition 2.32. : $(\omega(\mathbb{G}), \dim, \imath, (\partial^k_p)_{(k,p)\in[2]\times\mathbb{N}}, (\circ_p)_{p\in\mathbb{N}})$ est une ∞-catégorie stricte.

Preuve : Remarquons déjà que (GD) et (CD) sont immédiats. Ensuite on obtient :

(GG) par la proposition 2.20,
(GR) par la proposition 2.5 et la proposition 2.20,
(CG) par la proposition 2.10 et la proposition 2.24,
(Uni) par la proposition 2.10 et la proposition 2.22,
(Ass) par la proposition 2.11 et la proposition 2.25,
(Ech) par la proposition 2.12 et la proposition 2.26.

2.7 ∞-catégorie stricte libre

Donnons déjà une version globale de la notion d'∞-foncteur strict.

Définition 2.33. : $\mathbb{C}$ et $\mathbb{C}'$ étant deux ∞-catégories strictes, un ∞-foncteur strict $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}'$ est la donnée d'une application $F : C \to C'$ vérifiant les conditions suivantes :
(FD) $\forall x \in C,\ dimF(x) = dim(x)$,
(FG) $\forall x \in C, \forall p \in \mathbb{N}, \forall k \in [2],\ F\partial_p^k(x) = \partial_p^k F(x)$,
(FC) $\forall p \in \mathbb{N}, \forall (x_1, x_0) \in \underset{p}{\circledast} C,\ F(x_1 \circ_p x_0) = F(x_1) \circ_p F(x_0)$.

Notations 2.34. : On note ∞-$\mathbb{C}at$ la catégorie des ∞-catégories strictes et de leurs ∞-foncteurs stricts. Notons aussi $U : \infty\text{-}\mathbb{C}at \to \mathbb{G}lob$ le foncteur d'oubli canonique.

2.7.1 Construction de g_*

Notation 2.35. : Soit $g : \mathbb{G} \to \mathbb{G}'$ un morphisme d'ensembles globulaires. On construit une application $g_* : \omega(\mathbb{G}) \to \omega(\mathbb{G}')$ en posant
$g_*(n, a, \gamma) = (n, a, g.\gamma)$.

Proposition 2.36. : 1) $g_* : \omega(\mathbb{G}) \to \omega(\mathbb{G}')$ est un ∞-foncteur strict.
2) L'application $g \mapsto g_*$ est fonctorielle (On note ω l'endo-foncteur de $\mathbb{G}lob$ obtenu).

<u>*Preuve*</u> : Sans difficulté.

2.7.2 Construction de $v_{\mathbb{C}}$

Notation 2.37. : Soient maintenant $\mathbb{C} \in |\infty - \mathbb{C}at|$ et $\alpha \in \omega U(\mathbb{C})$. On construit $v_{\mathbb{C}}(\alpha) \in C$ tel que $dim\ v_{\mathbb{C}}(\alpha) = \dim(\alpha)$ par induction sur $\dim(\alpha)$. Écrivons $\alpha = (m, a, \gamma) \in \omega U(\mathbb{C})$.
- Si $a = 0(\varnothing)$, alors $\Gamma(a) = \Gamma_0$. Posons $v_{\mathbb{C}}(\alpha) = \imath^m \gamma(0)$.
- Si $a = n(a_0, ..., a_{n-1})$, où $n \geq 1$. Alors $\Gamma(a) = \bigoplus_{j\in[n]} \Gamma(a_j)$. Pour chaque $j \in [n+1]$, posons $\omega_j = (0, j) \in \Gamma(a)$. Notons aussi
$\mathbb{C}_j = \mathbb{C}(\gamma(\omega_{j+1}), \gamma(\omega_j))$ et $\gamma|_j$ la restriction de γ à
$\Gamma(a)(\omega_{j+1}, \omega_j) \to \mathbb{C}_j$. On pose ensuite $\alpha_j = (m-1, a_j, \gamma|_j.\sigma_j) \in \omega U(\mathbb{C}_j)$
Alors, par hypothèse d'induction, $v_{\mathbb{C}_j}(\alpha_j) \in C_j$ et
$dim\ v_{\mathbb{C}_j}(\alpha_j) = \dim(\alpha_j) = m-1$. On vérifie que $\forall j \in [n]$,
$(v_{\mathbb{C}_j}(\alpha_j), v_{\mathbb{C}_{j+1}}(\alpha_{j+1})) \in \underset{0}{\circledast}\mathbb{C}$. On peut donc poser

$$v_{\mathbb{C}}(\alpha) = \iota_0 v_{\mathbb{C}_0}(\alpha_0) \circ_0 \iota_1 v_{\mathbb{C}_1}(\alpha_1) \circ_0 ... \circ_0 \iota_{n-1} v_{\mathbb{C}_{n-1}}(\alpha_{n-1}).$$

(où $\iota_j : \mathbb{C}_j \to \mathbb{C}$ est l'injection canonique. Signalons que
$dim\ \iota_j(c) = dim(c) + 1$ et que $\iota_j(c_1 \circ_p c_0) = \iota_j(c_1) \circ_{p+1} \iota_j(c_0)$). On vérifie enfin que $dim\ v_{\mathbb{C}}(\alpha) = \dim(\alpha)$.

Proposition 2.38. : 1) $v_{\mathbb{C}} : \omega U(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ est un ∞-foncteur strict.
2) $v_{\mathbb{C}}$ est naturel en $\mathbb{C}$.

Preuve : par induction sur la dimension des cellules de $\omega U(\mathbb{C})$ où $\mathbb{C}$ est quelconque.

2.7.3 Construction de $\eta_{\mathbb{G}}$

Notation 2.39. : Pour chaque entier $n \in \mathbb{N}$, notons α_n l'arbre $1^n(0(\varnothing))$ (Rappelons que 1 est un symbole fonctionnel d'arité 1 du langage de base).

Proposition 2.40. : Pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$\Gamma(\alpha_n) = \{g_p^k(n)/k \in [2], p \in [n+1]\}$ où $g_p^k(n)$ est défini par induction sur n par :
- si $n = 0$, $g_0^0(0) = g_0^1(0) = 0$,
- si $n > 0$ et,
.. si $p = 0$, $g_0^0(n) = (0, 1)$, $g_0^1(n) = (0, 0)$,
.. si $p > 0$, $g_p^k(n) = (1, g_{p-1}^k(n-1))$.

Preuve : sans difficulté.

Notation 2.41. : Pour chaque $\mathbb{G} \in |\mathbb{G}lob|$, on construit $\eta_{\mathbb{G}} : G \to \omega(\mathbb{G})$ en posant $\eta_{\mathbb{G}}(c) = (n, \alpha_n, g_{(c)})$ où $n = dim(c)$ et $g_{(c)} : \Gamma(\alpha_n) \to G$ est défini par $g_{(c)}(g_p^k(n)) = \partial_p^k(c)$. (On remarque que cette définition a bien un sens, même si $g_p^k(n) = g_p^{k'}(n)$ pour $k \neq k'$). On vérifie que $g_{(c)}$ est un morphisme d'ensemble globulaire.

Proposition 2.42. : 1) $\eta_{\mathbb{G}} : \mathbb{G} \to \omega(\mathbb{G})$ est un morphisme d'ensemble globulaire.
2) $\eta_{\mathbb{G}}$ est naturel en $\mathbb{G}$ (On note $\eta : Id_{\mathbb{G}lob} \to \omega$ cette transformation naturelle).

Preuve : (1) On montre que pour $n > p$ on a $\partial_p(\alpha_n) = \alpha_p$ et $g_{(\partial_p^k c)} = g_{(c)}.\mathrm{d}_p^k(\alpha_n)$.
(2) On montre que pour $g : \mathbb{G} \to \mathbb{G}'$ dans $\mathbb{G}lob$ et $c \in G$, on a $g.g_{(c)} = g_{(gc)}$.

Proposition 2.43. : Soit $\mathbb{C} \in |\infty\text{-}\mathbb{C}at|$. Alors on a $v_{\mathbb{C}}.\eta_{U(\mathbb{C})} = Id_{U(\mathbb{C})}$.

Preuve : par induction sur la dimension des cellules de $\mathbb{C}$.

2.7.4 Construction de $1_{(c_0,c_1)}$

Remarques 2.44. : Soient $\mathbb{G} \in |\mathbb{G}lob|$ et
$c_0, c_1 \in G(0) = \{c \in G / dim(c) = 0\}$. On va construire un ∞-foncteur strict $1_{(c_0,c_1)} : \omega(\mathbb{G}(c_0, c_1)) \to \omega(\mathbb{G})(\eta_{\mathbb{G}} c_0, \eta_{\mathbb{G}} c_1)$.

Soit $(n, a, \gamma) \in \omega(\mathbb{G}(c_0, c_1))$. On constate que : $\Gamma(1a) = \overset{1}{\oplus}\Gamma(a) =$ $\{(0,0),(0,1)\} \cup \{(1,x)/x \in \Gamma a\} = \{\omega_0, \omega_1\} \cup \{\sigma_0(x)/x \in \Gamma a\}$. En fait $\sigma_0 : \Gamma(a) \to \Gamma(1a)(\omega_1, \omega_0)$ est un isomorphisme d'ensemble globulaire. A partir de $\gamma : \Gamma(a) \to \mathbb{G}(c_0, c_1)$ on construit l'application $\bar{\gamma} : \Gamma(1a) \to \mathbb{G}$ en posant $\forall k \in [2]$, $\bar{\gamma}(\omega_k) = c_{1-k}$ et $\bar{\gamma}.\sigma_0(x) = \gamma(x) \in \mathbb{G}(c_0, c_1) \subset G$. On vérifie que $\bar{\gamma} : \Gamma(1a) \to \mathbb{G}$ est un morphisme d'ensembles globulaires.

Notation 2.45. : On note $1_{(c_0,c_1)} : \omega(\mathbb{G}(c_0, c_1)) \to \omega(\mathbb{G})$ l'application définie par $1_{(c_0,c_1)}(n, a, \gamma) = (n+1, 1a, \bar{\gamma})$.

Proposition 2.46. : 1) $\forall \alpha \in \omega(\mathbb{G}(c_0, c_1)),\ 1_{(c_0,c_1)}(\alpha) \in \omega(\mathbb{G})(\eta_{\mathbb{G}}c_0, \eta_{\mathbb{G}}c_1)$.
2) $1_{(c_0,c_1)} : \omega(\mathbb{G}(c_0, c_1)) \to \omega(\mathbb{G})(\eta_{\mathbb{G}}c_0, \eta_{\mathbb{G}}c_1)$ est un ∞-foncteur strict.
3) On a l'identité $1_{(c_0,c_1)}.\eta_{\mathbb{G}(c_0,c_1)} = \eta_{\mathbb{G}}|$, où $\eta_{\mathbb{G}}|$ est la restriction de $\eta_{\mathbb{G}}$ à $\mathbb{G}(c_0, c_1)) \to \omega(\mathbb{G})(\eta_{\mathbb{G}}c_0, \eta_{\mathbb{G}}c_1)$.
4) Soit $g : \mathbb{G} \to \mathbb{G}'$ un morphisme d'ensembles globulaires et $c_0, c_1 \in G(0)$. Alors on a l'identité :

$$g_*|.1_{(c_0,c_1)} = 1_{(gc_0,gc_1)}.(g|)_*$$

où $g|$ et $g_*|$ sont des restrictions de g et g_*.
5) Soient $\mathbb{C}$ une ∞-catégorie stricte et $c_0, c_1 \in C(0)$. Alors on a l'identité :

$$v_{\mathbb{C}}|.1_{(c_0,c_1)} = v_{\underline{\mathbb{C}}}$$

où $v_{\mathbb{C}}|$ est une restriction de $v_{\mathbb{C}}$ et $\underline{\mathbb{C}} = \mathbb{C}(c_0, c_1)$.

Preuve : On le vérifie sans difficulté.

2.7.5 La propriété universelle

Théorème 2.47. : Le foncteur d'oubli $U : \infty\text{-}\mathbb{C}at \to \mathbb{G}lob$ admet pour adjoint à gauche le foncteur L (où $L(\mathbb{G})$ est $\omega(\mathbb{G})$ muni de sa structure d'∞-catégorie stricte et pour tout $g : \mathbb{G} \to \mathbb{G}', L(g)$ est g_* considéré comme ∞-foncteur strict).

Preuve : Soient $\mathbb{G} \in |\mathbb{G}lob|$ et $\mathbb{C} \in |\infty\text{-}\mathbb{C}at|$. On montre que l'application $can : \infty\text{-}\mathbb{C}at(L\mathbb{G}, \mathbb{C}) \to \mathbb{G}lob(\mathbb{G}, U\mathbb{C})$, donnée par $can(F) = U(F).\eta_{\mathbb{G}}$, a pour inverse l'application $can' : g \mapsto v_{\mathbb{C}}.g_*$. On voit en effet facilement l'égalité $can.can' = Id$ et donc que can est surjective. Pour l'injectivité, on montre l'implication suivante : $can(F) = g \Rightarrow F = can'(g)$. Pour cela, F étant fixé on vérifie, par induction sur la longueur de $\underline{\alpha}$ et en faisant intervenir ce qui précède, que : $\forall \alpha \in \omega(\mathbb{G}),\ F(\alpha) = v_{\mathbb{C}}.g_*(\alpha)$.

Remarque 2.48. : L'adjonction...

$$\infty - \mathbb{C}at \underset{U}{\overset{L}{\underset{\longrightarrow}{\overset{\longleftarrow}{\perp}}}} \mathbb{G}lob$$

... induit une monade (ω, η, μ) sur $\mathbb{G}lob$, où ω et η ont déjà été définies et où $\mu : \omega^2 \to \omega$ est donnée par $\mu_{\mathbb{G}} = Uv_{L(\mathbb{G})}$.

3. La monade $\mathbb{P}$

Introduction : La monade $\mathbb{P}$ est une version non-réflexive de la monade qui a été présentée dans [10] (Elle est explicitement définie dans [3] et [7]) . On la construit ici tout naturellement à l'aide des outils introduits dans les sections précédentes. Cette monade que l'on rend concrète est syntaxique et cartésienne(voir [3]) (On montre ce dernier résultat grâce à la notion de polarisation d'une opération - voir la notation 3.33). Cependant elle n'est pas pure (voir la proposition 3.40). C'est pour combler cette lacune que nous construirons la monade $\mathbb{B}$ à la section suivante.

3.1 Domaine et co-domaine d'un arbre

On se place maintenant dans un cas particulier des conventions 1.1.

Conventions 3.1. : On fixe maintenant le langage $(S_{\mathbb{P}}, ar)$ donné par :

$$S_{\mathbb{P}} = \{\star_p / p \in \mathbb{N}\} \cup \{\square\}.$$

où $ar(\star_p) = ar(\square) = 2$. On lui donne une structure relativement dimensionnelle en considérant les applications $\delta(\star_p), \delta(\square) : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ définies par
$\delta(\star_p)(x,y) = \sup(p+1, x, y)$ et $\delta(\square)(x,y) = 1 + \sup(x,y)$. Ensuite, pour chaque ensemble $C \in |\mathbb{E}ns|$ on note $A'(C) = \mathbb{A}rb(S_{\mathbb{P}}(C), ar)$ (pour la distinguer de la notation $A(C)$ qui sera utilisée dans la prochaine section).

Remarque 3.2. : On constate que le langage relativement dimensionnel $(S_{\mathbb{P}}(C), ar, \delta)$ est croissant (voir la première partie, section 2).

Notations 3.3. : Fixons déjà un ensemble globulaire
$\mathbb{G} = (G, dim, (\partial_p^1, \partial_p^0)_{p\in\mathbb{N}})$ et soit $a \in A'(G)$.
On note $\mathrm{I}(a) = a\square a$. On voit que $\dim \mathrm{I}(a) = 1 + \dim(a)$ et donc
$\dim \mathrm{I}^n(a) = n + \dim(a)$.
Soient maintenant $p \in \mathbb{N}, k \in [2]$. On définit $\partial_p^k(a)$ de la façon suivante :
- Si $p \geq \dim(a)$, on pose $\partial_p^k(a) = \mathrm{I}^{p-n}(a)$ (où $n = \dim(a)$).
- Si $p < \dim(a)$, on définit $\partial_p^k(a)$ par induction sur $\mathrm{L}(a)$.
.. Si $a = c(\varnothing)$, où $c \in G$, alors on pose $\partial_p^k(a) = \partial_p^k(c)(\varnothing)$.
.. Si $a = a_1 \star_q a_0$, on pose :

... pour $q \geq p,\ \partial_p^k(a) = \partial_p^k(a_k)$,
... pour $q < p,\ \partial_p^k(a) = \partial_p^k(a_1) \star_q \partial_p^k(a_0)$,
.. Si $a = a_1 \square a_0$, on pose $\partial_p^k(a) = \partial_p^k(a_k)$.

Proposition 3.4. : $\forall p \in \mathbb{N}, \forall k \in [2], \forall a \in A'(G),\ \dim \partial_p^k(a) = p$.

Preuve : Par induction sur $L(a)$.

Proposition 3.5. : Soit $g : \mathbb{G} \to \mathbb{G}'$ un morphisme d'ensemble globulaire. Alors :
1) $\forall a \in A'(G),\ \tilde{g}\mathrm{I}(a) = \mathrm{I}\tilde{g}(a)$.
2) $\forall a \in A'(G), \forall p \in \mathbb{N}, \forall k \in [2],\ \tilde{g}\partial_p^k(a) = \partial_p^k \tilde{g}(a)$.

Preuve : Le (1) est immédiat. Pour le (2), par induction sur $\mathrm{L}(a)$.

Corollaire 3.6. : 1) $\forall a \in A'(G),\ |\mathrm{I}(a)| = \mathrm{I}(|a|)$.
2) $\forall a \in A'(G), \forall p \in \mathbb{N}, \forall k \in [2],\ |\partial_p^k(a)| = \partial_p^k(|a|)$.

Proposition 3.7. : 1) $\forall A \in A'^2(G),\ \mu_G(\mathrm{I}A) = \mathrm{I}\mu_G(A)$.
2) $\forall A \in A'^2(G), \forall p \in \mathbb{N}, \forall k \in [2],\ \mu_G \partial_p^k(A) = \partial_p^k \mu_G(A)$.

Preuve : Le (1) est immédiat.Pour le (2), par induction sur $\mathrm{L}(A)$.

3.2 Arbres compatibles avec un ensemble globulaire

Notation 3.8. : $\mathbb{G} = (G, dim, (\partial_p^1, \partial_p^0)_{p \in \mathbb{N}})$ étant un ensemble globulaire fixé, on va construire une nouvelle classe d'arbres notée $A'^g(\mathbb{G})$. On la construit par induction sur la longueur des arbres. Soit $a \in A'(G)$.
- Si $a = c(\varnothing)$, où $c \in G$, alors $a \in A'^g(\mathbb{G})$.
- Si $a = a_1 \star_p a_0$, alors $a \in A'^g(\mathbb{G})$ ssi
$a_1, a_0 \in A'^g(\mathbb{G}),\ \forall k \in [2],\ \dim(a_k) = \dim(a)$ et $\partial_p^0(a_1) = \partial_p^1(a_0)$.
- Si $a = a_1 \square a_0$, alors $a \in A'^g(\mathbb{G})$ ssi $a_1, a_0 \in A'^g(\mathbb{G})$ et $a_1 // a_0$ (c.a.d. $\dim(a_1) = \dim(a_0)$ et, n étant cette dimension,
.. si $n = 0,\ a_1 = a_0$,
.. si $n > 0,\ \forall k \in [2],\ \partial_{n-1}^k(a_1) = \partial_{n-1}^k(a_0)$).

Proposition 3.9. : 1) $\forall a \in A'^g(\mathbb{G}),\ \mathrm{I}(a) \in A'^g(\mathbb{G})$.
2) $\forall p \in \mathbb{N}, \forall k \in [2], \forall a \in A'^g(\mathbb{G}),\ p \leq \dim(a) \Rightarrow \partial_p^k(a) \in A'^g(\mathbb{G})$.
3) $\forall p, q \in \mathbb{N}, \forall k, k' \in [2], \forall a \in A'^g(\mathbb{G})$,
$q < p < \dim(a) \Rightarrow \partial_q^k \partial_p^{k'}(a) = \partial_q^k(a)$.

Preuve : Par induction sur $L(a)$.

Corollaire 3.10. : $(A'^g(\mathbb{G}), \dim, (\partial_p^1, \partial_p^0)_{p\in\mathbb{N}})$ est un ensemble globulaire. On le note $\mathcal{A}'^g(\mathbb{G})$.

Proposition 3.11. : Soit $g : \mathbb{G} \to \mathbb{G}'$ un morphisme d'ensemble globulaire. Alors :
1) $\forall a \in A'^g(\mathbb{G}),\ \tilde{g}(a) \in A'^g(\mathbb{G}')$.
2) $\tilde{g} : \mathcal{A}'^g(\mathbb{G}) \to \mathcal{A}'^g(\mathbb{G}')$ est un morphisme d'ensemble globulaire.

Preuve : Pour le (1), par induction sur $\mathrm{L}(a)$. Le (2) est immédiat.

Proposition 3.12. : 1) $\forall A \in A'^g\mathcal{A}'^g(\mathbb{G}),\ \mu_G\tilde{\imath}_G(A) \in A'^g(\mathbb{G})$, où $\imath_G : A'^g(\mathbb{G}) \to A'(G)$ est l'injection canonique. On note $\mu'_{\mathbb{G}} : A'^g\mathcal{A}'^g(\mathbb{G}) \to A'^g(\mathbb{G})$ la restriction de μ_G.
2) $\mu'_{\mathbb{G}} : (\mathcal{A}'^g)^2(\mathbb{G}) \to \mathcal{A}'^g(\mathbb{G})$ est un morphisme d'ensemble globulaire.

Preuve : Pour le (1), par induction sur $\mathrm{L}(A)$. Le (2) est immédiat.

Remarques 3.13. : 1) L'application $g \mapsto \tilde{g} : \mathcal{A}'^g(\mathbb{G}) \to \mathcal{A}'^g(\mathbb{G}')$ est fonctorielle. On note $\mathcal{A}'^g$ l'endo-foncteur de $\mathbb{G}lob$ obtenu.
2) L'application $\eta'_{\mathbb{G}} : G \to A'^g(\mathbb{G})$, restriction de η_G est un morphisme d'ensemble globulaire $\mathbb{G} \to \mathcal{A}'^g(\mathbb{G})$. Etant naturelle en $\mathbb{G}$, on obtient une transformation naturelle $\eta' : Id_{\mathbb{G}lob} \to \mathcal{A}'^g$.
3) De même, $\mu'_{\mathbb{G}}$ est naturelle en $\mathbb{G}$. On obtient une transformation naturelle notée $\mu' : (\mathcal{A}'^g)^2 \to \mathcal{A}'^g$.

Proposition 3.14. : 1) $(\mathcal{A}'^g, \eta', \mu')$ est une monade sur $\mathbb{G}lob$.
2) $(\mathbb{G}lob, U, \mathcal{A}'^g, \eta', \mu', \mathrm{L}')$ est une monade concrète syntaxique, où $\mathrm{L}'_{\mathbb{G}} = \mathrm{L}_{(G,dim)}.\imath_G$.

Preuve : Pour le (1) voir la section 3 de la première partie et pour le (2) cela résulte de la section 1 de la première partie.

3.3 La classe $A'^c(\mathbb{G})$

Avant de définir cette classe d'arbres commençons par introduire le concept de "globalisation totale" d'une ∞-catégorie stricte (c'est essentiellement le même concept que dans [10], page 67).

Notations et définitions 3.15. : 1) Soit $\mathbb{C} = (C, dim, \imath, (\partial_p^1, \partial_p^0)_{p\in\mathbb{N}}, (\circ_p)_{p\in\mathbb{N}})$ une ∞-catégorie stricte. On note $Tot(\mathbb{C}) = C \coprod 1$. Par abus de notation on écrit $Tot(\mathbb{C}) = C \cup \{\omega\}$, où $\omega \notin C$. On munit $Tot(\mathbb{C})$ des applications suivantes :
- $\overline{dim} : Tot(\mathbb{C}) \to \overline{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ est défini par $\overline{dim}(x) = dim(x)$ si $x \in C$ et $\overline{dim}(\omega) = \infty$. (Attention ! Il y a un risque de confusion avec la notation donnée dans la partie 1, section 2).
- $\bar{\imath} : Tot(\mathbb{C}) \to Tot(\mathbb{C})$ est donné par $\bar{\imath}(x) = \imath(x)$ si $x \in C$ et $\bar{\imath}(x) = \omega$ sinon.
- Pour tout $(k, p) \in [2] \times \mathbb{N}$, $\bar{\partial}_p^k : Tot(\mathbb{C}) \to Tot(\mathbb{C})$ est défini par : $\bar{\partial}_p^k(x) = \partial_p^k(x)$ si $x \in C$, $\bar{\partial}_p^k(x) = \omega$ sinon.
- Pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\bar{\circ}_p : Tot(\mathbb{C})^2 \to Tot(\mathbb{C})$ est donné par :
$x \bar{\circ}_p x' = x \circ_p x'$ si $x, x' \in C$ et $(x, x') \in \underset{p}{\circledast} C$ et $x \bar{\circ}_p x' = \omega$ sinon.
- $\overline{\Box} : Tot(\mathbb{C})^2 \to Tot(\mathbb{C})$ est donné par :
$x \overline{\Box} x' = \bar{\imath}(x)$ si $x = x'$ et $x \overline{\Box} x' = \omega$ sinon.

2) On définit ensuite, pour chaque $\mathbb{G} \in |\mathbb{G}lob|$, une application $\delta_{\mathbb{G}} : A'(G) \to Tot\ \omega(\mathbb{G})$ par induction sur la longueur d'un arbre. Soit $a \in A'(G)$.
- Si $a = c(\varnothing)$, où $c \in G$, on pose $\delta_{\mathbb{G}}(a) = \eta_{\mathbb{G}}(c) \in \omega(\mathbb{G})$.
- Si $a = a_1 \star_p a_0$, on pose $\delta_{\mathbb{G}}(a) = \delta_{\mathbb{G}}(a_1) \bar{\circ}_p \delta_{\mathbb{G}}(a_0)$.
- Si $a = a_1 \Box a_0$, on pose $\delta_{\mathbb{G}}(a) = \delta_{\mathbb{G}}(a_1) \overline{\Box} \delta_{\mathbb{G}}(a_0)$.

On est maintenant en mesure de construire la classe $A'^c(\mathbb{G})$ (notée $\hat{\mathcal{T}}^e(D)$ dans [10], page 72).

Notation 3.16. : $A'^c(\mathbb{G})$ est un sous-ensemble de $A'(G)$ défini par induction sur la longueur des arbres de la façon suivante. Soit $a \in A'(G)$.
- Si $a = c(\varnothing)$, où $c \in G$, alors $a \in A'^c(\mathbb{G})$.
- Si $a = a_1 \star_p a_0$, alors $a \in A'^c(\mathbb{G})$ ssi $a_1, a_0 \in A'^c(\mathbb{G})$, $\forall k \in [2]$, $\dim(a_k) = \dim(a)$ et $\partial_p^0(a_1) = \partial_p^1(a_0)$.
- Si $a = a_1 \Box a_0$, alors $a \in A'^c(\mathbb{G})$ ssi $a_1, a_0 \in A'^c(\mathbb{G})$, $a_1 // a_0$ et $\delta_{\mathbb{G}}(a_1) = \delta_{\mathbb{G}}(a_0)$.

Remarque 3.17. : On a $A'^c(\mathbb{G}) \subset A'^g(\mathbb{G})$.

Proposition 3.18. : Soit $a \in A'^c(\mathbb{G})$, alors :
1) $\forall p \in \mathbb{N}, \forall k \in [2],\ p < \dim(a) \ \Rightarrow\ \partial_p^k(a) \in A'^c(\mathbb{G})$,
2) $\overline{dim}\ \delta_{\mathbb{G}}(a) = \dim(a)$,
3) $\forall p \in \mathbb{N}, \forall k \in [2],\ p < \dim(a) \ \Rightarrow\ \bar{\partial}_p^k \delta_{\mathbb{G}}(a) = \delta_{\mathbb{G}} \partial_p^k(a)$.

Preuve : On montre (1),(2) et (3) dans une même induction sur $L(a)$.

Corollaire 3.19. : 1) $(A'^c(\mathbb{G}), \dim, (\partial_p^1, \partial_p^0)_{p\in\mathbb{N}})$ est un sous-ensemble globulaire de $\mathcal{A}'^g(\mathbb{G})$.
2) $\forall a \in A'^c(\mathbb{G}),\ \delta_{\mathbb{G}}(a) \in \omega(\mathbb{G})$.

Notations 3.20. : L'ensemble globulaire $(A'^c(\mathbb{G}), \dim, (\partial_p^1, \partial_p^0)_{p\in\mathbb{N}})$ est noté $\mathcal{A}'^c(\mathbb{G})$ ou encore $P(\mathbb{G})$. On note aussi $p_{\mathbb{G}}$ la restriction de $\delta_{\mathbb{G}}$ à $P(\mathbb{G}) \to \omega(\mathbb{G})$.

Remarques 3.21. : $p_{\mathbb{G}}$ a les propriétés suivantes. Soit $a \in A'^c(\mathbb{G})$,
1) - si $a = c(\varnothing),\ p_{\mathbb{G}}(a) = \eta_{\mathbb{G}}(c)$,
- si $a = a_1 \star_p a_0,\ p_{\mathbb{G}}(a) = p_{\mathbb{G}}(a_1) \circ_p p_{\mathbb{G}}(a_0)$,
- si $a = a_1 \square a_0,\ p_{\mathbb{G}}(a) = \imath p_{\mathbb{G}}(a_1) = \imath p_{\mathbb{G}}(a_0)$ (car $p_{\mathbb{G}}(a_1) = p_{\mathbb{G}}(a_0)$).
2) $p_{\mathbb{G}} : P(\mathbb{G}) \to \omega(\mathbb{G})$ est un morphisme d'ensembles globulaires.

Proposition 3.22. : Soit $g : \mathbb{G} \to \mathbb{G}'$ un morphisme d'ensembles globulaires, alors
1) $\forall a \in A'^c(\mathbb{G}),\ \tilde{g}(a) \in A'^c(\mathbb{G}')$,
2) $\forall a \in A'^c(\mathbb{G}),\ p_{\mathbb{G}'}.\tilde{g}(a) = \omega(g).p_{\mathbb{G}}(a)$.

Preuve : Le (1) et le (2) se montrent successivement dans une même induction sur $L(a)$.

Proposition 3.23. : 1) $\forall A \in A'^c\mathcal{A}'^c(\mathbb{G}),\ \mu_{\mathbb{G}}\tilde{\imath}_{\mathbb{G}}(A) \in A'^c(\mathbb{G})$, où
$\imath_{\mathbb{G}} : A'^c(\mathbb{G}) \to A'(\mathbb{G})$ est l'injection canonique. On note
$\mu'_{\mathbb{G}} : A'^c\mathcal{A}'^c(\mathbb{G}) \to A'^c(\mathbb{G})$ la restriction de $\mu_{\mathbb{G}} : A'\mathcal{A}'(\mathbb{G}) \to A'(\mathbb{G})$.
2) $\mu'_{\mathbb{G}} : P^2(\mathbb{G}) \to P(\mathbb{G})$ est un morphisme d'ensembles globulaires.

Preuve : Le (1) résulte du lemme suivant :

Lemme 3.24. : Pour tout $\mathbb{G} \in |\mathbb{G}lob|$, on a la commutation du diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
UP^2(\mathbb{G}) \arrow[r, "\imath_{P(\mathbb{G})}"] \arrow[d, "p_{P(\mathbb{G})}"'] & A'UP(\mathbb{G}) \arrow[r, "\tilde{\imath}_{\mathbb{G}}"] & A'^2U(\mathbb{G}) \arrow[r, "\mu_{U(\mathbb{G})}"] & A'U(\mathbb{G}) \arrow[d, "\delta_{\mathbb{G}}"] \\
\omega P(\mathbb{G}) \arrow[r, "\omega(p_{\mathbb{G}})"'] & \omega^2(\mathbb{G}) \arrow[r, "\mu_{\mathbb{G}}"'] & \omega(\mathbb{G}) \arrow[r, "i"'] & Tot\omega(\mathbb{G})
\end{tikzcd}$$

où $i : \omega(\mathbb{G}) \to Tot\omega(\mathbb{G})$ est l' injection canonique.

Preuve : (du lemme) Par induction sur la longueur des arbres.

Remarques 3.25. : 1) Pour toute flèche $g : \mathbb{G} \to \mathbb{G}'$ de $\mathbb{G}lob$, $\tilde{g} : P(\mathbb{G}) \to P(\mathbb{G}')$ est un morphisme d'ensembles globulaires.
2) L'application $g \mapsto \tilde{g} : P(\mathbb{G}) \to P(\mathbb{G}')$ est fonctorielle. On note P l'endo-foncteur de $\mathbb{G}lob$ obtenu.
3) Dans $\mathbb{G}lob$ les morphismes $p_{\mathbb{G}} : P(\mathbb{G}) \to \omega(\mathbb{G})$ sont naturels en $\mathbb{G}$. On note $p : P \to \omega$ la transformation naturelle obtenue.
4) L'application, encore notée $\eta'_{\mathbb{G}}$, restriction de $\eta'_{\mathbb{G}} : \mathbb{G} \to A'^{g}(\mathbb{G})$ à $\mathbb{G} \to A'^{c}(\mathbb{G})$ est un morphisme d'ensembles globulaires $\mathbb{G} \to P(\mathbb{G})$. Etant naturel en $\mathbb{G}$, on en fait une transformation naturelle $\eta' : Id_{\mathbb{G}lob} \to P$.
5) De même, $\mu'_{\mathbb{G}}$ est naturel en $\mathbb{G}$. On note $\mu' : P^2 \to P$ la transformation naturelle obtenue.

Proposition 3.26. : 1) $\mathbb{P} = (P, \eta', \mu')$ est une sous-monade de $(\mathcal{A}'^{g}, \eta', \mu')$ sur $\mathbb{G}lob$.
2) $p : (P, \eta', \mu') \to (\omega, \eta, \mu)$ est un morphisme de monade.
3) $(\mathbb{G}lob, U, \mathbb{P}, \mathrm{L}')$ est une monade concrète syntaxique, où $\mathrm{L}'_{\mathbb{G}} : UP(\mathbb{G}) \to \mathbb{N}$ est la restriction de $\mathrm{L}'_{\mathbb{G}} : U\mathcal{A}'^{g}(\mathbb{G}) \to \mathbb{N}$.

Preuve : Le (1) résulte de la section 3 de la première partie, le (2) essentiellement du lemme 3.24 et le (3) de la section 1 de la première partie.

Voici encore un résultat utile sur $\mathbb{P}$:

Proposition 3.27. : Soient $m : \mathbb{G}' \to \mathbb{G}$ un morphisme injectif d'ensembles globulaires et $a \in A'^{c}(\mathbb{G})$ tel que $l_{\{G\}}(a) \subset m(G')$. Alors il existe un unique $a' \in A'^{c}(\mathbb{G}')$ tel que $\tilde{m}(a') = a$.

Preuve : Par induction sur $\mathrm{L}(a)$.

Corollaire 3.28. : Soient $m : \mathbb{G}' \to \mathbb{G}$ un morphisme injectif d'ensembles globulaires et $a' \in A'(G')$ tel que $\tilde{m}(a') \in A'^{c}(\mathbb{G})$. Alors $a' \in A'^{c}(\mathbb{G}')$.

3.4 Polarisation

Rappelons que le concept de polarisation a été introduit pour montrer la cartésianité de $\mathbb{P}$. Il aura son pendant dans la section 5.

- Retournons brièvement à la monade ω .

Notation et définition 3.29. : Lorsque $\alpha = (n, a, !_{\Gamma a}) \in \omega(\mathbb{I})$, on note $Pol(\alpha) = (n, a, Id_{\Gamma a}) \in \omega(\Gamma a)$. On dit que c'est la *polarisation de* α *dans* ω.

Proposition 3.30. : Soit $p \in \mathbb{N}$.
1) $\forall k \in [2], \forall \alpha \in \omega(\mathbb{I}),\ p < \dim(\alpha) \ \Rightarrow\ \partial_p^k Pol(\alpha) = \omega(\mathrm{d}_p^k(\underline{\alpha})).Pol(\partial_p^k \alpha)$.
2) $\forall (\alpha_1, \alpha_0) \in \underset{p}{\circledast}\omega(\mathbb{I}) \ \Rightarrow\ Pol(\alpha_1 \circ_p \alpha_0) = \omega(\mathrm{u}^1)Pol(\alpha_1) \circ_p \omega(\mathrm{u}^0)Pol(\alpha_0)$
où on note $\mathrm{u}^k = \mathrm{u}^k_{p(\underline{\alpha}_1, \underline{\alpha}_0)}$.

Preuve : Sans difficulté.

• Revenons maintenant à la monade $\mathbb{P}$. Dorénavant on identifie $P(\mathbb{G})$ et $A'^c(\mathbb{G})$ (qui est son ensemble sous-jacent). De plus, comme en 1.3, notons 0_n, où $n \in \mathbb{N}$, les éléments d'un ensemble globulaire final $\mathbb{I}$ fixé.

Notations et définitions 3.31. : 1) Pour chaque $a \in P(\mathbb{I})$ et $j \in [la]$, on définit $\mathrm{Cell}_j(a) \in \Gamma(\underline{p_{\mathbb{I}}(a)})$ (voir la notation $\underline{\alpha}$ dans 2.29), par induction sur $\mathrm{L}(a)$.
- Si $a = 0_n(\varnothing)$, on a $l(a) = 1$ donc $j = 0$, et $\underline{p_{\mathbb{I}}(a)} = \alpha_n = 1^n(0(\varnothing))$. On pose alors $\mathrm{Cell}_j(a) = g_n^0(n) = g_n^1(n) \in \Gamma(\alpha_n)$ (voir la proposition 2.40).
- Si $a = a_1 \star_p a_0$, alors :
.. si $j < l(a_1)$, on pose $\mathrm{Cell}_j(a) = \mathrm{u}^1\mathrm{Cell}_j(a_1)$, où $\mathrm{u}^k = \mathrm{u}^k_{p(\underline{p_{\mathbb{I}}(a_1)}, \underline{p_{\mathbb{I}}(a_0)})}$,
.. si $l(a_1) < j \leq l(a)$, on pose $\mathrm{Cell}_j(a) = \mathrm{u}^0\mathrm{Cell}_{j-la_1}(a_0)$.
- Si $a = a_1 \Box a_0$, alors :
.. si $j < l(a_1)$, on pose $\mathrm{Cell}_j(a) = \mathrm{Cell}_j(a_1)$,
.. si $l(a_1) < j \leq l(a)$, on pose $\mathrm{Cell}_j(a) = \mathrm{Cell}_{j-la_1}(a_0)$.

2) On note ensuite $\mathrm{Cell}(a) = (\mathrm{Cell}_0(a), ..., \mathrm{Cell}_{n-1}(a))$, où $n = l(a)$.

Proposition 3.32. : $\forall a \in P(\mathbb{I}), \forall j \in [la],\ \dim \mathrm{Cell}_j(a) = \dim(c_j)$, où $(c_0, ..., c_{n-1}) = l_{\mathbb{I}}(a)$.

Preuve : Par induction sur $\mathrm{L}(a)$.

Notation 3.33. : Soit $a \in P(\mathbb{I})$. On peut maintenant noter :

$$\mathcal{P}ol(a) = a\{\mathrm{Cell}(a)\}$$

(voir la notation $a\{-\}$ au 1.12). $\mathcal{P}ol(a)$ est appelée la *polarisation* de a dans $\mathbb{P}$.

Proposition 3.34. : $\forall a \in P(\mathbb{I}), \forall p \in \mathbb{N}, \forall k \in [2]$,
$p < \dim(a) \;\Rightarrow\; \partial_p^k \mathcal{P}ol(a) = \mathrm{d}_p^k \widetilde{(\underline{p_{\mathbb{I}}a})} \mathcal{P}ol(\partial_p^k a)$.

Preuve : Faisons le par induction sur $\mathrm{L}(a)$. Posons $n = \dim(a)$.
- Si $a = 0_n(\varnothing)$, on voit que $\mathrm{d}_p^k \widetilde{(\underline{p_{\mathbb{I}}a})} \mathcal{P}ol(\partial_p^k a) = g_p^k(n)(\varnothing) = \partial_p^k \mathcal{P}ol(a)$.
- Si $a = a_1 \star_q a_0$, alors $\mathcal{P}ol(a) = \tilde{\mathrm{u}}^1 \mathcal{P}ol(a_1) \star_q \tilde{\mathrm{u}}^0 \mathcal{P}ol(a_0)$.
.. Si $p \le q$, on a $\partial_p^k \mathcal{P}ol(a) = \tilde{\mathrm{u}}^k \partial_p^k \mathcal{P}ol(a_k) = \tilde{\mathrm{u}}^k . \mathrm{d}_p^k \widetilde{(\underline{p_{\mathbb{I}}a_k})} \mathcal{P}ol(\partial_p^k a_k) \underset{*1}{=}$
$\mathrm{d}_p^k \widetilde{(\underline{p_{\mathbb{I}}a})} \mathcal{P}ol(\partial_p^k a)$.
$(*1)$ En utilisant la proposition 2.24.
.. Si $p > q$, on a $\partial_p^k \mathcal{P}ol(a) = \tilde{\mathrm{u}}^1 \partial_p^k \mathcal{P}ol(a_1) \star_q \tilde{\mathrm{u}}^0 \partial_p^k \mathcal{P}ol(a_0) =$
$\tilde{\mathrm{u}}^1 \mathrm{d}_p^k \widetilde{(\underline{p_{\mathbb{I}}a_1})} \mathcal{P}ol(\partial_p^k a_1) \star_q \tilde{\mathrm{u}}^0 \mathrm{d}_p^k \widetilde{(\underline{p_{\mathbb{I}}a_0})} \mathcal{P}ol(\partial_p^k a_0) \underset{*1}{=}$
$\mathrm{d}_p^k \widetilde{(\underline{p_{\mathbb{I}}a})} (\tilde{\mathrm{u}}_p^1 \mathcal{P}ol(\partial_p^k a_1) \star_q \tilde{\mathrm{u}}_p^0 \mathcal{P}ol(\partial_p^k a_0)) = \mathrm{d}_p^k \widetilde{(\underline{p_{\mathbb{I}}a})} \mathcal{P}ol(\partial_p^k a)$.
- Si $a = a_1 \Box a_0$, alors $\mathcal{P}ol(a) = \mathcal{P}ol(a_1) \Box \mathcal{P}ol(a_0)$ et $p \le n-1$.
.. Si $p = n-1$, $\mathrm{d}_p^k (\underline{p_{\mathbb{I}}a}) = Id$, d'où la formule voulue.
.. Si $p < n-1$, $\partial_p^k \mathcal{P}ol(a) = \partial_p^k \mathcal{P}ol(a_k) = \mathrm{d}_p^k \widetilde{(\underline{p_{\mathbb{I}}a_k})} \mathcal{P}ol(\partial_p^k a_k) =$
$\mathrm{d}_p^k \widetilde{(\underline{p_{\mathbb{I}}a})} \mathcal{P}ol(\partial_p^k a)$.

Proposition 3.35. : Soit $a \in P(\mathbb{I})$. Notons brièvement $\Gamma a = \Gamma(\underline{p_{\mathbb{I}}a})$. Alors $\mathcal{P}ol(a) \in P\Gamma a$ et $p_{\Gamma a} \mathcal{P}ol(a) = Pol p_{\mathbb{I}}(a)$.

Preuve : Par induction sur $\mathrm{L}(a)$.
- Si $a = 0_n(\varnothing)$, alors $\mathcal{P}ol(a) = g_n^{\varepsilon}(n)(\varnothing) \in P\Gamma a$. On a aussi l'identité voulue.
- Si $a = a_1 \star_p a_0$, $\mathcal{P}ol(a) = \tilde{\mathrm{u}}^1 \mathcal{P}ol(a_1) \star_p \tilde{\mathrm{u}}^0 \mathcal{P}ol(a_0)$, où $\forall k \in [2]$,
$\tilde{\mathrm{u}}^k \mathcal{P}ol(a_k) \in P\Gamma a$, $\dim \tilde{\mathrm{u}}^k \mathcal{P}ol(a_k) = \dim \mathcal{P}ol(a)$ et $\partial_p^0 \tilde{\mathrm{u}}^1 \mathcal{P}ol(a_1) \underset{*1}{=}$
$\tilde{\mathrm{u}}^1 \mathrm{d}_p^0 \widetilde{(\underline{p_{\mathbb{I}}a_1})} \mathcal{P}ol(\partial_p^0 a_1) \underset{*2}{=} \tilde{\mathrm{u}}^0 \mathrm{d}_p^1 \widetilde{(\underline{p_{\mathbb{I}}a_0})} \mathcal{P}ol(\partial_p^1 a_0) \underset{*1}{=} \partial_p^1 \tilde{\mathrm{u}}^0 \mathcal{P}ol(a_0)$.
$(*1)$ Grâce à la proposition précédente, $(*2)$ voir la proposition 2.23.

On en déduit que $\mathcal{P}ol(a) \in P\Gamma a$ et $p_{\Gamma a} \mathcal{P}ol(a) =$
$p_{\Gamma a} \tilde{\mathrm{u}}^1 \mathcal{P}ol(a_1) \circ_p p_{\Gamma a} \tilde{\mathrm{u}}^0 \mathcal{P}ol(a_0) = \omega(\mathrm{u}^1) p_{\Gamma a_1} \mathcal{P}ol(a_1) \circ_p \omega(\mathrm{u}^0) p_{\Gamma a_0} \mathcal{P}ol(a_0) =$
$\omega(\mathrm{u}^1) Pol p_{\mathbb{I}}(a_1) \circ_p \omega(\mathrm{u}^0) Pol p_{\mathbb{I}}(a_0) = Pol(p_{\mathbb{I}}(a_1) \circ_p p_{\mathbb{I}}(a_0)) = Pol p_{\mathbb{I}}(a)$.
- Si $a = a_1 \Box a_0$, $\mathcal{P}ol(a) = \mathcal{P}ol(a_1) \Box \mathcal{P}ol(a_0)$, où $\forall k \in [2]$,
$\mathcal{P}ol(a_k) \in P\Gamma a_k = P\Gamma a$, $\mathcal{P}ol(a_1) // \mathcal{P}ol(a_0)$ et
$p_{\Gamma a_1} \mathcal{P}ol(a_1) \underset{*3}{=} Pol p_{\mathbb{I}}(a_1) \overset{*1}{=} Pol p_{\mathbb{I}}(a_0) \underset{*3}{=} p_{\Gamma a_0} \mathcal{P}ol(a_0)$.
$(*3)$ par hypothèse d'induction.

On en déduit que $\mathcal{P}ol(a) \in P\Gamma a$. De plus
$p_{\Gamma a}\mathcal{P}ol(a) = \imath\, p_{\Gamma a_0}\mathcal{P}ol(a_0) = \imath\, Polp_{\mathbb{I}}(a_0) = Polp_{\mathbb{I}}(a)$.

Proposition 3.36. : Soit $a \in P(\mathbb{G})$. Ecrivons $p_{\mathbb{G}}(a) = (n, \alpha, g)$. Alors on a :

$$Mo(g)(\text{Cell}(|a|)) = l_G(a).$$

Preuve : Cela revient à montrer que si $l_G(a) = (c_0, ..., c_{n-1})$, on a $\forall j \in [m],\ g(\text{Cell}_j(|a|)) = c_j$. On l'obtient par induction sur $\text{L}(a)$.

Proposition 3.37. : La transformation naturelle $p : P \to \omega$ est cartésienne.

Preuve : Il suffit de le montrer pour les flèches de la forme $!_{\mathbb{G}} : \mathbb{G} \to \mathbb{I}$. Notons $\gamma : P(\mathbb{G}) \to \omega(\mathbb{G}) \underset{\omega(\mathbb{I})}{\times} P(\mathbb{I})$ le morphisme canonique. Montrons qu'il est bijectif.
surjectivité : Soit $(\alpha, a) \in \omega(\mathbb{G}) \underset{\omega(\mathbb{I})}{\times} P(\mathbb{I})$, où $\alpha = (n, \underline{\alpha}, g)$. On pose $\bar{a} = \tilde{g}\mathcal{P}ol(a)$. On vérifie que $\bar{a} \in P(\mathbb{G})$ et que $\gamma(\bar{a}) = (\alpha, a)$.
injectivité : Soit $a \in P(\mathbb{G})$. Posons $p_{\mathbb{G}}(a) = \alpha = (n, \underline{\alpha}, g)$. Alors $\gamma(a) = (\alpha, |a|)$ et donc $a = |a|\{l_{\mathbb{G}}(a)\} \underset{*}{=} |a|\{Mo(g)(\text{Cell}|a|)\} = \tilde{g}|a|\{\text{Cell}|a|\} = \tilde{g}\mathcal{P}ol(|a|) = |\bar{a}|$.
$(*)$ voir la proposition précédente.
D'où l'injectivité de γ.

Théorème 3.38. (voir [3]) : $\mathbb{P} = (P, \eta', \mu')$ est une monade cartésienne.

Preuve : : Car $p : \mathbb{P} \to \omega$ est un morphisme de monades cartésien et ω est cartésienne.

Remarque 3.39. Maintenant que nous avons montré que $p : P \to \omega$ était cartésien, on voit que, pour tout $a \in P(\mathbb{I})$, $\mathcal{P}ol(a) \in P\Gamma(a)$ est complètement caractérisé par les deux identités suivantes :

$$|\mathcal{P}ol(a)| = a \quad \text{et} \quad p_{\Gamma a}\mathcal{P}ol(a) = Polp_{\mathbb{I}}(a).$$

(Pour Γa voir la notation 3.35).

Proposition 3.40. : $\mathbb{P} = (\mathbb{G}lob, U, \mathbb{P}, \text{L}')$, qui est une monade syntaxique cartésienne, n'est pas pure.

__Preuve__ : Soient $u_d = (0_1(\varnothing) \star_0 \mathrm{I}0_0(\varnothing))\square 0_1(\varnothing)$ et $u_g = (\mathrm{I}0_0(\varnothing) \star_0 0_1(\varnothing))\square 0_1(\varnothing)$ où, rappelons le, par définition $\mathrm{I}(a) = a\square a$. Clairement $u_d, u_g \in P(\mathbb{I})$, $\dim(u_d) = \dim(u_g) = 2$ et $\overline{\dim}(u_d) = (1,0,0,1)$, $\overline{\dim}(u_g) = (0,0,1,1)$. Pour chaque $\mathbb{G} \in |\mathbb{G}lob|$ et chaque $a \in P(\mathbb{G})$ tel que $\dim(a) = 1$, notons $u_d(a) = \mathrm{Op}(u_d, (a, \partial_0^0 a, \partial_0^0 a, a))$ et $u_g(a) = \mathrm{Op}(u_g, (\partial_0^1 a, \partial_0^1 a, a, a))$. On vérifie que $u_d(a), u_g(a) \in P(\mathbb{G})$ et que, si $a \in P(\mathbb{I})$, on a $u_d \underset{\mathbb{P}}{\leq} u_d(a)$ et $u_g \underset{\mathbb{P}}{\leq} u_g(a)$, où $\underset{\mathbb{P}}{\leq}$ est la relation d'antériorité pour $\mathbb{P}$. On voit aussi que u_d et u_g sont primitifs pour $\mathbb{P}$. Pourtant, lorsque $a = \mathrm{I}0_0(\varnothing)$, on a $u_d(a) = u_g(a)$. Mais $u_d \neq u_g$ et $\mathrm{L}(u_d) = \mathrm{L}(u_g) > 1$, ce qui prouve que $\mathbb{P}$ n'est pas pure.

4. La monade $\mathbb{B}$

Introduction : A partir de la monade $\mathbb{P}$ et des arbres feuillus on construit la monade $\mathbb{B}$. On donne ici les différentes étapes qui aboutissent à sa construction. La monade concrète $\mathbb{B}$ est syntaxique. Sa cartésianité et sa pureté demandant plus de technicité seront montrées dans la prochaine section.

4.1 Le morphisme π

On se place maintenant dans un cas particulier des conventions 1.21.

Conventions 4.1. : On fixe, cette fois, le langage $(S_{\mathbb{B}}, ar)$ donné par :

$$S_{\mathbb{B}} = \{\star_p / p \in \mathbb{N}\} \cup \{\Delta, \square\}.$$

où $ar(\star_p) = ar(\square) = 2$ et $ar(\Delta) = 1$. On lui donne :
- une structure chargée, en considérant l'application $ch : S_{\mathbb{B}} \to \mathbb{N}$ définie par :

$$ch(\star_p) = 0,\ ch(\Delta) = -1,\ ch(\square) = +1.$$

- une structure relativement dimensionnelle, en considérant $\delta(\star_p), \delta(\square) : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ définies par :
$\delta(\star_p)(x,y) = \sup(p+1, x, y)$ et $\delta(\square)(x,y) = 1 + \sup(x,y)$ mais aussi $\delta(\Delta) = Id_{\mathbb{N}} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

Pour chaque $C \in |\mathbb{E}ns|$ on note $A(C) = \mathbb{A}rb(S_{\mathbb{B}}(C), ar)$ et $A^f(C)$ l'ensemble des $a \in A(C)$ qui sont feuillus pour $(S_{\mathbb{B}}(C), ar, ch)$.

Remarques 4.2. : 1) Les restrictions de ar et δ à $S_{\mathbb{P}} \subset S_{\mathbb{B}}$ correspondent à leurs homologues de 3.1.
2) Comme pour le langage $(S_{\mathbb{P}}(C), ar, \delta)$ le langage relativement dimensionnel $(S_{\mathbb{B}}(C), ar, \delta)$ est croissant (voir la première partie, section 2).

Notation 4.3. : On construit maintenant, pour tout $C \in |\mathbb{E}ns|$, une application $\pi_C : A(C) \to A'(C)$ par induction sur la longueur des arbres. Soit $a \in A(C)$.
- Si $a = c(\varnothing)$, où $c \in C$, on pose $\pi_C(a) = a$.
- Si $a = \Delta(a')$, on pose $\pi_C(a) = \pi_C(a')$.
- Si $a = a_1 \star_p a_0$, on pose $\pi_C(a) = \pi_C(a_1) \star_p \pi_C(a_0)$.
- Si $a = a_1 \square a_0$, on pose $\pi_C(a) = \pi_C(a_1) \square \pi_C(a_0)$.

Remarque 4.4. : Clairement $A'(C) \subset A(C)$ et la restriction de π_C à $A'(C)$ est l'identité.

Proposition 4.5. : Soit $C \in |\mathbb{E}ns|$. Alors :
1) $\forall a \in A(C),\ l\pi_C(a) = l(a)$,
2) $\forall a \in A(C),\ l_C\pi_C(a) = l_C(a)$,
3) π_C est naturel en C (Notons $\pi : A \to A'$ la transformation naturelle obtenue).

<u>*Preuve*</u> : Sans difficulté.

Proposition 4.6. : Soient $C \in |\mathbb{E}ns|$, $\alpha \in A(1)$ et $n = l(\alpha)$.
1) Soit aussi $(a_0, ..., a_{n-1}) \in A(C)^n$. Alors :

$$\pi_C \mathrm{op}(\alpha, (a_0, ..., a_{n-1})) = \mathrm{op}(\pi_1(\alpha), (\pi_C a_0, ..., \pi_C a_{n-1}).$$

2) Soit encore $(c_0, ..., c_{n-1}) \in C^n$. Alors :

$$\pi_C(\alpha[c_0, ..., c_{n-1}]) = \pi_1(\alpha)[c_0, ..., c_{n-1}].$$

<u>*Preuve*</u> : Par induction sur $\mathrm{L}(\alpha)$.

Proposition 4.7. : $\pi : (A, \eta, \mu) \to (A', \eta, \mu)$ est un morphisme de monade.

Preuve : Pour l'identité $\pi.\mu = \mu.\pi^2$, on utilise la proposition précédente.

Proposition 4.8. : Soient maintenant $(C, dim) \in |\mathbb{E}ns/\mathbb{N}|$ et $a \in A(C)$, alors :
1) $\forall a \in A(C),\ \underline{\dim}\pi_C(a) = \underline{\dim}(a)$,
2) $\forall a \in A(C),\ \overline{\dim}\pi_C(a) = \overline{\dim}(a)$.

Preuve : Sans difficulté.

Notations 4.9. : Notons $\mathcal{A}$ (resp. $\mathcal{A}'$) l'endo-foncteur de $\mathbb{E}ns/\mathbb{N}$ défini sur les objets par $\mathcal{A}(C, dim) = (A(C), \mathrm{dim})$
(resp. $\mathcal{A}'(C, dim) = (A'(C), \mathrm{dim})$) et sur les flèches $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}'$,
$\mathcal{A}(f) = \tilde{f} : \mathcal{A}(\mathbb{C}) \to \mathcal{A}(\mathbb{C}')$ (même chose pour $\mathcal{A}'$).
La proposition précédente montre que $\forall \mathbb{C} = (C, dim) \in |\mathbb{E}ns/\mathbb{N}|$,
$\pi_C : \mathcal{A}(\mathbb{C}) \to \mathcal{A}'(\mathbb{C})$ est un morphisme de $\mathbb{E}ns/\mathbb{N}$ (noté $\pi_{\mathbb{C}}$). Etant naturel en $\mathbb{C}$, on en fait une transformation naturelle notée $\pi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$.

Proposition 4.10. : Soit $\mathbb{C} = (C, dim) \in |\mathbb{E}ns/\mathbb{N}|$, $\alpha \in AU(\mathbb{I})$ et $n = l(\alpha)$.
1) Soit aussi $(a_0, ..., a_{n-1}) \in A(C)^n$ tel que
$\underline{\dim}(\alpha) = (\dim\, a_0, ..., \dim\, a_{n-1})$. Alors :

$$\pi_C \mathrm{Op}(\alpha, (a_0, ..., a_{n-1})) = \mathrm{Op}(\pi_{\mathbb{I}}(\alpha), (\pi_{\mathbb{C}} a_0, ..., \pi_{\mathbb{C}} a_{n-1}).$$

2) Soit encore $(c_0, ..., c_{n-1}) \in C^n$ tel que $\overline{\dim}(\alpha) = (\dim\, c_0, ..., \dim\, c_{n-1})$. Alors :

$$\pi_{\mathbb{C}}(\alpha\{c_0, ..., c_{n-1}\}) = \pi_{\mathbb{I}}(\alpha)\{c_0, ..., c_{n-1}\}.$$

Preuve : Résulte de la proposition 4.6.

Proposition 4.11. : $\pi : (\mathcal{A}, \eta, \mu) \to (\mathcal{A}', \eta, \mu)$ est un morphisme de monade.

Preuve : Sans difficulté.

Proposition 4.12. : Soient $a, b \in A^f U(\mathbb{I})$. Alors $\pi_{\mathbb{I}}(a \odot b) = \pi_{\mathbb{I}}(a) \Box \pi_{\mathbb{I}}(b)$ (pour la définition de $a \odot b$ voir notation 1.27).

Preuve : Résulte de la proposition 4.6.

4.2 Les arbres $\partial^k(a)$

Notations 4.13. : Soient $\mathbb{C} \in |\mathbb{E}ns/\mathbb{N}|$ et $a \in A^f U(\mathbb{C})$ tel que $\mathrm{sym}(a) = \square$. Ecrivons sa décomposition canonique (relativement dimensionnelle) $a = \mathrm{Op}(\alpha, (a_0, ..., a_{n-1}))$ (voir définition 1.26). Comme α est irréductible et que $\mathrm{sym}(\alpha) = \square$, il s'écrit $\alpha = \alpha_1 \odot \alpha_0$, où $\alpha_1, \alpha_0 \in A^f U(\mathbb{I})$. Posons $p = l(\alpha_1)$, $n = l(\alpha)$ (donc $l(\alpha_0) = n - p$). Comme $\overline{\dim}(\alpha_1) = (\dim a_0, ..., \dim a_{p-1})$ et $\overline{\dim}(\alpha_0) = (\dim a_p, ..., \dim a_{n-1}$) (voir proposition 1.28), on peut poser :

$$\partial^1(a) = \mathrm{Op}(\alpha_1, (a_0, ..., a_{p-1})) \quad \text{et} \quad \partial^0(a) = \mathrm{Op}(\alpha_0, (a_p, ..., a_{n-1})).$$

Remarque 4.14. : Lorsque $\mathbb{C} = \mathbb{I}$ et a est irréductible alors $\forall k \in [2]$, $\partial^k(a) = \alpha_k$ (et $a = \alpha$).

Proposition 4.15. : 1) $\partial^1(a), \partial^0(a) \in A^f U(\mathbb{C})$.
2) Pour tout $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}'$ dans $\mathbb{E}ns/\mathbb{N}$, $\tilde{f}(\partial^k a) = \partial^k \tilde{f}(a)$.

Preuve : Sans difficulté.

Proposition 4.16. : Comme $\mathrm{sym}(a) = \mathrm{sym}(\alpha) = \square$, on peut écrire $a = b_1 \square b_0$ et $\alpha = \beta_1 \square \beta_0$, où $b_1, b_0 \in AU(\mathbb{C})$ et $\beta_1, \beta_0 \in AU(\mathbb{I})$. Alors : $b_1 = \mathrm{Op}(\beta_1, (a_0, ..., a_{p-1}))$ et $b_0 = \mathrm{Op}(\beta_0, (a_p, ..., a_{n-1}))$.

Preuve : Notons $b'_1 = \mathrm{Op}(\beta_1, (a_0, ..., a_{p-1}))$ et $b'_0 = \mathrm{Op}(\beta_0, (a_p, ..., a_{n-1}))$.On montre que $\forall k \in [2]$, $|b_k| = |b'_k|$ et $l_C(b_k) = l_C(b'_k)$. D'où les égalités $b_k = b'_k$.

Corollaire 4.17. : Sous les mêmes hypothèses et notations, soit $k \in [2]$. Alors :
1) $l(\partial^k a) = l(b_k)$,
2) $l_{U\mathbb{C}}(\partial^k a) = l_{U\mathbb{C}}(b_k)$,
3) $\mathrm{L}(\partial^k a) = \mathrm{L}(b_k) - l(\alpha_k)$.

Preuve : Sans difficulté.

Remarque 4.18. : $\forall k \in [2]$, $\mathrm{L}(\partial^k a) < \mathrm{L}(a)$.

Proposition 4.19. : Soit $a \in A^f U(\mathbb{C})$ tel que $\mathrm{sym}(a) = \square$. On pose $n = l(a)$ Soient aussi $(b_0, ..., b_{n-1}) \in A^f U(\mathbb{C})^n$ tel que $(\dim b_0, ..., \dim b_{n-1}) = \overline{\dim}(a)$. Posons enfin $\hat{a} = \mathrm{Op}(a, (b_0, ..., b_{n-1}))$ et $p = l(\partial^1 a)$. Alors :
$\partial^1(\hat{a}) = \mathrm{Op}(\partial^1 a, (b_0, ..., b_{p-1}))$ et $\partial^0(\hat{a}) = \mathrm{Op}(\partial^0 a, (b_p, ..., b_{n-1}))$.

Preuve : On pose $a^1 = \mathrm{Op}(\partial^1 a, (b_0, ..., b_{p-1}))$ et $a^0 = \mathrm{Op}(\partial^0 a, (b_p, ..., b_{n-1}))$ et on montre que $\forall k \in [2],\ |a^k| = |\partial^k(\hat{a})|$ et $l_{U\mathbb{C}}(a^k) = l_{U\mathbb{C}}(\partial^k \hat{a})$. Donc $a^k = \partial^k(\hat{a})$.

Corollaire 4.20. : Soient $\alpha \in A^f U(\mathbb{I})$ tel que $\mathrm{sym}(\alpha) = \square,\ n = l(\alpha)$. Soient aussi $(c_0, ..., c_{n-1}) \in U(\mathbb{C})^n$ tel que $\overline{\dim}(\alpha) = (\dim c_0, ..., \dim c_{n-1})$. Posons $a = \alpha\{c_0, ..., c_{n-1}\}$. Alors $\partial^1(a) = \partial^1(\alpha)\{c_0, ..., c_{p-1}\}$ et $\partial^0(a) = \partial^0(\alpha)\{c_p, ..., c_{n-1}\}$ où $p = l(\partial^1 \alpha)$.

Preuve : Sans difficulté.

Proposition 4.21. : Soit $a \in A^f U(\mathbb{C})$ tel que $a = a_1 \square a_0$. Alors :

$$\forall k \in [2],\ \pi_{\mathbb{C}} \partial^k(a) = \pi_{\mathbb{C}}(a_k).$$

Preuve : Résulte des propositions 4.6,4.12 et 4.16.

Proposition 4.22. : Soit $A \in A^{f2} U(\mathbb{C})$ tel que $\mathrm{sym}(A) = \square$. Alors :

$$\forall k \in [2],\ \mu'_{U\mathbb{C}}(\partial^k A) = \partial^k \mu'_{U\mathbb{C}}(A).$$

Preuve : On utilise la proposition 1.20.

4.3 Domaine et co-domaine d'un arbre feuillu

Notations et définitions 4.23. : Pour chaque $p \in \mathbb{N}$, posons $i_p = 0_p(\varnothing) \odot 0_p(\varnothing)$. On a $i_p \in A^f U(\mathbb{I})$ et $\dim i_p = p + 1$. Soit maintenant $\mathbb{C}$ dans $|\mathbb{E}ns/\mathbb{N}|$ et $a \in A^f U(\mathbb{C})$ tel que $\dim(a) = p$. Alors $\overline{\dim}(i_p) = (\dim(a), \dim(a))$ et donc, on peut poser $\mathrm{I}(a) = \mathrm{Op}(i_p, (a, a))$. On a $\mathrm{I}(a) \in A^f U(\mathbb{C})$ et $\dim \mathrm{I}(a) = p + 1$. On définit ensuite $\mathrm{I}^n(a)$ par induction sur n, en posant $\mathrm{I}^0(a) = a$ et $\mathrm{I}^{n+1}(a) = \mathrm{I}(\mathrm{I}^n(a))$. Alors $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathrm{I}^n(a) \in A^f U(\mathbb{C})$ et $\dim \mathrm{I}^n(a) = n + p$.

Proposition 4.24. : Soit $a \in A^f U(\mathbb{C})$, alors $\forall k \in [2],\ \partial^k \mathrm{I}(a) = a$.

<u>Preuve</u> : Sans difficulté.

Notations et définitions 4.25. : Soient maintenant $\mathbb{G} \in |\mathbb{G}lob|,\ p \in \mathbb{N}$ et $k \in [2]$. Pour chaque $a \in A^f U(\mathbb{G})$ on construit $\partial_p^k(a)$ de la façon suivante :
Notons $n = \dim(a)$.
- Si $n \leq p$, on pose $\partial_p^k(a) = \mathrm{I}^{p-n}(a)$.
- Si $n > p$, on définit $\partial_p^k(a)$ par induction sur $\mathrm{L}(a)$.
.. Si $a = c(\varnothing)$, où $c \in U(\mathbb{G})$, on pose $\partial_p^k(a) = \partial_p^k(c)(\varnothing)$.
.. Si $a = a_1 \star_q a_0$, alors :
... si $p \leq q,\ \partial_p^k(a) = \partial_p^k(a_k)$,
... si $p > q,\ \partial_p^k(a) = \partial_p^k(a_1) \star_q \partial_p^k(a_0)$.
.. Si $\mathrm{sym}(a) = \square$, alors $\partial_p^k(a) = \partial_p^k \partial^k(a)$.

Proposition 4.26. : Soient $\mathbb{G} \in |\mathbb{G}lob|$ et $a \in A^f U(\mathbb{G}),\ k \in [2]$ et $p \in \mathbb{N}$.
1)a) Pour tout $k \in [2]$ et $p \in \mathbb{N},\ \partial_p^k(a) \in A^f U(\mathbb{G})$,
b) $\dim \partial_p^k(a) = p$.
2) Soient $g : \mathbb{G} \to \mathbb{G}'$ un morphisme d'ensembles globulaires, alors :
a) $\tilde{g}(\mathrm{I}(a)) = \mathrm{I}\tilde{g}(a)$,
b) $\forall p \in \mathbb{N},\ \forall k \in [2],\ \tilde{g}\partial_p^k(a) = \partial_p^k \tilde{g}(a)$.
3)a) $\pi_{U\mathbb{G}}\mathrm{I}(a) = \mathrm{I}\pi_{U\mathbb{G}}(a)$,
b) $\forall p \in \mathbb{N}, \forall k \in [2],\ \pi_{U\mathbb{G}}\partial_p^k(a) = \partial_p^k \pi_{U\mathbb{G}}(a)$.
4) Soit $A \in A^{f2}U(\mathbb{G})$. Alors :
a) $\mu_{U\mathbb{G}}\mathrm{I}(A) = \mathrm{I}\mu_{U\mathbb{G}}(A)$,
b) $\forall p \in \mathbb{N}, \forall k \in [2],\ \mu_{U\mathbb{G}}\partial_p^k(A) = \partial_p^k \mu_{U\mathbb{G}}(A)$.

<u>Preuve</u> : Essentiellement, par induction sur la longueur des arbres.

4.4 Les monades $\mathcal{A}^g$ et $\mathcal{A}^c$

Notations et définitions 4.27. : Soit $\mathbb{G} \in |\mathbb{G}lob|$. On construit les parties $A^g(\mathbb{G})$ et $A^c(\mathbb{G})$ de $A^f U(\mathbb{G})$ par induction sur la longueur des arbres. Soit $a \in A^f U(\mathbb{G})$. On pose $n = \dim(a)$.
- Si $a = c(\varnothing)$, où $c \in U(\mathbb{G})$, alors $a \in A^g(\mathbb{G})$ et $a \in A^c(\mathbb{G})$.
- Si $a = a_1 \star_p a_0$ (dans ce cas $p < n$), alors $a \in A^g(\mathbb{G})$ (resp. $a \in A^c(\mathbb{G})$),

ssi $a_1, a_0 \in A^g(\mathbb{G})$ (resp. $a_1, a_0 \in A^c(\mathbb{G})$), $\forall k \in [2]$, $\dim(a_k) = n$ et $\partial_p^0(a_1) = \partial_p^1(a_0)$.
- Si $\mathrm{sym}(a) = \square$, alors $a \in A^g(\mathbb{G})$ (resp. $a \in A^c(\mathbb{G})$) ssi
$\partial^1(a), \partial^0(a) \in A^g(\mathbb{G})$ (resp. $\partial^1(a), \partial^0(a) \in A^c(\mathbb{G})$), $\partial^1(a)//\partial^0(a)$ et, pour l'appartenance à $A^c(\mathbb{G})$, $\pi_{U\mathbb{G}}(a) \in P(\mathbb{G})$.

Remarque 4.28. : Clairement on a $A^c(\mathbb{G}) \subset A^g(\mathbb{G})$.

Proposition 4.29. : 1) $\forall a \in A^g(\mathbb{G})$ (resp. $a \in A^c(\mathbb{G})$), $\mathrm{I}(a) \in A^g(\mathbb{G})$ (resp. $\mathrm{I}(a) \in A^c(\mathbb{G})$).
2) $\forall p \in \mathbb{N}, \forall k \in [2], \forall a \in A^g(\mathbb{G})$ (resp. $a \in A^c(\mathbb{G})$),
$p \leq \dim(a) \;\Rightarrow \partial_p^k(a) \in A^g(\mathbb{G})$ (resp. $\in A^c(\mathbb{G})$).
3) $\forall p, p' \in \mathbb{N}, \forall k, k' \in [2], \forall a \in A^g(\mathbb{G})$,
$p < p' < \dim(a) \;\Rightarrow\; \partial_p^k \partial_{p'}^{k'}(a) = \partial_p^k(a)$.

Preuve : Le (1) est immédiat. Pour le (2) et le (3), par induction sur $\mathrm{L}(a)$.

Corollaire 4.30. : $(A^g(\mathbb{G}), \dim, (\partial_p^1, \partial_p^0)_{p\in\mathbb{N}})$ est un ensemble globulaire, noté $\mathcal{A}^g(\mathbb{G})$, et $(A^c(\mathbb{G}), \dim, (\partial_p^1, \partial_p^0)_{p\in\mathbb{N}})$ est un sous-ensemble globulaire de $\mathcal{A}^g(\mathbb{G})$, noté $\mathcal{A}^c(\mathbb{G})$.

Proposition 4.31. : Soit $g : \mathbb{G} \to \mathbb{G}'$ une flèche de $\mathbb{G}lob$. Alors :
1) $\forall a \in A^g(\mathbb{G})$ (resp. $a \in A^c(\mathbb{G})$), $\tilde{g}(a) \in A^g(\mathbb{G}')$ (resp. $\in A^c(\mathbb{G}')$),
2) Les restrictions de $\tilde{g}$ à $\mathcal{A}^g(\mathbb{G}) \to \mathcal{A}^g(\mathbb{G}')$ et à $\mathcal{A}^c(\mathbb{G}) \to \mathcal{A}^c(\mathbb{G}')$ sont des morphismes d'ensembles globulaires.

Preuve : Pour le (1), par induction sur $\mathrm{L}(a)$. Le (2) est immédiat.

Proposition 4.32. : 1) Soit $a \in A^f U(\mathbb{G})$. Alors on a les implications suivantes :
a) $a \in A^g(\mathbb{G}) \;\Rightarrow\; \pi_{U\mathbb{G}}(a) \in A'^g(\mathbb{G})$,
b) $a \in A^c(\mathbb{G}) \;\Rightarrow\; \pi_{U\mathbb{G}}(a) \in A'^c(\mathbb{G})$.
2) Les restrictions de $\pi_{U\mathbb{G}}$ à $\mathcal{A}^g(\mathbb{G}) \to \mathcal{A}'^g(\mathbb{G})$ et à $\mathcal{A}^c(\mathbb{G}) \to P(\mathbb{G})$ sont des morphismes d'ensembles globulaires. On note chacun d'eux $\pi_{\mathbb{G}}$.

Preuve : Pour le (1), par induction sur $\mathrm{L}(a)$.

Proposition 4.33. : Soit $m : \mathbb{G}' \to \mathbb{G}$ un morphisme injectif d'ensembles globulaires.
1) Si $a' \in AU(\mathbb{G}')$ est tel que $\tilde{m}(a') \in A^g(\mathbb{G})$ (resp. $\in A^c(\mathbb{G})$) alors $a' \in A^g(\mathbb{G}')$ (resp.$\in A^c(\mathbb{G}')$).
2)Si $a \in A^g(\mathbb{G})$ (resp. $\in A^c(\mathbb{G})$) est tel que $l_{\{U\mathbb{G}\}}(a) \subset m(U\mathbb{G}')$, alors il existe un unique $a' \in A^g(\mathbb{G}')$ (resp.$\in A^c(\mathbb{G}')$) tel que $\tilde{m}(a') = a$.

Preuve : Pour le (1) par induction sur $\mathrm{L}(a)$. Le (2) résulte du (1).

Proposition 4.34. : Soit $a \in A^g(\mathbb{G})$. Alors, pour tout $k \in [2]$ et $p \in \mathbb{N}$ tel que $p < \dim(a)$, on a :

$$\mathrm{L}\partial_p^k(a) \leq \mathrm{L}(a).$$

Preuve : Par induction sur $\mathrm{L}(a)$.

Proposition 4.35. : 1) $\forall A \in U\mathcal{A}^{g2}(\mathbb{G})$ (resp. $\in U\mathcal{A}^{c2}(\mathbb{G})$),
$\mu'_{U\mathbb{G}}\tilde{\imath}_{\mathbb{G}}(A) \in A^g(\mathbb{G})$ (resp. $\in A^c(\mathbb{G})$) où $\imath_{\mathbb{G}}$ désigne les inclusions de $A^g(\mathbb{G})$ et $A^c(\mathbb{G})$ dans $A^fU(\mathbb{G})$. On note $\mu_{\mathbb{G}}$ chacune des restrictions de $\mu'_{U\mathbb{G}}$ à $U\mathcal{A}^{g2}(\mathbb{G}) \to U\mathcal{A}^g(\mathbb{G})$ et à $U\mathcal{A}^{c2}(\mathbb{G}) \to U\mathcal{A}^c(\mathbb{G})$.
2) $\mu_{\mathbb{G}} : \mathcal{A}^{g2}(\mathbb{G}) \to \mathcal{A}^g(\mathbb{G})$ et $\mu_{\mathbb{G}} : \mathcal{A}^{c2}(\mathbb{G}) \to \mathcal{A}^c(\mathbb{G})$ sont des morphismes d'ensembles globulaires.

Preuve : Pour le (1), par induction sur $\mathrm{L}(a)$. Le (2) est immédiat.

Remarques 4.36. : 1) Les applications $g \mapsto \tilde{g}$ de $\mathcal{A}^g(\mathbb{G}) \to \mathcal{A}^g(\mathbb{G}')$ et de $\mathcal{A}^c(\mathbb{G}) \to \mathcal{A}^c(\mathbb{G}')$ sont fonctorielles. On note $\mathcal{A}^g$ et $\mathcal{A}^c$ les deux endo-foncteurs de $\mathbb{G}lob$ obtenus.
2) Les restrictions de $\eta'_{U(\mathbb{G})} : U(\mathbb{G}) \to A^fU(\mathbb{G})$ à $U(\mathbb{G}) \to A^g(\mathbb{G})$ et à $U(\mathbb{G}) \to A^c(\mathbb{G})$ sont des morphismes d'ensembles globulaires de $\mathbb{G} \to \mathcal{A}^g(\mathbb{G})$ et de $\mathbb{G} \to \mathcal{A}^c(\mathbb{G})$. On note chacun d'eux $\eta_{\mathbb{G}}$. Les morphismes $\eta_{\mathbb{G}}$ sont naturels en $\mathbb{G}$. On obtient des transformations naturelles, notées η, de $Id_{\mathbb{G}lob} \to \mathcal{A}^g$ et de $Id_{\mathbb{G}lob} \to \mathcal{A}^c$.
3) De même les morphismes $\mu_{\mathbb{G}}$ de $\mathcal{A}^{g2}(\mathbb{G}) \to \mathcal{A}^g(\mathbb{G})$ et de $\mathcal{A}^{c2}(\mathbb{G}) \to \mathcal{A}^c(\mathbb{G})$ sont naturels en $\mathbb{G}$. On note μ chacune des transformations naturelles $\mathcal{A}^{g2} \to \mathcal{A}^g$ et $\mathcal{A}^{c2} \to \mathcal{A}^c$.
4) Les morphismes $\pi_{\mathbb{G}}$ de $\mathcal{A}^g(\mathbb{G}) \to \mathcal{A}'^g(\mathbb{G})$ et de $\mathcal{A}^c(\mathbb{G}) \to P(\mathbb{G})$ sont naturels en $\mathbb{G}$. On note π chacune des transformations naturelles $\mathcal{A}^g \to \mathcal{A}'^g$ et $\mathcal{A}^c \to P$.

Proposition 4.37. : 1) $(\mathcal{A}^g, \eta, \mu)$ est une monade sur $\mathbb{G}lob$.
2) $(\mathcal{A}^c, \eta, \mu)$ est une sous-monade de $(\mathcal{A}^g, \eta, \mu)$.
3) $\pi : \mathcal{A}^g \to \mathcal{A}'^g$ et $\pi : \mathcal{A}^c \to \mathbb{P}$ sont des morphismes de monades.

Preuve : Pour le (1) et le (2), cela résulte de la section 3 de la première partie, et pour le (3), cela résulte de la proposition 4.11.

Proposition 4.38. : $(\mathbb{G}lob, U, \mathcal{A}^g, \eta, \mu, \mathrm{L})$ et $(\mathbb{G}lob, U, \mathcal{A}^c, \eta, \mu, \mathrm{L})$ sont des monades concrètes syntaxiques.

Preuve : Résulte de la section 1 de la première partie.

4.5 La monade $\mathbb{B}$

Notations et définitions 4.39. : Soit $\mathbb{G} \in |\mathbb{G}lob|$. On construit $A^b(\mathbb{G}) \subset A^f U(\mathbb{G})$ par induction sur la longueur des arbres. Soit $a \in A^f U(\mathbb{G})$. On pose $n = \dim(a)$.
- Si $a = c(\varnothing)$, où $c \in U(\mathbb{G})$, alors $a \in A^b(\mathbb{G})$.
- Si $a = a_1 \star_p a_0$ (dans ce cas $p < n$), alors $a \in A^b(\mathbb{G})$ ssi $a_1, a_0 \in A^b(\mathbb{G})$, $\forall k \in [2]$, $\dim(a_k) = n$ et $\partial^0_p(a_1) = \partial^1_p(a_0)$.
- Si $\mathrm{sym}(a) = \square$, alors $a \in A^b(\mathbb{G})$ ssi $\partial^1(a), \partial^0(a) \in A^b(\mathbb{G})$, $\partial^1(a) // \partial^0(a)$; de plus :
.. si a est irréductible, $\pi_{\mathbb{G}}(a) \in P(\mathbb{G})$,
.. si a n'est pas irréductible, notons $\mathrm{Op}(\alpha, (a_0, ..., a_{m-1}))$ la décomposition canonique de a (voir la définition 1.26), on demande que $\alpha \in A^b(\mathbb{I})$, $\forall j \in [m], a_j \in A^b(\mathbb{G})$ et $\alpha\{a_0, ..., a_{m-1}\} \in A^b\mathcal{A}^c(\mathbb{G})$.

Remarque 4.40. : On aurait aimé demander que $\alpha\{a_0, ..., a_{m-1}\}$ soit dans $(A^b)^2(\mathbb{G})$, mais ce n'est pas encore possible car on n'a pas encore montré que $A^b(\mathbb{G})$ a une structure d'ensemble globulaire (voir la proposition 4.46).

Proposition 4.41. : On a $A^b(\mathbb{G}) \subset A^c(\mathbb{G})$.

Preuve : Par induction sur la longueur des arbres. Soit $a \in A^b(\mathbb{G})$. Pour montrer que $\pi_{\mathbb{G}}(a) \in P(\mathbb{G})$ lorsque $\mathrm{sym}(a) = \square$ et a n'est pas irréductible, on procède comme suit : Ecrivons $\mathrm{Op}(\alpha, (a_0, ..., a_{m-1}))$ la décomposition canonique de a. On a
$\pi_{\mathbb{G}}(a) = \mathrm{Op}(\pi_{\mathbb{I}}\alpha, (\pi_{\mathbb{G}}a_0, ..., \pi_{\mathbb{G}}a_{m-1})) = \mu_{\mathbb{G}}(\pi_{\mathbb{I}}(\alpha)\{\pi_{\mathbb{G}}a_0, ..., \pi_{\mathbb{G}}a_{m-1}\}) =$

$\mu_{\mathbb{G}}\tilde{\pi}_{\mathbb{G}}(\pi_{\mathbb{I}}(\alpha)\{a_0, ..., a_{m-1}\})$. Or $\alpha\{a_0, ..., a_{m-1}\} \in A^c\mathcal{A}^c(\mathbb{G})$ (par hypothèse d'induction) donc $\pi_{\mathbb{I}}(\alpha)\{a_0, ..., a_{m-1}\} = \pi_{\mathcal{A}^c\mathbb{G}}(\alpha\{a_0, ..., a_{m-1}\})$ dans $UP\mathcal{A}^c(\mathbb{G})$ et alors $\tilde{\pi}_{\mathbb{G}}(\pi_{\mathbb{I}}(\alpha)\{a_0, ..., a_{m-1}\}) \in UP^2(\mathbb{G})$. Ainsi $\pi_{\mathbb{G}}(a) \in P(\mathbb{G})$.

Proposition 4.42. : 1) $\forall a \in A^b(\mathbb{G}),\ \mathrm{I}(a) \in A^b(\mathbb{G})$.
2) $\forall p \in \mathbb{N},\ \forall k \in [2], \forall a \in A^b(\mathbb{G}),\ p \leq \dim(a) \ \Rightarrow\ \partial^k_p(a) \in A^b(\mathbb{G})$.

Preuve : (1) On a $\mathrm{sym}(\mathrm{I}(a)) = \square,\ \forall k \in [2],\ \partial^k\mathrm{I}(a) = a \in A^b(\mathbb{G})$ et $\partial^1\mathrm{I}(a)//\partial^0\mathrm{I}(a)$ De plus :
- si $\mathrm{I}(a)$ est irréductible, $\pi_{\mathbb{G}}\mathrm{I}(a) = \mathrm{I}\pi_{\mathbb{G}}(a) \in P(\mathbb{G})$,
- si $\mathrm{I}(a)$ n'est pas irréductible, comme $\mathrm{Op}(i_p, (a, a))$ est la décomposition canonique de $\mathrm{I}(a)$, où $i_p \in A^b(\mathbb{I}),\ a \in A^b(\mathbb{G})$ et $i_p\{a, a\} = \mathrm{I}(a(\varnothing))$ dans $A^b\mathcal{A}^c(\mathbb{G})$ (car $\mathrm{I}(a(\varnothing))$ est irréductible), on a toujours $\mathrm{I}(a) \in A^b(\mathbb{G})$.
(2) On le fait par induction sur $\mathrm{L}(a)$ (Lorsque $\mathrm{sym}(a) = \square$, on remarque que $\partial^k_p(a) = \partial^k_p\partial^k(a)$).

Corollaire 4.43. : $(A^b(\mathbb{G}), \dim, (\partial^1_p, \partial^0_p)_{p\in\mathbb{N}})$ est un sous-ensemble globulaire de $\mathcal{A}^c(\mathbb{G})$. On le note $B(\mathbb{G})$.

Proposition 4.44. : Soit $g : \mathbb{G} \to \mathbb{G}'$ une flèche de $\mathbb{G}lob$. Alors :
1) $\forall a \in A^b(\mathbb{G}),\ \tilde{g}(a) \in A^b(\mathbb{G}')$,
2) $\tilde{g} : B(\mathbb{G}) \to B(\mathbb{G}')$ est un morphisme d'ensembles globulaires.

Preuve : Le (1) se fait par induction sur $\mathrm{L}(a)$. Lorsque $\mathrm{sym}(a) = \square$ où a n'est pas irréductible, écrivons $\mathrm{Op}(\alpha, (a_0, ..., a_{m-1}))$ la décomposition canonique de a alors celle de $\tilde{g}(a)$ est $\mathrm{Op}(\alpha, (\tilde{g}a_0, ..., \tilde{g}a_{m-1}))$, où $\alpha \in A^b(\mathbb{I}),\ \forall j \in [m], \tilde{g}(a_j) \in A^b(\mathbb{G}')$ et $\alpha\{\tilde{g}a_0, ..., \tilde{g}a_{m-1}\} = \tilde{\tilde{g}}(\alpha\{a_0, ..., a_{m-1}\}) \in A^b\mathcal{A}^c(\mathbb{G})$ (les deux, par hypothèse d'induction). Donc $\tilde{g}(a) \in A^b(\mathbb{G}')$. Les autres cas sont sans difficulté. Le (2) est immédiat.

Proposition 4.45. : Soit $m : \mathbb{G}' \to \mathbb{G}$ un morphisme injectif d'ensembles globulaires.
1) Si $a' \in AU(\mathbb{G}')$ est tel que $\tilde{m}(a') \in A^b(\mathbb{G})$ alors $a' \in A^b(\mathbb{G}')$.
2) Si $a \in A^b(\mathbb{G})$ est tel que $l_{\{U\mathbb{G}\}}(a) \subset m(U\mathbb{G}')$. Alors il existe un unique $a' \in A^b(\mathbb{G}')$ tel que $\tilde{m}(a') = a$.

Preuve : Le (1) se fait par induction sur $\mathrm{L}(a')$. Lorsque $\mathrm{sym}(a') = \square$, où a' n'est pas irréductible, Ecrivons $\mathrm{Op}(\alpha, (a'_0, ..., a'_{m-1}))$ la décomposition canonique de a'. Alors, comme $\mathrm{Op}(\alpha, (\tilde{m}a'_0, ..., \tilde{m}a'_{m-1}))$ est la décomposition canonique de $\tilde{m}(a')$, on en déduit que $\alpha \in A^b(\mathbb{I})$ et $\forall j \in [m]$, $a'_j \in A^b(\mathbb{G}')$ (par hypothèse d'induction) et comme $\tilde{\tilde{m}}(\alpha\{a'_0, ..., a'_{m-1}\}) = \alpha\{\tilde{m}a'_0, ..., \tilde{m}a'_{m-1}\}$, on a aussi $\alpha\{a'_0, ..., a'_{m-1}\}$ dans $A^b\mathcal{A}^c(\mathbb{G})$ (par hypothèse d'induction).
Le (2) résulte du (1).

Proposition 4.46. : Soit $a \in A^b(\mathbb{G})$, où $\mathrm{sym}(a) = \square$. On suppose que $\mathrm{Op}(\alpha, (a_0, ..., a_{m-1}))$ est la décomposition canonique de a. Alors on a : $\alpha \in A^b(\mathbb{I})$, $\forall j \in [m]$, $a_j \in A^b(\mathbb{G})$ et $\alpha\{a_0, ..., a_{m-1}\} \in A^bB(\mathbb{G})$.

Preuve : Essentiellement car $l_{\{A^c\mathbb{G}\}}(\alpha\{a_0, ..., a_{m-1}\}) = \{a_0, ..., a_{m-1}\}$ qui est contenu dans $A^b(\mathbb{G})$.

Proposition 4.47. : 1) $\forall A \in A^bB(\mathbb{G})$, $\mu_{U\mathbb{G}}\tilde{\imath}_{\mathbb{G}}(A) \in A^b(\mathbb{G})$ (où $\imath_{\mathbb{G}}$ est l'inclusion de $A^b(\mathbb{G})$ dans $A^c(\mathbb{G})$). On note encore $\mu_{\mathbb{G}} : A^bB(\mathbb{G}) \to A^b(\mathbb{G})$ la restriction de $\mu_{\mathbb{G}} : A^c\mathcal{A}^c(\mathbb{G}) \to A^c(\mathbb{G})$.
2) $\mu_{\mathbb{G}} : B^2(\mathbb{G}) \to B(\mathbb{G})$ est un morphisme d'ensembles globulaires.

Preuve : Le (1) se montre par induction sur $\mathrm{L}(A)$. Lorsque $\mathrm{sym}(a) = \square$ et $\mu_{U\mathbb{G}}\tilde{\imath}_{\mathbb{G}}(A)$ n'est pas irréductible, écrivons $A' = \tilde{\imath}_{\mathbb{G}}(A)$ et sa décomposition canonique $\mathrm{Op}(\alpha, (A'_0, ..., A'_{m-1}))$. Alors $\mathrm{Op}(\alpha, (\mu_{U\mathbb{G}}A'_0, ..., \mu_{U\mathbb{G}}A'_{m-1}))$ est la décomposition canonique de $\mu_{U\mathbb{G}}(A')$, où $\alpha \in A^b(\mathbb{I})$, $\forall j \in [m]$, $\mu_{U\mathbb{G}}(A'_j) \in A^b(\mathbb{G})$ (par hypothèse d'induction) et $\alpha\{\mu_{U\mathbb{G}}A'_0, ..., \mu_{U\mathbb{G}}A'_{m-1}\} = \tilde{\mu}_{U\mathbb{G}}(\alpha\{A'_0, ..., A'_{m-1}\})$ qui est dans $A^b\mathcal{A}^c(\mathbb{G})$.

Remarque 4.48. : Comme en 4.36, on obtient un endo-foncteur B de $\mathbb{G}lob$ et des transformations naturelles $\eta : Id_{\mathbb{G}lob} \to B$ et $\mu : B^2 \to B$.

Proposition 4.49. : 1) $\mathbb{B} = (B, \eta, \mu)$ est une sous-monade de $(\mathcal{A}^c, \eta, \mu)$.
2) $(\mathbb{G}lob, U, \mathbb{B}, \mathrm{L})$ est une monade concrète syntaxique.
3) $\pi : \mathbb{B} \to \mathbb{P}$ est un morphisme de monades.

Preuve : Le (1) résulte de la section 3 de la première partie, le (2) de la section 1 de la première partie, et pour le (3), le morphisme π est la restriction de son homologue de $\mathcal{A}^c \to P$.

5. La monade de Batanin

Introduction : Le but de cette section est de montrer que $\mathbb{B}$ est la monade de Batanin. Pour cela, nous allons montrer successivement que $\mathbb{B}$ est cartésienne puis qu'elle est pure. La cartésianité de $\mathbb{B}$ se montre en plusieures étapes après avoir introduit les concepts de polarisation de niveau 1, comme on l'a fait pour $\mathbb{P}$, puis de niveau 2.

5.1 Polarisation de niveau 1

Convention 5.1. : A partir de maintenant si M est un endo-foncteur de $\mathbb{G}lob$ on écrira "$a \in M(\mathbb{G})$" au lieu de "$a \in UM(\mathbb{G})$".

Notations 5.2. : 1) Soit $a \in \mathcal{A}^c(\mathbb{I})$. On pose $\mathcal{P}ol(a) = a\{\mathrm{Cell}\pi(a)\}$ (où, pour simplifier, on note $\pi = \pi_{\mathbb{I}} : \mathcal{A}^c(\mathbb{I}) \to P(\mathbb{I})$ et où $\mathrm{Cell}(-)$ est défini au 3.31).
2) Lorsque $\mathbb{G} \in |\mathbb{G}lob|$, on note b la transformation naturelle composée suivante :

$$\mathcal{A}^c \xrightarrow{\pi} P \xrightarrow{p} \omega.$$

3) Quand $a \in \mathcal{A}^c(\mathbb{I})$ on écrit $b(a)$ au lieu de $\underline{b_{\mathbb{I}}(a)}$ (pour la notation $\underline{\alpha}$ voir au 2.29).

Proposition 5.3. : Soit $a \in \mathcal{A}^c(\mathbb{I})$. Alors :
1) $\mathcal{P}ol(a) \in A(\Gamma b(a))$.
2) $\pi_{\Gamma b(a)}\mathcal{P}ol(a) = \mathcal{P}ol\ \pi(a)$.
3) $|\mathcal{P}ol(a)| = a$.

Preuve : Immédiat.

Proposition 5.4. : Soit $a \in \mathcal{A}^c(\mathbb{I})$.
1) On suppose que $\mathrm{sym}(a) = \square$. Alors $\forall k \in [2],\ \partial^k\mathcal{P}ol(a) = \mathcal{P}ol\partial^k(a)$.
2) $\forall p \in \mathbb{N}, \forall k \in [2],\ p < \dim(a) \ \Rightarrow\ \partial^k_p\mathcal{P}ol(a) = \widetilde{\mathrm{d}^k_p}(ba)\mathcal{P}ol\partial^k_p(a)$.
3) On a $\mathcal{P}ol(a) \in \mathcal{A}^c\Gamma b(a)$.

Preuve : (1) Ecrivons $a = a_1\square a_0$. Alors
$\partial^k\mathcal{P}ol(a) = \partial^k(a\{\mathrm{Cell}\pi(a)\}) = \partial^k(a)\{\mathrm{Cell}\pi(a_k)\} = \partial^k(a)\{\mathrm{Cell}\pi(\partial^k(a)\}$
$= \mathcal{P}ol\ \partial^k(a)$.
(2) Par induction sur $\mathrm{L}(a)$. On s'inspire de la preuve de la proposition 3.34.
(3) Même induction. On s'inspire ici de la proposition 3.35.

Proposition 5.5. : La transformation naturelle $b : \mathcal{A}^c \to \omega$ est cartésienne.

<u>Preuve</u> : On le vérifie sur les flèches de la forme $!_{\mathbb{G}} : \mathbb{G} \to \mathbb{I}$. La encore, on s'inspire de la preuve de la proposition 3.37.

Corollaire 5.6. : 1) $\mathcal{A}^c$ est une monade cartésienne.
2) $\pi : \mathcal{A}^c \to P$ est cartésien.

<u>Preuve</u> : (1) car b est un morphisme de monade qui est cartésien et ω est une monade cartésienne.
(2) car p et b sont cartésiens.

Remarque 5.7. On voit, comme à la remarque 3.39, que pour tout $a \in \mathcal{A}^c(\mathbb{I})$, $\mathcal{P}ol(a) \in \mathcal{A}^c\Gamma b(a)$ est complètement caractérisé par les deux identités suivantes :

$$|\mathcal{P}ol(a)| = a \quad \text{et} \quad b_{\Gamma b(a)}\mathcal{P}ol(a) = Pol\, b_{\mathbb{I}}(a).$$

puisque $b : \mathcal{A}^c \to \omega$ est lui aussi cartésien.

5.2 Polarisation de niveau 2

5.2.1 Pour ω

Notation 5.8. : Soit $A \in \omega^2(\mathbb{I})$, on pose $\alpha = \mu_{\mathbb{I}}(A) \in \omega(\mathbb{I})$. Comme $Pol(\alpha) \in \omega\Gamma(\underline{\alpha})$ et que $\omega(!)Pol(\alpha) = \alpha = \mu_{\mathbb{I}}(A)$, on en déduit, grâce à la cartésianité de $\mu : \omega^2 \to \omega$, qu'il existe une unique cellule, notée $Pol^2(A) \in \omega^2\Gamma(\underline{\alpha})$ telle que :

$$\omega^2(!)Pol^2(A) \underset{I_1}{=} A \quad \text{et} \quad \mu_{\Gamma\underline{\alpha}}Pol^2(A) = Pol(\alpha) = Pol\mu_{\mathbb{I}}(A).$$

Remarques et notations 5.9. : 1) On a $\dim Pol^2(A) = \dim(A)$ et $\underline{Pol^2(A)} = \underline{A}$.
2) Notons $pol_A = g_{Pol^2 A} : \Gamma(\underline{A}) \to \omega\Gamma(\underline{\alpha})$ la flèche de $\mathbb{G}lob$ (où la notation g_α est définie en 2.29). Alors, grâce à (I_1), on a l'identité :
$g_A \underset{I_2}{=} (\Gamma(\underline{A}) \xrightarrow{pol_A} \omega\Gamma(\underline{\alpha}) \xrightarrow{\omega(!)} \omega(\mathbb{I}))$.
3) Pour tout $c \in \Gamma(\underline{A})$, $\overline{pol_A(c)} = \overline{g_A(c)}$ (grâce à (I_2)). Notons enfin $\delta_A(c) = g_{pol_A(c)} : \Gamma(\underline{g_A(c)}) \to \Gamma(\underline{\alpha})$ la flèche de $\mathbb{G}lob$.

5.2.2 Pour $\mathcal{A}^c$

Notation 5.10. : Soit $A \in \mathcal{A}^{c2}(\mathbb{I})$. Posons $a = \mu_{\mathbb{I}}(A) \in \mathcal{A}^c(\mathbb{I})$. Comme $\mathcal{P}ol(a) \in \mathcal{A}^c\Gamma b(a)$ et que $\mathcal{A}^c(!)\mathcal{P}ol(a) = a = \mu_{\mathbb{I}}(A)$, on en déduit, grâce à la cartésianité de $\mu : \mathcal{A}^{c2} \to \mathcal{A}^c$ (voir le corollaire 5.6), qu'il existe une unique cellule, notée $\mathcal{P}ol^2(A) \in \mathcal{A}^{c2}\Gamma b(a)$, telle que :

$$\mathcal{A}^{c2}(!)\mathcal{P}ol^2(A) = A \quad \text{et} \quad \mu_{\Gamma b(a)}\mathcal{P}ol^2(A) = \mathcal{P}ol(a) = \mathcal{P}ol\mu_{\mathbb{I}}(A)$$

.

Proposition 5.11. : On a l'identité : $b^2_{\Gamma b(a)}\mathcal{P}ol^2(A) = Pol^2 b^2_{\mathbb{I}}(A)$.

Preuve : Soient $U = Pol^2 b^2_{\mathbb{I}}(A)$ et $V = b^2_{\Gamma b(a)}\mathcal{P}ol^2(A)$. On remarque que $\omega^2(!)(U) = b^2_{\mathbb{I}}(A) = \omega^2(!)(V)$ et $\mu_{\Gamma b(a)}(U) = Pol\, b_{\mathbb{I}}\mu_{\mathbb{I}}(A) = \mu_{\Gamma b(a)}(V)$. On en déduit que $U = V$ car $\mu : \omega^2 \to \omega$ est cartésien.

Remarque 5.12. : On a la composition des carrés cartésiens suivants dans $\mathbb{G}lob$:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A}^{c2}\Gamma b(a) \arrow[r, "b_{\mathcal{A}^c\Gamma b(a)}"] \arrow[d, "\mathcal{A}^{c2}(!)"'] & \omega\mathcal{A}^c\Gamma b(a) \arrow[r, "\omega b_{\Gamma b(a)}"] \arrow[d, "\omega\mathcal{A}^c(!)"] & \omega^2\Gamma b(a) \arrow[d, "\omega^2(!)"] \\
\mathcal{A}^{c2}(\mathbb{I}) \arrow[r, "b_{\mathcal{A}^c\mathbb{I}}"'] & \omega\mathcal{A}^c(\mathbb{I}) \arrow[r, "\omega b_{\mathbb{I}}"'] & \omega^2(\mathbb{I})
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
\mathcal{A}^{c2}\Gamma b(a) \arrow[r, "b^2_{\Gamma b(a)}"] \arrow[d, "\mathcal{A}^{c2}(!)"'] & \omega^2\Gamma b(a) \arrow[d, "\omega^2(!)"] \\
\mathcal{A}^{c2}(\mathbb{I}) \arrow[r, "b^2_{\mathbb{I}}"'] & \omega^2(\mathbb{I})
\end{tikzcd}$$

car b est cartésienne (voir la proposition 5.5) et ω commute aux produits fibrés. De ce fait $\mathcal{P}ol^2(A)$ peut être caractérisé par les identités suivantes :

$$\mathcal{A}^{c2}(!)\mathcal{P}ol^2(A) = A \quad \text{et} \quad b^2_{\Gamma b(a)}\mathcal{P}ol^2(A) = Pol^2 b^2_{\mathbb{I}}(A).$$

Proposition 5.13. : On a l'identité $\mathcal{P}ol^2(A) = \tilde{\gamma}_A\mathcal{P}ol(|A|)$ où $\gamma_A : \Gamma b(|A|) \to \mathcal{A}^c\Gamma b(a)$ est la flèche de $\mathbb{G}lob$ définie, pour tout $c \in \Gamma b(|A|)$, par

$$\gamma_A(c) = \delta_B\tilde{(c)}\mathcal{P}olg_{B'}(c) \text{ où } \quad B = b^2_{\mathbb{I}}(A) \quad \text{et} \quad B' = b_{\mathcal{A}^c\mathbb{I}}(A).$$

Preuve : - Commençons par utiliser, dans le carré composé de la remarque précédente, la cartésianité du carré de droite. Comme $\omega^2(!)\mathcal{P}ol^2 b^2_{\mathbb{I}}(A) = b^2_{\mathbb{I}}(A) = \omega(b_{\mathbb{I}})b_{\mathcal{A}^c\mathbb{I}}(A)$, il existe une unique cellule, notée $\mathcal{G}_A \in \omega\mathcal{A}^c\Gamma b(a)$ telle que $\omega(b_{\Gamma b(a)})(\mathcal{G}_A) = \mathcal{P}ol^2 b^2_{\mathbb{I}}(A)$ et $\omega\mathcal{A}^c(!)(\mathcal{G}_A) = b_{\mathcal{A}^c\mathbb{I}}(A)$. On constate que $\mathcal{G}_A \underset{*1}{=} (dim(A), b(|A|), \gamma_A)$.

$(*1)$ Grâce à la preuve de la proposition 5.5.

- Toujours dans la remarque 5.12, on utilise ensuite la cartésianité du carré de gauche ou plutôt la cartésianité du carré suivant :

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A}^{c2}\Gamma b(a) \arrow[r, "b_{\mathcal{A}^c\Gamma b(a)}"] \arrow[d, "\mathcal{A}^c(!)"'] & \omega\mathcal{A}^c\Gamma b(a) \arrow[d, "\omega(!)"] \\
\mathcal{A}^c(\mathbb{I}) \arrow[r, "b_{\mathbb{I}}"] & \omega(\mathbb{I})
\end{tikzcd}$$

Comme $b_{\mathcal{A}^c\Gamma b(a)}\mathcal{P}ol^2(A) = \mathcal{G}_A$ et $\mathcal{A}^c(!)\mathcal{P}ol^2(A) = |A|$. Cela implique que $\mathcal{P}ol^2(A) \underset{*1}{=} \tilde{\gamma}_A\mathcal{P}ol(|A|)$.

Proposition 5.14. : Notons, pour tout $j \in [lA]$, $\delta^j = \delta_{b^2_{\mathbb{I}}(A)}\mathrm{Cell}_j\pi(|A|)$. Alors, on a les identités suivantes, où $m = l(A)$ et $(a_0, ..., a_{m-1}) = l_{\mathcal{A}^c\mathbb{I}}(A)$:

1) $\mathcal{P}ol(a) = \mathrm{Op}(|A|, (\tilde{\delta}^0\mathcal{P}ol(a_0), ..., \tilde{\delta}^{m-1}\mathcal{P}ol(a_{m-1})))$.
2) $\mathcal{P}ol^2(A) = |A|\{\tilde{\delta}^0\mathcal{P}ol(a_0), ..., \tilde{\delta}^{m-1}\mathcal{P}ol(a_{m-1})\}$.

Preuve : (2) On a $\mathcal{P}ol^2(A) = \tilde{\gamma}_A\mathcal{P}ol(|A|) =$
$\tilde{\gamma}_A(|A|\{\mathrm{Cell}_0\pi|A|, ..., \mathrm{Cell}_{m-1}\pi|A|\}) =$
$|A|\{\gamma_A\mathrm{Cell}_0\pi|A|, ..., \gamma_A\mathrm{Cell}_{m-1}\pi|A|\} \underset{*1}{=}$
$|A|\{\tilde{\delta}^0\mathcal{P}ol(a_0), ..., \tilde{\delta}^{m-1}\mathcal{P}ol(a_{m-1})\}$.
$(*1)$ Car $\gamma_A\mathrm{Cell}_j\pi|A| = \tilde{\delta}^j\mathcal{P}ol g_A\mathrm{Cell}_j\pi|A| \underset{*2}{=} \tilde{\delta}^j\mathcal{P}ol(a_j)$.
$(*2)$ Voir proposition 3.36
(1) On a $\mathcal{P}ol\mu_{\mathbb{I}}(A) = \mu_{\Gamma b(a)}\mathcal{P}ol^2(A) =$
$\mu_{\Gamma b(a)}(|A|\{\tilde{\delta}^0\mathcal{P}ol(a_0), ..., \tilde{\delta}^{m-1}\mathcal{P}ol(a_{m-1})\}) \underset{*3}{=}$
$\mathrm{Op}(|A|, (\tilde{\delta}^0\mathcal{P}ol(a_0), ..., \tilde{\delta}^{m-1}\mathcal{P}ol(a_{m-1})))$.
$(*3)$ Voir proposition 1.20.

Théorème 5.15. : Soit $a \in B(\mathbb{I})$, alors $\mathcal{P}ol(a) \in B\Gamma b(a)$.

Preuve : Par induction sur $\mathrm{L}(a)$. Lorsque $\mathrm{sym}(a) = \square$ et a n'est pas irréductible, on note $\mathrm{Op}(\alpha, (a_0, ..., a_{m-1}))$ la décomposition canonique de a. Posons
$A = \alpha\{a_0, ..., a_{m-1}\}$. Alors $A \in B\mathcal{A}^c(\mathbb{I}) \subset \mathcal{A}^{c2}(\mathbb{I})$, $\mu_{\mathbb{I}}(A) = a$ et on a la décomposition canonique
$\mathcal{P}ol(a) = \mathrm{Op}(\alpha, (\tilde{\delta}^0\mathcal{P}ol(a_0), ..., \tilde{\delta}^{m-1}\mathcal{P}ol(a_{m-1})))$, où $\alpha \in B(\mathbb{I})$,
$\forall j \in [m]$, $\tilde{\delta}^j\mathcal{P}ol(a_j) \in B\Gamma b(a)$ (car, par hypothèse d'induction,
$\mathcal{P}ol(a_j) \in B\Gamma b(a_j)$) et $\alpha\{\tilde{\delta}^0\mathcal{P}ol(a_0), ..., \tilde{\delta}^{m-1}\mathcal{P}ol(a_{m-1})\} = \mathcal{P}ol^2(A)$
dans $B\mathcal{A}^c\Gamma b(a)$ (car $\mathcal{P}ol^2(A) = \tilde{\gamma}_A\mathcal{P}ol(\alpha)$ où $\mathcal{P}ol(\alpha) \in B\Gamma b(\alpha)$, par hypothèse d'induction). Les autres cas ont été essentiellement traités à la proposition 5.4 (3). D'où la conclusion voulue.

Corollaire 5.16. : 1) La transformation naturelle $b : B \to \omega$ est cartésienne.
2) $\pi : B \to P$ est cartésienne.
3) $\mathbb{B}$ est une monade cartésienne.

Preuve : On procède comme aux propositions 5.5 et 5.6.

5.3 Pureté de $\mathbb{B}$

Remarque 5.17. : Au lieu de "Pureté de $\mathbb{B}$" on aurait dû, plus correctement, écrire "Pureté de $(\mathbb{G}lob, U, \mathbb{B}, L)$ ", qui est une monade concrète syntaxique cartésienne.

Proposition 5.18. : Soient $\mathbb{G} \in |\mathbb{G}lob|$, $a \in \mathcal{A}^f(\mathbb{I})$, $m = l(a)$ et $(b_0, ..., b_{m-1})$ dans $\mathcal{A}^f(\mathbb{G})^m$ tels que $\overline{\dim}(a) = (\dim b_0, ..., \dim b_{m-1})$.
Si $\mathrm{Op}(a, (b_0, ..., b_{m-1})) \in B(\mathbb{G})$ alors $\forall j \in [m], b_j \in B(\mathbb{G})$.

Preuve : Par induction sur $\mathrm{L}(a)$. Posons déjà $\hat{a} = \mathrm{Op}(a, (b_0, ..., b_{m-1}))$.
- Si $a = 0_n(\varnothing)$, c'est immédiat.
- Si $a = a_1 \star_p a_0$, posons $\forall k \in [2]$, $m_k = l(a_k)$, $\bar{B}_1 = (b_0, ..., b_{m_1-1})$ et $\bar{B}_0 = (b_{m_1}, ..., b_{m-1})$. On voit que $\hat{a} = \mathrm{Op}(a_1, \bar{B}_1) \star_p \mathrm{Op}(a_0, \bar{B}_0)$. Donc $\forall k \in [2]$, $\mathrm{Op}(a_k, \bar{B}_k) \in B(\mathbb{G})$. Alors, grâce à l'hypothèse d'induction on obtient la conclusion voulue.
- Si $\mathrm{sym}(a) = \square$ alors, quand a est irréductible, $\mathrm{Op}(a, (b_0, ..., b_{m-1}))$ est la décomposition canonique de $\hat{a} \in B(\mathbb{G})$. Donc $\forall j \in [m]$,
$b_j \in B(\mathbb{G})$. Quand a n'est pas irréductible, soit $\mathrm{Op}(\alpha, (a_0, ..., a_{q-1}))$ la décomposition canonique de a. Alors la décomposition canonique de $\hat{a}$ est

$\mathrm{Op}(\alpha, (\mathrm{Op}(a_0, \bar{B}_0), ..., \mathrm{Op}(a_{q-1}, \bar{B}_{q-1})))$ où $\bar{B}_j = (b_{\hat{j}}, ..., b_{\widehat{j+1}-1})$ avec $\hat{j} = \sum_{i\in[j]} l(a_i)$. Donc, par hypothèse d'induction $\forall j \in [q]$,
$\mathrm{Op}(a_j, \bar{B}_j) \in B(\mathbb{G})$ et donc, à nouveau par hypothèse d'induction, on a la conclusion voulue.

Proposition 5.19. : Soit $(a,b) \in B(\mathbb{I})^2$ et $n = l(a)$. Alors :
$a \underset{\mathbb{B}}{\leq} b \iff \exists \bar{b} \in \mathcal{A}^f(\mathbb{I})^n,\ b = \mathrm{Op}(a, \bar{b})$ et $a\{\bar{b}\} \in B^2(\mathbb{I})$.

Preuve : $(\Leftarrow)$ On pose $B = a\{\bar{b}\}$. Alors $B \in B^2(\mathbb{I})$, $\mu_{\mathbb{I}}(B) = b$ et $|B| = a$.
$(\Rightarrow)$ Soit $B \in B^2(\mathbb{I})$ tel que $\mu_{\mathbb{I}}(B) = b$ et $|B| = a$. On pose $\bar{b} = l_{B\mathbb{I}}(B)$. Alors $b = \mathrm{Op}(a, \bar{b})$ et $a\{\bar{b}\} = B \in B^2(\mathbb{I})$.

Proposition 5.20. : Soit $a \in B(\mathbb{I})$.
1) Si $\mathrm{sym}(a) = \star_p$ et $n = \dim(a)$, alors on a l'équivalence suivante :
a est primitif ssi $a = 0_n(\varnothing) \star_p 0_n(\varnothing)$.
2) Si $\mathrm{sym}(a) = \square$, alors on a l'équivalence suivante :
a est primitif ssi a est irréductible.

Preuve : Pour le (1) et le (2) ce sont essentiellement les mêmes preuves que leurs homologues dans les sections 3 et 5 de la première partie.

Théorème 5.21. : $(\mathbb{G}lob, U, \mathbb{B}, L)$ est pure.

Preuve : Soit $a \in B(\mathbb{I})$ tel que $\mathrm{L}(a) > 1$. Posons $n = \dim(a)$.
- Si $\mathrm{sym}(a) = \star_p$. On écrit $a = a_1 \star_p a_0$. Posons $\alpha = 0_n(\varnothing) \star_p 0_n(\varnothing)$. Alors $a = \mathrm{Op}(\alpha, (a_1, a_0))$ et $\alpha\{a_1, a_0\} \in B^2(\mathbb{I})$. Donc $\alpha \leq a$ où α est primitif. L'unicité est immédiate.
- Si $\mathrm{sym}(a) = \square$. Soit $\mathrm{Op}(\alpha, (a_0, ..., a_{m-1}))$ la décomposition canonique de a. Alors $\alpha \leq a$ où $\alpha \in B(\mathbb{I})$ est primitif. L'unicité résulte de la proposition 1.25.

5.4 La catégorie $\mathfrak{B}$

Notations 5.22. : $\omega = (\omega, \eta, \mu)$ étant la monade des ∞-catégories strictes sur $\mathbb{G}lob$, posons, pour tout $m \in \mathbb{N}$, $\hat{0}_m = \eta_{\mathbb{I}}(0_m) \in \omega(\mathbb{I})$, pour tout $m, p \in \mathbb{N}$ tels que $m > p$, $\hat{0}^m_p = \hat{0}_m \circ_p \hat{0}_m$ et $\hat{0}^m_m = \hat{0}_m$. On pose ensuite :

$$C_{\mathbb{B}} = \{\hat{0}^m_p / (m,p) \in \mathbb{N}^2, m \geq p\}.$$

Remarques 5.23. : $C_{\mathbb{B}}$ est un sous-ensemble globulaire de $\omega(\mathbb{I})$. $(C_{\mathbb{B}}, \imath)$, où $\imath : C_{\mathbb{B}} \to \omega(\mathbb{I})$ est l'injection canonique, peut être vu comme une collection sur ω. On pointe cette collection en considérant la restriction de $\eta_{\mathbb{I}}$ à $\mathbb{I} \to C_{\mathbb{B}}$, dans $\mathbb{G}lob$.

Notations 5.24. : Soit maintenant (C, π) une collection quelconque sur ω. On pose :

$$\bar{\bar{C}} = \{(x_1, x_0) \in C \times C / \ x_1 /\tilde{/} x_0 \ , \ \pi(x_1) = \pi(x_0)\}.$$

où $x_1 /\tilde{/} x_0$ signifie
1) $\dim(x_1) = \dim(x_0)$ (notons $m = \dim(x_1) = \dim(x_0)$) et
2) $m = 0$ ou si $m > 0$, $\forall k \in [2]$, $\partial^k_{m-1}(x_1) = \partial^k_{m-1}(x_0)$.
Cette définition diffère légèrement de $x_1 // x_0$ donnée dans 3.8).

Définition 5.25. :(Rappel - voir [1]) 1) Une *contraction* sur la collection (C, π) est une application $Cr : \bar{\bar{C}} \to C$ (on note $[x_1, x_0] = Cr(x_1, x_0)$) vérifiant les conditions suivantes :
$(c1)$ $\dim[x_1, x_0] = 1 + m$ (où $m = \dim(x_1) = \dim(x_0)$),
$(c2)$ $\forall k \in [2]$, $\partial^k_m[x_1, x_0] = x_k$,
$(c3)$ $\pi[x_1, x_0] = \imath\pi(x_1) = \imath\pi(x_0)$.
2) Une *collection contractile* est un triplet (C, π, Cr) où (C, π) est une collection sur ω et Cr une contraction sur (C, π).
3) Un *morphisme* de collections contractiles $g : (C, \pi, Cr) \to (C', \pi', Cr')$ est un morphisme de collections (c.a.d. une flèche de $\mathbb{G}lob/\omega(\mathbb{I})$) qui vérifie en plus :

$$\forall (x_1, x_0) \in \bar{\bar{C}}, \ [g(x_1), g(x_0)] = g[x_1, x_0].$$

Proposition 5.26. : $(B(\mathbb{I}), b_{\mathbb{I}}, Cr)$ est une collection contractile (où $Cr(a_1, a_0) = a_1 \odot a_0$ - voir notation 1.27).

__Preuve__ : Remarquons déjà que dans $B(\mathbb{I})$, on a $a_1 /\tilde{/} a_0 \iff a_1 // a_0$ (car $\dim(a) = 0 \iff a = 0_0(\varnothing)$). Prenons maintenant $(a_1, a_0) \in \bar{\bar{B}}(\mathbb{I})$, alors $[a_1, a_0] = a_1 \odot a_0 \in B(\mathbb{I})$ (on le voit facilement car $\forall k \in [2]$, $\partial^k[a_1, a_0] = a_k$ et $[a_1, a_0]$ est irréductible). Le fait que Cr est une contraction se vérifie sans difficulté.

Notation 5.27. : Notons maintenant $\mathfrak{B}$ la catégorie qui a :
- pour objets, les données $\mathcal{M} = (\mathbb{M}, Cr, c)$ où :

.. $\mathbb{M} = (M, \eta, \mu)$ est une monade sur $\mathbb{G}lob$,
.. $\pi : \mathbb{M} \to (\omega, \eta, \mu)$ est un morphisme de monades qui est cartésien.
.. Cr est une contraction sur la collection $(M(\mathbb{I}), \pi_{\mathbb{I}})$,
.. $c : C_{\mathbb{B}} \to M(\mathbb{I})$ est un morphisme de collections pointées sur ω (c.a.d. que c est un morphisme dans $Glob$ tel que $\pi_{\mathbb{I}}.c = \imath$ et $c.\eta_{\mathbb{I}}| = \eta_{\mathbb{I}}$, où $\eta_{\mathbb{I}}|$ est la restriction de $\eta_{\mathbb{I}}$ à $\mathbb{I} \to C_{\mathbb{B}}$) ;
- pour flèches $m : \mathcal{M} \to \mathcal{M}'$, la donnée d'une transformation naturelle : $m : M \to M'$ telle que :
.. $m : \mathbb{M} \to \mathbb{M}'$ est un morphisme de monade,
.. $\pi'.m = \pi$,
.. $m_{\mathbb{I}} : (M(\mathbb{I}), \pi_{\mathbb{I}}, Cr) \to (M'(\mathbb{I}), \pi'_{\mathbb{I}}, Cr')$ est un morphisme de collections contractiles,
.. $m_{\mathbb{I}}.c = c'$.

Proposition 5.28. : $\mathcal{B} = (\mathbb{B}, b, Cr, c)$ est un objet de $\mathfrak{B}$ où $c : C_{\mathbb{B}} \to B(\mathbb{I})$ est donné par $c(\hat{0}^m_p) = 0_m(\varnothing) \star_p 0_m(\varnothing)$ si $m > p$ et $c(\hat{0}^m_m) = 0_m(\varnothing)$.

<u>Preuve</u> : Il reste seulement à vérifier que c est un morphisme de collections pointées sur ω ce qui se fait sans difficulté.

Notations 5.29. : Fixons maintenant $\mathcal{M} \in |\mathfrak{B}|$ et soit $\mathbb{G} \in |\mathbb{G}lob|$, $m, p \in \mathbb{N}$ tels que $m > p$. Pour chaque $(x_1, x_0) \in M(\mathbb{G})^2$ tel que $\dim(x_1) = \dim(x_0) = m$ et $\partial^0_p(x_1) = \partial^1_p(x_0)$, on a $\omega(!_{M\mathbb{G}})(\eta_{M\mathbb{G}}(x_1) \circ_p \eta_{M\mathbb{G}}(x_0)) = \hat{0}^m_p = \pi_{\mathbb{I}}(c(\hat{0}^m_p))$. Alors, comme π est cartésien, il existe une unique cellule, notée $\langle x_1, x_0\rangle \in M^2(\mathbb{G})$ tel que $\pi_{M\mathbb{G}}\langle x_1, x_0\rangle = \eta_{M\mathbb{G}}(x_1) \circ_p \eta_{M\mathbb{G}}(x_0)$ et $M(!_{M\mathbb{G}})\langle x_1, x_0\rangle = c(\hat{0}^m_p)$. On pose ensuite $x_1 \circ_p x_0 = \mu_{\mathbb{G}}\langle x_1, x_0\rangle \in M(\mathbb{G})$.

Proposition 5.30. : 1) $\pi_{\mathbb{G}}(x_1 \circ_p x_0) = \pi_{\mathbb{G}}(x_1) \circ_p \pi_{\mathbb{G}}(x_0)$.
2) $\dim(x_1 \circ_p x_0) = m$.
3) Soit $q \in \mathbb{N}$ tel que $q < m$. Alors :
- si $q \le p$, $\partial^k_q\langle x_1, x_0\rangle = \eta_{M\mathbb{G}}\partial^k_q(x_k)$ et $\partial^k_q(x_1 \circ_p x_0) = \partial^k_q(x_k)$,
- si $q > p$, $\partial^k_q\langle x_1, x_0\rangle = \langle\partial^k_q x_1, \partial^k_q x_0\rangle$ et $\partial^k_q(x_1 \circ_p x_0) = \partial^k_q(x_1) \circ_p \partial^k_q(x_0)$.
4) Soit $g : \mathbb{G} \to \mathbb{G}'$ un morphisme de $\mathbb{G}lob$. Alors :
$M^2g\langle x_1, x_0\rangle = \langle Mg(x_1), Mg(x_0)\rangle$ et $Mg(x_1 \circ_p x_0) = Mg(x_1) \circ_p Mg(x_0)$.
5) Soient $X_1, X_0 \in M^2(\mathbb{G})$ tels que $\dim(X_1) = \dim(X_0) = m > p$ et $\partial^0_p(X_1) = \partial^1_p(X_0)$, alors :
$M\mu_{\mathbb{G}}\langle X_1, X_0\rangle = \langle\mu_{\mathbb{G}}X_1, \mu_{\mathbb{G}}X_0\rangle$ et $\mu_{\mathbb{G}}(X_1 \circ_p X_0) = \mu_{\mathbb{G}}(X_1) \circ_p \mu_{\mathbb{G}}(X_0)$.

6) Soient $p, m \in \mathbb{N}$ tels que $p < m$. Alors :
$\langle \eta_{\mathbb{I}}(0_m), \eta_{\mathbb{I}}(0_m)\rangle = M\eta_{\mathbb{I}}.c(\hat{0}_p^m)$ et $\eta_{\mathbb{I}}(0_m) \circ_p \eta_{\mathbb{I}}(0_m) = c(\hat{0}_p^m)$.

Preuve : Sans difficulté.

Proposition 5.31. : Soient $\mathcal{M}, \mathcal{M}' \in |\mathfrak{B}|$ et $m : \mathcal{M} \to \mathcal{M}'$ une flèche de $\mathfrak{B}$. Alors, pour tout $\mathbb{G} \in |\mathbb{G}lob|$, tout $(x_1, x_0) \in M(\mathbb{G})^2$ tel que $\dim(x_1) = \dim(x_0) = n > p$ et $\partial_p^0(x_1) = \partial_p^1(x_0)$, on a :
$m_{\mathbb{G}}^2\langle x_1, x_0\rangle = \langle m_{\mathbb{G}}(x_1), m_{\mathbb{G}}(x_0)\rangle$ et $m_{\mathbb{G}}(x_1 \circ_p x_0) = m_{\mathbb{G}}(x_1) \circ_p m_{\mathbb{G}}(x_0)$.

Preuve : Sans difficulté.

Proposition 5.32. : Soient $\mathbb{G} \in |\mathbb{G}lob|$ et $a_1, a_0 \in B(\mathbb{G})$ tels que $\dim(a_1) = \dim(a_0) = m > p$ et $\partial_p^0(a_1) = \partial_p^1(a_0)$, alors :
$\langle a_1, a_0\rangle = \eta_{B\mathbb{G}}(a_1) \star_p \eta_{B\mathbb{G}}(a_0)$ et $a_1 \circ_p a_0 = a_1 \star_p a_0$.

Preuve : Sans difficulté.

5.5 Matériel pour induction

Remarque 5.33. : Notre but est de montrer que $\mathcal{B} = (\mathbb{B}, b, Cr, c)$ est un objet initial de $\mathfrak{B}$. Or, étant donné un objet $\mathcal{M}$ de $\mathfrak{B}$, pour construire l'unique flèche $u : \mathcal{B} \to \mathcal{M}$, il nous faudra faire une induction et pour ce faire nous aurons besoin d'un certain matériel que nous allons préciser maintenant.

Notation 5.34. : On commence par définir, très généralement (c.a.d. dans les mêmes conventions qu'à la section 3 de la première partie), pour tout $C \in |\mathbb{E}ns|$, une nouvelle "longueur" sur $A^2(C)$. Soit $A \in A^2(C)$, alors :
- si $A = a(\varnothing)$, où $a \in A(C)$, on pose $\mathrm{L}'(A) = \mathrm{L}(a)$.
- si $A = s(A_0, ..., A_{m-1})$, où $m = ar(s) \geq 1$, alors
$\mathrm{L}'(A) = \sup_{j\in[m]} \mathrm{L}'(A_j)$.

Proposition 5.35. : Soit $A \in A^2(C)$. Alors :
1) $\mathrm{L}'(A) \leq \mathrm{L}\mu_C(A)$,
2) On a l'implication suivante :

$$\mathrm{L}'(A) = \mathrm{L}\mu_C(A) \ \Rightarrow\ A = \eta_{AC}\mu_C(A),$$

3) si $n = l(A)$ et $(a_0, ..., a_{n-1}) = l_{AC}(A)$, on a l'identité suivante :

$$\mathrm{L}'(A) = \sup_{j\in[n]} \mathrm{L}(a_j).$$

Preuve : Par induction sur $\mathrm{L}(A)$.

Proposition 5.36. : Soient $\mathbb{C} \in |\mathbb{E}ns/\mathbb{N}|$, $\alpha \in U\mathcal{A}(\mathbb{I})$, $n = l(\alpha)$ et $(A_0, ..., A_{n-1})$ dans $U\mathcal{A}^2(\mathbb{C})^n$ tels que $\overline{\dim}(\alpha) = (\dim A_0, ..., \dim A_{n-1})$. Posons $A = \mathrm{Op}(\alpha, (A_0, ..., A_{n-1}))$. Alors :

$$\mathrm{L}'(A) = \sup_{j \in [n]} \mathrm{L}'(A_j).$$

Preuve : Par induction sur $\mathrm{L}(\alpha)$.

Proposition 5.37. : Soient $\mathbb{G} \in |\mathbb{G}lob|$ et $A \in U\mathcal{A}^{g2}(\mathbb{G})$. Alors :

$$\forall k \in [2], \forall p \in \mathbb{N},\ p < \dim(A) \ \Rightarrow\ \mathrm{L}'\partial_p^k(A) \leq \mathrm{L}'(A).$$

Preuve : Par induction sur $\mathrm{L}(A)$. On commence par montrer que $\mathrm{L}'\partial^k(A) \leq \mathrm{L}'(A)$ si $\mathrm{sym}(A) = \Box$.

Notation 5.38. : Soient $\mathbb{G} \in |\mathbb{G}lob|$ et $n, m \in \mathbb{N}$. On pose :

$$B|_n^m(\mathbb{G}) = \{a \in B(\mathbb{G}) /\ \mathrm{L}(a) \leq n,\ \dim(a) \leq m\}.$$

Proposition 5.39. : 1) $\forall \mathbb{G} \in |\mathbb{G}lob|,\ \forall n, m \in \mathbb{N},\ B|_n^m(\mathbb{G}) \in |\mathbb{G}lob|$.
2) Pour toute flèche $g : \mathbb{G} \to \mathbb{G}'$ de $\mathbb{G}lob$, on a la factorisation $\tilde{g} : B|_n^m(\mathbb{G}) \to B|_n^m(\mathbb{G}')$ dans $\mathbb{G}lob$. En faisant varier g on obtient un sous-endofoncteur, noté $B|_n^m$, de B.

Preuve : Le (1) résulte de l'inégalité $\mathrm{L}\partial_p^k(a) \leq \mathrm{L}(a)$. Le (2) est immédiat.

Proposition 5.40. : Soit $A \in B^2(\mathbb{G})$. On a l'implication suivante :
Si $\mathrm{L}'(A) \leq n$ et $\dim(A) \leq m$ alors $A \in B(B|_n^m)(\mathbb{G})$.

Preuve : Notons $(a_0, ..., a_{p-1}) = l_{B\mathbb{G}}(A)$. Alors on voit que $\forall j \in [p],\ a_j \in B|_n^m(\mathbb{G})$ et donc $A \in BB|_n^m(\mathbb{G})$ (On utilise la proposition 4.45 (2)).

Notation 5.41. : soient $\mathbb{G} \in |\mathbb{G}lob|$ et $n, m \in \mathbb{N}$. On pose :

$$B^2|_n^m(\mathbb{G}) = \{A \in B^2(\mathbb{G}) /\ \mathrm{L}\mu_{\mathbb{G}}(A) \leq n,\ \dim(A) \leq m\}.$$

Proposition 5.42. : 1) $\forall \mathbb{G} \in |\mathbb{G}lob|, \forall n, m \in \mathbb{N},\ B^2|_n^m(\mathbb{G}) \in |\mathbb{G}lob|$.
2) Pour toute flèche $g : \mathbb{G} \to \mathbb{G}'$ de $\mathbb{G}lob$, on a la factorisation $\tilde{\tilde{g}} : B^2|_n^m(\mathbb{G}) \to B^2|_n^m(\mathbb{G}')$ dans $\mathbb{G}lob$. En faisant varier g on obtient un sous-endofoncteur, noté $B^2|_n^m$, de B^2 .

Preuve : Sans difficulté.

Proposition 5.43. : Soit $\mathcal{A} \in B^3(\mathbb{G})$. On a l'implication suivante :
Si $\mathrm{L}'B\mu_{\mathbb{G}}(\mathcal{A}) \leq n$ et $\dim(\mathcal{A}) \leq m$ alors $\mathcal{A} \in B(B^2|_n^m)(\mathbb{G})$.

Preuve : On procède comme à la proposition 5.40.

Proposition 5.44. : soient $\mathbb{G} \in |\mathbb{G}lob|$ et $n, m \in \mathbb{N}$. Alors :
1) $\mu_{\mathbb{G}}$ se factorise par $B^2|_n^m(\mathbb{G}) \to B|_n^m(\mathbb{G})$. On la note $\mu_{\mathbb{G}}|_n^m$.
2) $(B^2|_n^m)(\mathbb{G}) \subset (B|_n^m)^2(\mathbb{G})$.

Preuve : Pour le (2), on utilise le fait que $\forall A \in B^2|_n^m(\mathbb{G})$, $\mathrm{L}'(A) \leq \mathrm{L}\mu_{\mathbb{G}}(A)$ et $\mathrm{L}(A) \leq \mathrm{L}\mu_{\mathbb{G}}(A)$.

5.6 Construction de u

Remarque 5.45. : Soit $\mathcal{M} = (\mathbb{M}, \pi, Cr, c) \in |\mathfrak{B}|$. Pour trouver la flèche $u : \mathcal{B} \to \mathcal{M}$, on construit, pour chaque $\mathbb{G} \in |\mathbb{G}lob|$, une famille d'applications
$(u_{n\mathbb{G}}^m : B|_n^m(\mathbb{G}) \to M(\mathbb{G}))_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}$ qui doit satisfaire les conditions suivantes :
$(H0)$ Pour tout $m, m', n, n' \in \mathbb{N}$ tels que $m' \leq m$ et $n' \leq n$ alors $u_{n'\mathbb{G}}^{m'}$ est la restriction de $u_{n\mathbb{G}}^m$,
$(H1)$ $u_{n\mathbb{G}}^m : B|_n^m(\mathbb{G}) \to M(\mathbb{G})$ est un morphisme de $\mathbb{G}lob$,
$(H2)$ $u_{n\mathbb{G}}^m$ est naturel en $\mathbb{G}$ (on note $u_n^m : B|_n^m \to M$ la transformation naturelle obtenue),
$(H3)$ On a l'identité $\pi.u_n^m = b|_n^m$ (où $b|_n^m : B|_n^m \to \omega$ est la restriction de b),
$(H4)$ On a l'identité $\mu_{\mathbb{G}}.M(u_{n\mathbb{G}}^m).u_{n\hat{\mathbb{G}}}^m.i_{n\mathbb{G}}^m = u_{n\mathbb{G}}^m.(\mu_{\mathbb{G}}|_n^m)$ (où $i_{n\mathbb{G}}^m : B^2|_n^m(\mathbb{G}) \to (B|_n^m)^2(\mathbb{G})$ est l'injection canonique et $\hat{\mathbb{G}} = B|_n^m(\mathbb{G})$).
Cette famille se construit par induction sur $m + n$.

• *cas où* $n = 1$:
Soit $a \in B|_1^m(\mathbb{G})$. On peut écrire $a = c(\varnothing)$ où $c \in U(\mathbb{G})$. Dans ce cas on pose $u_{1\mathbb{G}}^m(a) = \eta_{\mathbb{G}}(c)$ (où $\eta : Id_{\mathbb{G}lob} \to M$). On vérifie facilement les conditions de $(H0)$ à $(H4)$.

• *cas où* $m = 0$:
On remarque que $B|_n^0(\mathbb{G}) = B|_1^0(\mathbb{G})$. Alors on peut poser $u_{n\mathbb{G}}^0 = u_{1\mathbb{G}}^0$. les conditions demandées sont donc encore vérifiées.

• *cas où* $m > 0$ *et* $n > 1$:
Soit $a \in B|_n^m(\mathbb{G})$.
- Si $\mathrm{L}(a) + \dim(a) < n + m$ alors $a \in B|_{n'}^{m'}(\mathbb{G})$ où $m' = \dim(a)$ et $n' = \mathrm{L}(a)$. Alors on pose $u_{n\mathbb{G}}^m(a) = u_{n'\mathbb{G}}^{m'}(a)$.
- Si $\mathrm{L}(a) + \dim(a) = n + m$ alors $\mathrm{L}(a) = n$ et $\dim(a) = m$.
.. Si $a = a_1 \star_p a_0$ alors, pour tout $k \in [2]$, $\dim(a_k) = m > p$. On a aussi $\dim u_{n-1\mathbb{G}}^m(a_k) = m$ et $\partial_p^0 u_{n-1\mathbb{G}}^m(a_1) = \partial_p^1 u_{n-1\mathbb{G}}^m(a_0)$. On peut donc poser $u_{n\mathbb{G}}^m(a) = u_{n-1\mathbb{G}}^m(a_1) \circ_p u_{n-1\mathbb{G}}^m(a_0)$.
.. Si $\mathrm{sym}(a) = \square$:
... Cas où a est irréductible :
.... On commence par supposer que $\mathbb{G} = \mathbb{I}$. Alors on peut écrire $a = a_1 \odot a_0$ où $a_1, a_0 \in B|_n^{m-1}(\mathbb{I})$ et $(u_{n\mathbb{I}}^{m-1}(a_1), u_{n\mathbb{I}}^{m-1}(a_0)) \in \overline{\overline{M}}(\mathbb{I})$. On peut donc poser $u_{n\mathbb{I}}^m(a) = [u_{n\mathbb{I}}^{m-1}(a_1), u_{n\mathbb{I}}^{m-1}(a_0)]$.
.... On suppose maintenant $\mathbb{G}$ quelconque : Soit $\alpha = |a|$. On vérifie que $\pi_{\mathbb{I}}.u_{n\mathbb{I}}^m(\alpha) = \omega(!_{\mathbb{G}})b_{\mathbb{G}}(a)$. Alors, comme π est cartésien, il existe une unique cellule, notée $u_{n\mathbb{G}}^m(a)$, dans $M(\mathbb{G})$ telle que $\pi_{\mathbb{G}}.u_{n\mathbb{G}}^m(a) = b_{\mathbb{G}}(a)$ et $M(!_{\mathbb{G}}).u_{n\mathbb{G}}^m(a) = u_{n\mathbb{I}}^m(\alpha)$.
... Cas où a n'est pas irréductible : Comme a est non-primitif et $\mathrm{L}(|a|) > 1$, soit α la composante primitive de a et $A \in B^2(\mathbb{G})$ la décomposition primitive de a (voir les deux définitions dans la section 1 de la première partie). On voit que $A \in (B|_{n-1}^m)^2(\mathbb{G})$ et que $u_{n-1\tilde{\mathbb{G}}}^m(A) \in MB|_{n-1}^m(\mathbb{G})$, où $\tilde{\mathbb{G}} = B|_{n-1}^m(\mathbb{G})$. On peut alors poser $u_{n\mathbb{G}}^m(a) = \mu_{\mathbb{G}}.Mu_{n-1\mathbb{G}}^m.u_{n-1\tilde{\mathbb{G}}}^m(A)$.

• Pour la vérification des conditions de l'induction, on constate que $(H0)$ est immédiat. Pour $(H1)$, seul le cas où $\mathrm{L}(a) = n$, $\dim(a) = m$, $\mathrm{sym}(a) = \square$ et a est non-irréductible, est un peu délicat. On voit que pour $q < \dim(a) = m$ alors par hypothèse d'induction on a $\partial_q^k u_{n\mathbb{G}}^m(a) = \mu_{\mathbb{G}}.Mu_{n-1\mathbb{G}}^m.u_{n-1\tilde{\mathbb{G}}}^m\partial_q^k(A)$. Mais $\partial_q^k(A) \in (B|_{n-1}^q)^2(\mathbb{G})$.

On peut donc écrire, en posant $\bar{\mathbb{G}} = B|_n^q(\mathbb{G})$, $\mu_{\mathbb{G}}.Mu^m_{n-1\mathbb{G}}.u^m_{n-1\tilde{\mathbb{G}}}\partial^k_q(A) = \mu_{\mathbb{G}}.Mu^q_{n\mathbb{G}}.u^q_{n\bar{\mathbb{G}}}\partial^k_q(A) = u^q_{n\mathbb{G}}.\mu_{\mathbb{G}}.\partial^k_q(A) = u^m_{n\mathbb{G}}.\mu_{\mathbb{G}}.\partial^k_q(A) = u^m_{n\mathbb{G}}.\partial^k_q.\mu_{\mathbb{G}}(A) = u^m_{n\mathbb{G}}.\partial^k_q(a)$.
$(H2)$ et $(H3)$ se vérifient sans difficulté.
Pour $(H4)$, soit $A \in (B^2|_n^m)(\mathbb{G})$, on pose $a = \mu_{\mathbb{G}}(A)$ et $\alpha = |A|$. Alors $\alpha \leq B(!_{\mathbb{G}})(a)$. La encore, seul le cas où $n = \mathrm{L}(a)$,
$m = \dim(a) = \dim(A)$ et $\mathrm{sym}(a) = \square$, est un peu plus délicat.
- Si A est irréductible, on distingue alors les cas où $\alpha = B(!_{\mathbb{G}})(a)$ (dans ce cas a est primitif et donc $A = \eta_{B\mathbb{G}}(a)$ ou $A = B\eta_{\mathbb{G}}(a)$) et $\alpha \neq B(!_{\mathbb{G}})(a)$ (dans ce cas $A \in (B|_{n-1}^m)^2(\mathbb{G})$ et, par définition,
$u^m_{n\mathbb{G}}(a) = \mu_{\mathbb{G}}.Mu^m_{n-1\mathbb{G}}.u^m_{n-1\tilde{\mathbb{G}}}(A) = \mu_{\mathbb{G}}.Mu^m_{n\mathbb{G}}.u^m_{n\hat{\mathbb{G}}}(A)$, où $\hat{\mathbb{G}} = B|_n^m(\mathbb{G})$).
- Si A n'est pas irréductible, considérons α_0 la composante primitive de α. C'est aussi la composante primitive de a. Soient encore les uniques cellules suivantes :
.. $A_0 \in B^2(\mathbb{I})$ telle que $B(!_{B\mathbb{I}})(A_0) = \alpha_0$ et $\mu_{\mathbb{I}}(A_0) = \alpha$,
.. $\mathcal{A} \in B^3(\mathbb{G})$ telle que $B^2(!_{B\mathbb{G}})(\mathcal{A}) = A_0$ et $\mu_{B\mathbb{G}}(\mathcal{A}) = A$.
Posons enfin $A' = B\mu_{\mathbb{G}}(\mathcal{A})$. On a $B(!_{B\mathbb{G}})(A') = \alpha_0$ et $\mu_{\mathbb{G}}(A') = a$. Donc A' est la décomposition primitive de a. On voit que $\mathcal{A} \in B|_{n-1}^m B^2|_{n-1}^m(\mathbb{G})$, qui est dans $(B|_{n-1}^m)^3(\mathbb{G})$, et que $\mathcal{A}$ est la décomposition primitive de A. On a donc $u^m_{n\hat{\mathbb{G}}}(A) = \mu_{\hat{\mathbb{G}}}.Mu^m_{n-1\hat{\mathbb{G}}}.u^m_{n-1\tilde{\hat{\mathbb{G}}}}(\mathcal{A})$ où rappelons le
$\hat{\mathbb{G}} = B|_n^m(\mathbb{G})$ et $\tilde{\mathbb{G}} = B|_{n-1}^m(\mathbb{G})$. D'un autre côté $\mathrm{L}'(A) \leq n$ et $\mathrm{L}(A) \leq n$.
- Si $\mathrm{L}'(A) = n$, alors $A = \eta_{B\mathbb{G}}(a)$ et donc A vérifie $(H4)$ (se voit facilement).
- Si $\mathrm{L}(A) = n$, alors $A = B\eta_{\mathbb{G}}(a)$. La encore A vérifie $(H4)$.
On peut maintenant supposer que $\mathrm{L}'(A) \leq n-1$ et $\mathrm{L}(A) \leq n-1$. Dans ce cas $A \in (B|_{n-1}^m)^2(\mathbb{G}) = \tilde{\tilde{\mathbb{G}}}$ et on a les identités suivantes (où $\mathcal{G} = B^2|_{n-1}^m(\mathbb{G})$ et $j : \mathcal{G} \to \tilde{\tilde{\mathbb{G}}}$ est l'injection canonique) :
$\mu_{\mathbb{G}}.Mu^m_{n\mathbb{G}}.u^m_{n\hat{\mathbb{G}}}(A) = \mu_{\mathbb{G}}.Mu^m_{n\mathbb{G}}.\mu_{\hat{\mathbb{G}}}.Mu^m_{n-1\hat{\mathbb{G}}}.u^m_{n-1\tilde{\hat{\mathbb{G}}}}(\mathcal{A}) =$
$\mu_{\mathbb{G}}.\mu_{M\mathbb{G}}.M^2u^m_{n\mathbb{G}}.Mu^m_{n-1\hat{\mathbb{G}}}.u^m_{n-1\tilde{\hat{\mathbb{G}}}}(\mathcal{A}) =$
$\mu_{\mathbb{G}}.M\mu_{\mathbb{G}}.M^2u^m_{n-1\mathbb{G}}.Mu^m_{n-1\tilde{\mathbb{G}}}.Mj.u^m_{n-1\mathcal{G}}(\mathcal{A}) =$
$\mu_{\mathbb{G}}.Mu^m_{n-1\mathbb{G}}.M(\mu_{\mathbb{G}}|_{n-1}^m).u^m_{n-1\mathcal{G}}(\mathcal{A}) = \mu_{\mathbb{G}}.Mu^m_{n-1\mathbb{G}}.u^m_{n-1\tilde{\mathbb{G}}}(A') = u^m_{n\mathbb{G}}(a) =$
$u^m_{n\mathbb{G}}.(\mu_{\mathbb{G}}|_n^m)(A)$.

• A partir de la famille $(u^m_{n\mathbb{G}})$ on construit une application $u_{\mathbb{G}} : B(\mathbb{G}) \to M(\mathbb{G})$ de façon évidente. On obtient ainsi un morphisme $u : \mathcal{B} \to \mathcal{M}$ (se vérifie facilement). L'unicité de la flèche u se montre par induction sur $\mathrm{L}(a) + \dim(a)$ (sans difficulté particulière).
On a ainsi montré le théorème suivant :

Théorème 5.46. : $\mathcal{B} = (\mathbb{B}, b, Cr, c)$ est un objet initial de $\mathfrak{B}$. (Ce qui prouve que $\mathbb{B}$ est "la" monade de Batanin).

Remarque 5.47. : Finalement on a bien montré que la monade de Batanin, qui n'est autre que $\mathbb{B}$ comme on vient de le voir,muni de U et de L, est une monade concrète syntaxique cartésienne et surtout pure.

Références

[1] M.A.BATANIN, *On the definition of weak ω-category*, Macquarie University Report, 96(207) : 24, (1996).

[2] M.A.BATANIN, *Monoidal globular categories as a natural environment for the theory of weak n-categories*, Advances in Mathematics 136 (1998), p. 39-103.

[3] M.A.BATANIN, *On the Penon method of weakening of algebraic structures*, Journal of Pure and Applied Algebra (2002), volume 172, pages 1-23.

[4] M.BATANIN AND R.STREET, *The universal property of the multitude of trees*, Journal of Pure and Applied Algebra (2000), volume 154, pages 3-13.

[5] J.M.BOARDMAN AND R.M.VOGT, *Homotopy Invariant Algebraic Structures on Topological Spaces*, Lecture Notes in Mathematics (1973), volume 347.

[6] A.CARBONI AND P.JOHNSTONE, *Connected limits, familial representability and Artin glueing*, Mathematical Structures in Computer Science (1995) pages 441-459.

[7] E.CHENG AND M.MAKKAI, *A note on the Penon definition of n-category*, Cahiers de Topologie et Géométrie Différentielle Catégorique (2010),volume LI-3, pages 205-223.

[8] C.EHRESMANN, *Catégories et structures*, Dunod, Paris, (1965).

[9] C.KACHOUR, *Aspects of Globular Higher Category Theory*, Thesis (2012), Macquarie University, Faculty of Science.

[10] J.PENON, *Approche polygraphique des ∞-catégories non strictes*, Cahiers de Topologie et Géométrie Différentielle Catégorique (1999), volume 1, pages 31-80.

[11] J.PENON, *Une classe d'exemples d' ∞-catégories faibles au sens de Batanin*, Cahiers de Topologie et Géométrie Différentielle Catégorique (à paraitre).

[12] V.A.SMIRNOV, *Simplicial and Operad Methods in Algebraic Topology*, American Mathematical Society, Translations of Mathematical Monographs 198

[13] R.STREET, *The role of Michael Batanin's monoidal globular categories*, Proceedings of the Workshop on Higher Category Theory and Physics at Northwestern, (1997).

[14] R.STREET, *The petit Topos of Globular Sets* Journal of Pure and Applied Algebra (2000), volume 154, pages 299-315.

Jacques PENON
25, rue Chapsal,
94340, Joinville-le-Pont
France
Email : `tryphon.penon@gmail.com`