CAHIERS DE TOPOLOGIE ET GEOMETRIE DIFFERENTIELLE CATEGORIQUES
VOLUME LXV-1 (2024)

Ω-ENSEMBLES ET ENSEMBLES EMPIRIQUES REVISITÉS

Christine BERTRAND et Michel DE GLAS

Résumé : Cet article est consacré, en premier lieu, à l'examen de la théorie des Ω-ensembles, à en évaluer l'intérêt mathématique au regard des hypothèses qui la fondent et la pertinence en tant que pourvoyeuse présumée d'un modèle des notions intuitives de degré d'appartenance et d'existence. Cet examen conduit, en second lieu, à étudier à nouveaux frais la théorie des ensembles empiriques (ou ensembles observés) introduite par Bénabou. On montre, en particulier, que la catégorie des ensembles empiriques n'est un topos que modulo le sacrifice de l'intuition sous-jacente à la notion d'observation.

Abstract : This paper is devoted first to revisit Ω-set theory, to assess its mathematical interest with regard to the hypotheses it is based on and its relevance as an alleged provider of a model to the intuitive notions of membership and existence degrees. This then leads to re-examine empirical (or observed) set theory à la Bénabou. It is shown in particular that the category of empirical sets is a topos only if one sacrifices the intuition underlying the notion of observation.

Keywords : Ω-sets, empirical sets, topoï.

Mathematics Subject Classification (2010). 18B25, 03C90, 54B40

1. Introduction

Le concept d'Ω-ensemble a donné lieu à une abondante littérature [1], [4], [7], en raison, d'une part, du fait que la catégorie Ω-$\mathbb{SET}$ des Ω-ensembles est équivalente à la catégorie $\mathbb{Sh}(\Omega)$ des faisceaux sur Ω, et, d'autre part, du fait que le concept d'Ω-ensemble est censé offrir un modèle mathématique aux notions intuitives de degré d'égalité et de degré d'existence.

Nous montrons, dans cet article, que cette interprétation informelle n'est fondée que sous certaines hypothèses en vertu desquelles Ω-$\mathbb{SET}$ perd une grande part de son intérêt mathématique : la catégorie cesse d'être un topos et n'est, dès lors, plus équivalente à $\mathbb{Sh}(\Omega)$.

Nous montrons, de plus, que dans le cadre de la théorie des Ω-ensembles, il est en fait impossible de préserver le substrat intuitif de cette théorie (gradualité de l'égalité et de l'existence) sans un appauvrissement des structures mathématiques : la catégorie des Ω-ensembles permettant de rendre compte de l'intuition sous-jacente est un topos booléen.

Cette contradiction entre la recherche a priori d'une structure mathématique (celle de topos) et la préservation du substrat intuitif à l'origine de la théorie des Ω-ensembles conduit, pour tenter d'en réduire les effets, à une autre alternative : utiliser des sous-catégories de Ω-$\mathbb{SET}$ par restriction de l'ensemble des objets ($C\Omega$-$\mathbb{SET}$) ou par restriction de l'ensemble des flèches ($F\Omega$-$\mathbb{SET}$). Nous privilégierons le second terme de cette alternative, notamment parce que c'est la définition des flèches de Ω-$\mathbb{SET}$ qui s'écarte de l'intuition originaire et donne naissance à la contradiction.

C'est sur ces bases que Bénabou a conçu le concept d'ensemble empirique [2] ou d'ensemble observé par une famille I d'observateurs. Ainsi la théorie des ensembles empiriques est-elle confrontée au même dilemne que que la théorie des Ω-ensembles : la préservation du substrat intuitif qui a présidé à leur définition entre en contradiction avec le désir de munir la catégorie des ensembles empiriques d'une structure toposique. Nous procèderons au même choix que dans le cas des Ω-ensembles généraux, notamment parce que si la définition des objets de la catégorie capte l'intuition sous-jacente, il en va tout autrement des flèches.

De tels résultats conduisent à revisiter le concept même d'ensemble empirique, en privilégiant le "point de vue" des observateurs et des espaces d'observations. Nous montrons, toutefois, qu'il est impossible de s'affranchir du cadre des topoï booléens, en conséquence de quoi la formalisation de la notion d'ensemble empirique nécessite une refonte.

2. Ω-ensembles

2.1 Rappels

Soit $(\Omega, \wedge, \vee, \leqslant)$ une algèbre de Heyting complète avec un plus petit élément 0 et un plus grand élément 1.

Un Ω-ensemble $\boldsymbol{A}$ [4] [6] est la donnée d'un ensemble A et d'une application de $A \times A$ dans Ω, $< x, y > \mapsto [\![x = y]\!]$, telle que :

$$[\![x = y]\!] \leqslant [\![y = x]\!] \qquad (\Omega_1)$$

$$[\![x = y]\!] \wedge [\![y = z]\!] \leqslant [\![x = z]\!], \qquad (\Omega_2)$$

l'élément $[\![x = x]\!]$ étant noté $[\![Ex]\!]$.

Étant donnés deux Ω-ensembles $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$, on considère les applications $f : A \times B \to \Omega$ qui vérifient, pour tous $x, x' \in A$ et tous $y, y' \in B$:

$$[\![x = x']\!] \wedge f(< x, y >) \leqslant f(< x', y >) \qquad (\Omega_3)$$

$$f(< x, y >) \wedge [\![y = y']\!] \leqslant f(< x, y' >) \qquad (\Omega_4)$$

$$f(< x, y >) \wedge f(< x, y' >) \leqslant [\![y = y']\!] \qquad (\Omega_5)$$

$$[\![x = x]\!] = \bigvee_{y \in B} f(< x, y >). \qquad (\Omega_6)$$

On note Ω-$\mathbb{SET}$ la catégorie dont les objets sont les Ω-ensembles (satisfaisant (Ω_1) et (Ω_2)) et les flèches les applications $f : A \times B \to \Omega$ satisfaisant (Ω_3) - (Ω_6). La composition de $f : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$ et $g : \boldsymbol{B} \to \boldsymbol{C}$ est la flèche $g \circ f : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{C}$ définie par l'application $g \circ f : A \times C \to \Omega$ telle que :

$$(g \circ f)(< x, z >) = \bigvee_{y \in B}(f(< x, y >) \wedge g(< y, z >)).$$

La flèche $\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A}$ définie par $< x, y > \mapsto [\![x = y]\!]$ est la flèche identité, notée id_A.

L'objet $\mathbf{1}$, défini par l'Ω-ensemble $\{0\}$, $[\![0 = 0]\!] = 1$, est tel que, pour tout objet $\boldsymbol{A}$, il existe une flèche unique $f : \boldsymbol{A} \to \mathbf{1}$, $< x, 0 > \mapsto [\![Ex]\!]$. Donc $\mathbf{1}$ est un objet terminal de Ω-$\mathbb{SET}$.

Le produit de deux Ω-ensembles $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$ est l'Ω-ensemble $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$ défini par $A \times B$ et l'application $(A \times B)^2 \to \Omega$ telle que, pour tous $x, x' \in A$ et tous $y, y' \in B$, on ait :

$$[\![< x, y >=< x', y' >]\!] = [\![x = x']\!] \wedge [\![y = y']\!].$$

Le produit fibré d'un couple $\boldsymbol{A} \xrightarrow{f} \boldsymbol{C} \xleftarrow{g} \boldsymbol{B}$ de flèches est le couple $\boldsymbol{A} \xleftarrow{f'} \boldsymbol{D} \xrightarrow{g'} \boldsymbol{B}$, où $\boldsymbol{D}$ est défini par $D = A \times B$ et l'application de $(A \times B)^2$ dans Ω telle que :

$$[\![< x, y >=< x', y' >]\!] = [\![E < x, y >]\!] \wedge [\![E < x', y' >]\!] \wedge [\![x = x']\!] \wedge [\![y = y']\!],$$

où : $\quad [\![E < x, y >]\!] = \bigvee_{c \in C} (f(< x, c >) \wedge g(< y, c >)),$

et, pour tout $a \in A$ et tout $b \in B$:

$$f'(< x, y >, a) = [\![E < x, y >]\!] \wedge [\![x = a]\!],$$

$$g'(< x, y >, b) = [\![E < x, y >]\!] \wedge [\![y = b]\!].$$

Un sous-ensemble d'un Ω-ensemble $\boldsymbol{A}$ est une application $s : A \to \Omega$ telle que, pour tout $x, y \in A$:

$$(i) \;\; s(x) \wedge [\![x = y]\!] \leqslant s(y),$$

$$(ii) \;\; s(x) \leqslant [\![Ex]\!].$$

Un sous-objet d'un objet $\boldsymbol{B}$ est un mono $f : \boldsymbol{A} \rightarrowtail \boldsymbol{B}$, c'est-à-dire une flèche f telle que, pour tous $x, y \in A$ et $z \in B$,

$$f(< x, z >) \wedge f(< y, z >) \leqslant [\![x = y]\!].$$

Alors, à tout sous-objet f de $\boldsymbol{B}$ on peut associer un sous-ensemble de $\boldsymbol{B}$, c'est-à-dire une application $s_f : B \to \Omega$ définie par :

$$s_f(y) = \bigvee_{x \in A} f(< x, y >).$$

Réciproquement, un sous-ensemble $s : B \to \Omega$ de $\boldsymbol{B}$ définit un sous-objet $f_s : \boldsymbol{A_s} \rightarrowtail \boldsymbol{B}$, où $\boldsymbol{A_s}$ est l'entité définie par B et l'application :

$$f_s : \;\; < x, y > \mapsto [\![x = y]\!] \wedge s(x) \wedge s(y).$$

Donc ([4], p. 281), les sous-objets d'un objet $\boldsymbol{B}$ sont entièrement définis par les sous-ensembles de $\boldsymbol{B}$.

Soit, enfin, $\boldsymbol{\Omega}$ l'Ω-ensemble défini par Ω et l'application de $\Omega \times \Omega$ dans Ω, $< p, q > \mapsto [\![p = q]\!]$ telle que :

$$[\![p = q]\!] = (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$$

où $\Rightarrow$ est la pseudo-complémentation relative dans l'algèbre de Heyting Ω. Soit $\top : \mathbf{1} \to \boldsymbol{\Omega}$ la flèche définie par

$$\top(< 0, p >) = [\![p = 1]\!] = p.$$

À tout sous-objet $f : \boldsymbol{A} \rightarrowtail \boldsymbol{X}$ (donc à tout sous-ensemble $s_f : A \to \Omega$) de $\boldsymbol{X}$ peut être associée sa flèche caractéristique $\chi_f : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{\Omega}$ définie par :

$$\chi_f(< x, p >) = [\![Ex]\!] \wedge [\![s_f(x) = p]\!].$$

Alors $\chi_f \circ f = \top \circ\, !$, où ! est la flèche $\boldsymbol{A} \to \mathbf{1}$. Il s'ensuit que Ω-$\mathbb{SET}$ est un topos.

2.2 Analyse critique

Un objet $\boldsymbol{A}$ de Ω-$\mathbb{SET}$ est défini par la donnée d'un ensemble A et d'une application $A \times A \to \Omega$ qui, à tout couple $< x, y >$ associe le "degré d'égalité" $[\![x = y]\!]$ de x et y, l'entité $[\![x = x]\!]$, notée $[\![Ex]\!]$, pouvant être vue comme le "degré d'existence" de x. De la même façon, pour un sous-ensemble $s : A \to \Omega$ d'un Ω-ensemble $\boldsymbol{A}$, $s(x)$ est le "degré" auquel x appartient à l'"ensemble" s.

Pour ce qui concerne les flèches de Ω-$\mathbb{SET}$, le "graphe" d'une flèche $f : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$ est un sous-ensemble de $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$, soit une application de $A \times B$ dans Ω qui peut être vue, en première approximation, comme une application $f : A \to B$, en associant à $< x, y >$ la "valeur de vérité" $[\![f(x) = y]\!] \in \Omega$, degré d'égalité de $f(x) = y$, c'est-à-dire la mesure du degré auquel y est l'image de x par f. Les axiomes de définition d'une flèche de Ω-$\mathbb{SET}$ peuvent alors être interprétés de la façon suivante : (Ω_3) et (Ω_4) imposent l'extensionnalité, c'est-à-dire la validité des formules :

$$(x \approx x') \wedge (f(x) \approx y) \Rightarrow (f(x') \approx y)$$

et :

$$(f(x) \approx y) \wedge (y \approx y') \Rightarrow (f(x) \approx y'),$$

instances de l'axiome d'identité. L'axiome (Ω_5) signifie que deux éléments y et y' sont des images de x par f pour autant qu'ils sont égaux. L'axiome (Ω_6) permet d'interpréter une formule quantifiée existentiellement : une formule du type " il existe $x \in A$ tel que $\phi(x)$" a pour valeur de vérité $\bigvee_{x \in B} \phi(x)$. (Ω_6) signifie également que tout x de A a une image par f, c'est-à-dire que f est une application. Enfin, puisque $[\![x = x]\!] = [\![Ex]\!]$, une lecture de (Ω_6) est : tout x de A existe pour autant qu'il a une image dans B.

Notons par ailleurs, que l'hypothèse d'inf-complétion de Ω, bien que superflue pour établir la structure de topos de Ω-$\mathbb{SET}$, permet, par dualité, l'interprétation de formules quantifiées universellement : pour tout $x \in B$, $\phi(x)$ a pour valeur de vérité $\bigwedge_{x \in B} [\![\phi(x)]\!]$.

Toutefois, ces interprétations informelles des axiomes de définition de Ω-$\mathbb{SET}$ reposent sur l'hypothèse que $f(< x, y >)$ et $[\![f(x) = y]\!]$ sont interchangeables. Or pour une flèche $f : A \times B \to \Omega$, il peut ne pas exister d'application $\tilde{f} : A \to B$ (on utilise désormais deux notations différentes pour éviter toute confusion) telle que

$$f(< x, y >) = [\![\tilde{f}(x) = y]\!].$$

Interpréter $f(< x, y >)$ comme le degré d'égalité de $\tilde{f}(x)$ et y ou le degré auquel y est l'image de x par $\tilde{f}$ (interprétation censée conférer à la structure toposique de Ω-$\mathbb{SET}$ un surcroît d'intelligibilité), sachant qu'un tel $\tilde{f}$ peut ne pas exister, confine dès lors à l'*abstract nonsense*. En particulier, la notation $[\![f(x) = y]\!]$ dans la définition informelle de $f(< x, y >)$ est pour le moins maladroite, pour ne pas dire fautive.

A contrario, si l'on impose à toute flèche $f : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$ dans Ω-$\mathbb{SET}$ d'être définie par l'intermédiaire d'une fonction $\tilde{f} : A \to B$, c'est-à-dire si toute flèche $f : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$ est une fonction $f : A \times B \to \Omega$ telle que :

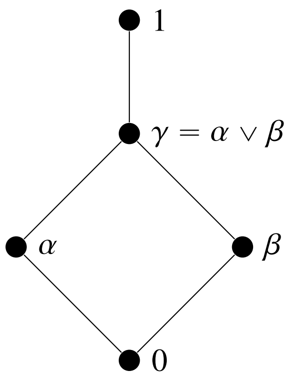
$$f(< x, y >) = [\![\tilde{f}(x) = y]\!]$$

pour une certaine fonction $\tilde{f} : A \to B$, ou encore :

$$f(< x, y >) = [\![\tilde{f}(x) = y]\!] \wedge [\![x = x]\!]$$

pour exprimer le fait que l'égalité ne vaut que pour autant que x existe, et que l'on note les catégories correspondantes $F\varOmega$-$\mathbb{SET}$ et $SF\varOmega$-$\mathbb{SET}$ respectivement, alors la justification informelle des axiomes de définition de $\varOmega$-$\mathbb{SET}$ est parfaitement fondée, mais ni $F\varOmega$-$\mathbb{SET}$ ni $SF\varOmega$-$\mathbb{SET}$ *n'est un topos*.

Considérons, en effet, l'exemple suivant : soit $\varOmega$ l'algèbre de Heyting définie par :



et soient $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$ les deux $\varOmega$-ensembles définis par :

$$A = \{0, 1, 2\}, \quad [\![0 = 1]\!] = \alpha,\ [\![0 = 2]\!] = \beta,\ [\![1 = 2]\!] = 0, \quad [\![a = a]\!] = \gamma,$$

$$B = \{1, 2\}, \quad [\![1 = 2]\!] = 0, \quad [\![b = b]\!] = \gamma,$$

pour tout $a \in A$ et tout $b \in B$.

Soit $f = id_{\boldsymbol{A}} : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A}$ la flèche identité, c'est-à-dire la fonction de $A \times A$ dans $\varOmega$: $< x, y > \mapsto [\![x = y]\!]$, et soit g la flèche d'inclusion $g : \boldsymbol{B} \hookrightarrow \boldsymbol{A}$ définie par :

$$g : \boldsymbol{B} \times \boldsymbol{A} \to \varOmega, \quad < x, y > \mapsto [\![x = y]\!],$$

c'est-à-dire $g(< x, y >) = f(< x, y >)$ pour tout $< x, y > \in B \times A$.

Alors f et g sont deux monos qui correspondent, respectivement, aux deux sous-ensembles s_f et s_g de $\boldsymbol{A}$, c'est -à-dire aux deux applications s_f et s_g de $A \to \varOmega$, définies par :

$$s_f(y) = \bigvee\nolimits_{x \in A} [\![x = y]\!] = [\![0 = y]\!] \vee [\![1 = y]\!] \vee [\![2 = y]\!],$$

$$s_g(y) = \bigvee\nolimits_{x \in B} [\![g(x) = y]\!] = [\![1 = y]\!] \vee [\![2 = y]\!],$$

pour tout $y \in A$.
Donc $s_f(y) = s_g(y)$ pour tout $y \in A$. Donc $s_f = s_g$. Ainsi f et g désignent le même sous-objet de $\boldsymbol{A}$ (c'est-à-dire $[f] = [g]$ ou $f \approx g$) dans Ω-$\mathbb{SET}$. Donc g est un mono et un épi (et donc un iso de Ω-$\mathbb{SET}$). De même, g est un mono et un épi de $SF\Omega$-$\mathbb{SET}$. Supposons que g soit un iso de $SF\Omega$-$\mathbb{SET}$. Alors, il existe un iso $j : \boldsymbol{A} \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow \boldsymbol{B}$ dont l'inverse est un iso $k : \boldsymbol{B} \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow \boldsymbol{A}$ tels que le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\boldsymbol{A} \arrow[dr, "f = id_A"] \arrow[dd, shift right, "k"'] & \\
& \boldsymbol{A} \\
\boldsymbol{B} \arrow[uu, hook, shift right, "j"'] \arrow[ur, hook, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

commute; la flèche $j : \boldsymbol{A} \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow \boldsymbol{B}$ est l'application $A \times B \to \Omega$ définie par :

$$j(< x, y >) = [\![x = y]\!] \wedge [\![x = x]\!] = [\![x = y]\!].$$

Supposons alors qu'il existe une application $\tilde{j} : A \to B$ telle que :

$$j(< x, y >) = [\![\tilde{j}(x) = y]\!] \wedge [\![x = x]\!] = [\![\tilde{j}(x) = y]\!],$$

pour tout $x \in A$ et tout $y \in B$.
Alors il existe a_1, $a_2 \in A$ tels que $\tilde{j}(a_1) = \tilde{j}(a_2) = b \in B$, c'est-à-dire $j(< a_1, b >) = j(< a_2, b >)$. Donc, on a $[\![a_1 = b]\!] = [\![a_2 = b]\!]$ bien que $a_1 \neq a_2$: une contradiction.
Inversement, si l'on impose à j d'être définie par $j(< x, y >) = [\![\tilde{j}(x) = y]\!]$, pour un certain $\tilde{j} : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$, alors $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$ ne sont pas isomorphes. Donc g n'est pas un iso de $SF\Omega$-$\mathbb{SET}$.

Cet exemple est, en fait, générique dans le sens suivant. Toute flèche $h : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$ avec $B \subsetneq A$ et $h(< x, y >) = [\![x = y]\!]$ est un mono puisque, pour tous $x, z \in A$ et tout $y \in B$,

$$h(< x, y >) \wedge h(< z, y >) = [\![x = y]\!] \wedge [\![y = z]\!] \leqslant [\![x = z]\!]$$

et un épi puisque, pour tout $y \in B$,

$$\bigvee_{x \in A} h(< x, y >) = \bigvee_{x \in A} [\![x = y]\!] = [\![y = y]\!].$$

Dans Ω-$\mathbb{SET}$, $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$ sont donc des objets isomorphes mais il n'existe pas d'application $\tilde{h} : A \to B$ telle que $h(< x, y >) = [\![\tilde{h}(x) = y]\!]$. Inversement, dans $SF\Omega$-$\mathbb{SET}$ où l'on impose que toute flèche soit définie au moyen d'une telle égalité, $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$ ne sont pas isomorphes. h est donc un mono et un épi mais n'est pas un iso. Donc $SF\Omega$-$\mathbb{SET}$ *n'est pas un topos*.

Il en est de même de $F\Omega$-$\mathbb{SET}$. Il suffit, en effet, d'adapter le contre-exemple ci-dessus en prenant $\gamma = 1$.

Il est donc clair que, d'un côté, la "définition" informelle de $f(< x, y >)$ comme degré d'égalité de $\tilde{f}(x)$ et y, non pertinente pour une large classe d'Ω-ensembles, n'est pas tenable. L'intérêt et la pertinence du concept même d'Ω-ensemble sont alors à établir.

D'un autre côté, les hypothèses sur les flèches confèrent à $F\Omega$-$\mathbb{SET}$ et $SF\Omega$-$\mathbb{SET}$ un substrat intuitif, mais entraînent un appauvrissement de la structure catégorique correspondante. Cumuler la richesse mathématique de la structure, tout en en préservant la pertinence en tant que modèle mathématique, nécéssite une modification de la définition des objets et/ou des flèches considérés.

Une première possibilité est offerte par la sous-catégorie $C\Omega$-$\mathbb{SET}$ de Ω-$\mathbb{SET}$ des Ω-ensembles complets [4] : ses objets sont les Ω-ensembles $\boldsymbol{A}$ dont tous les singletons sont de la forme $a : x \mapsto [\![x = a]\!]$ pour un unique $a \in A$; ses flèches $f : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$ sont les fonctions $f : A \to B$ telles que :

$$[\![x = y]\!] \leqslant [\![f(x) = f(y)]\!], \qquad (C\Omega_1)$$

$$[\![x = x]\!] \leqslant [\![f(x) = f(x)]\!]. \qquad (C\Omega_2)$$

Les catégories Ω-$\mathbb{SET}$ et $C\Omega$-$\mathbb{SET}$ sont équivalentes ([4], exercice 27 p. 394). $C\Omega$-$\mathbb{SET}$ est donc un topos dans lequel, les flèches $f : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$ sont des fonctions $f : A \to B$; l'interprétation de $f(< x, y >) = [\![f(x) = y]\!]$ comme étant la mesure du degré d'égalité de $f(x)$ et de y (ou le degré auquel y est l'image de x par f) est possible. Toutefois, en restreignant ainsi l'ensemble des objets, la notion intuitive de degré d'égalité dans la définition des objets de Ω-$\mathbb{SET}$ perd une partie de sa pertinence dans $C\Omega$-$\mathbb{SET}$.

2.3 La catégorie $F^*\Omega$-$\mathbb{SET}$

Au vu du contre-exemple développé en **2.2**, une condition nécéssaire pour que la catégorie des Ω-ensembles soit munie de propriétés satisfaisantes (tout sous-objet f d'un objet $\boldsymbol{A}$ est défini par un sous-ensemble s_f de $\boldsymbol{A}$) est que, pour tout objet $\boldsymbol{A}$, on ait pour tout $x \in A$:

$$\bigvee_{\substack{y\in A\\ y\neq x}} [\![x = y]\!] < [\![x = x]\!]. \qquad (*)$$

Est-ce une condition suffisante ? Soit $F^*\Omega$-$\mathbb{SET}$ la catégorie correspondante, c'est-à-dire la catégorie dont les objets sont les Ω-ensembles satisfaisant $(*)$ ainsi que (Ω_1) et (Ω_2) et dont les flèches $f : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$ sont les applications : $A \times B \to \Omega$, $< x, y > \mapsto [\![\tilde{f}(x) = y]\!]$, $\tilde{f} : A \to B$, telles que :

$$[\![x = x']\!] \wedge [\![\tilde{f}(x) = y]\!] \leqslant [\![\tilde{f}(x') = y]\!], \qquad (F\Omega_3)$$

$$[\![\tilde{f}(x) = y]\!] \wedge [\![y = y']\!] \leqslant [\![\tilde{f}(x) = y']\!], \qquad (F\Omega_4)$$

$$[\![\tilde{f}(x) = y]\!] \wedge [\![\tilde{f}(x) = y']\!] \leqslant [\![y = y']\!], \qquad (F\Omega_5)$$

$$[\![x = x]\!] = \bigvee_{y\in B} [\![\tilde{f}(x) = y]\!]. \qquad (F\Omega_6)$$

$F^*\Omega$-$\mathbb{SET}$ est une sous-catégorie pleine de $F\Omega$-$\mathbb{SET}$.

Théorème : *$F^*\Omega$-$\mathbb{SET}$ est un topos booléen.*

Preuve : (i) Remarquons tout d'abord qu'une condition nécéssaire et suffisante pour que Ω satisfasse $(*)$ est que l'on ait :

$$\bigvee_{p\in\Omega\setminus\{1\}} p \neq 1. \qquad (**)$$

En effet, pour tout $p \notin \{0,1\}$,

$$\bigvee_{q\in\Omega\setminus\{1\}} q = \bigvee_{q\in\Omega\setminus\{0,1\}} q = \bigvee_{q\in\Omega\setminus\{0,1\}} q \vee \neg q \;\; \geqslant \; p \vee \neg p,$$

où $\neg$ désigne la pseudo-complémentation dans Ω ($\neg p = p \Rightarrow 0$). Donc, si (**) est satisfaite, $p \vee \neg p < 1$ pour tout $p \notin \{0,1\}$. Ainsi

$$\bigvee_{p\in\Omega\setminus\{q\}} [\![p = q]\!] \;\leqslant\; q \vee \neg q \; < 1.$$

De plus,

$$\bigvee_{p\in\Omega\setminus\{1\}} [\![p = 1]\!] = \bigvee_{p\in\Omega\setminus\{1\}} p \;\; \neq 1$$

et

$$\bigvee_{p\in\Omega\setminus\{0\}} [\![p = 0]\!] = \bigvee_{p\in\Omega\setminus\{1\}} \neg p \;\; \neq 1.$$

Donc, pour tout $q \in \Omega$,

$$\bigvee_{p\in\Omega\setminus\{q\}} [\![p = q]\!] \; < \; [\![p = p]\!] \; = 1,$$

c'est-à-dire que Ω satisfait $(*)$. La réciproque est évidente.

(ii) On définit, dans $F^*\Omega$-$\mathbb{SET}$, les notions d'objet terminal, de produit, de produit fibré, d'exponentiation de la même façon que dans Ω-$\mathbb{SET}$. Pour démontrer que $F^*\Omega$-$\mathbb{SET}$ est un topos, il suffit donc de démontrer l'existence d'un classificateur de sous-objets. Une flèche $f : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$ dans $F\Omega$-$\mathbb{SET}$ est un mono si et seulement si

$$[\![\tilde{f}(x) = z]\!] \wedge [\![\tilde{f}(y) = z]\!] \leqslant [\![x = y]\!],$$

pour tout $x, y \in A$ et tout $z \in B$. De même, f est un épi si et seulement si :

$$\bigvee_{x\in A} [\![\tilde{f}(x) = y]\!] = [\![y = y]\!],$$

pour tout $y \in B$. À tout mono $f : \boldsymbol{A} \rightarrowtail \boldsymbol{B}$ on peut associer un sous-ensemble de $\boldsymbol{B}$, c'est-à-dire une application $s_f : B \to \Omega$ définie par :

$$s_f(y) = \bigvee_{x\in A} [\![\tilde{f}(x) = y]\!].$$

Il convient alors de démontrer que, dans $F^*\Omega$-$\mathbb{SET}$, pour tout objet $\boldsymbol{B}$ et tout sous-objet f de $\boldsymbol{B}$, la correspondance $f \mapsto s_f$ est bijective, à la différence de ce qui se produit dans $F\Omega$-$\mathbb{SET}$. Soient donc $f : \boldsymbol{A} \rightarrowtail \boldsymbol{B}$ et $g : \boldsymbol{C} \rightarrowtail \boldsymbol{B}$ deux sous-objets de $\boldsymbol{B}$ tel que $s_f = s_g$ c'est-à-dire tels que, pour tout $a \in B$,

$$\bigvee_{z\in C}[\![\tilde{g}(z) = a]\!] = \bigvee_{z\in A}[\![\tilde{f}(z) = a]\!],$$

et, pour tout $u \in A$, en application de $(*)$,

$$\bigvee_{z\in C}[\![\tilde{g}(z) = \tilde{f}(u)]\!] = \bigvee_{x\in A}[\![\tilde{f}(x) = \tilde{f}(u)]\!] \geqslant [\![\tilde{f}(u) = \tilde{f}(u)]\!].$$

Supposons qu'il existe $u \in X$ tel que, pour tout $z \in C$, $\tilde{g}(z) \neq \tilde{f}(u)$. Alors :

$$\bigvee_{z\in C}[\![\tilde{g}(z) = \tilde{f}(u)]\!] \leqslant \bigvee_{y\in B\setminus\{\tilde{f}(u)\}}[\![y = \tilde{f}(u)]\!] \lneq [\![\tilde{f}(u) = \tilde{f}(u)]\!],$$

ce qui est impossible. Donc, pour tout $u \in A$, il existe un $z \in C$ tel que $\tilde{g}(z) = \tilde{f}(u)$, c'est-à-dire qu'il existe une flèche $k : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{C}$ telle que $f = g \circ k$. Donc k est un mono et $f \subseteq g$. De la même façon, on peut démontrer que $g = f \circ h$ pour un certain $h : \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{A}$, c'est-à-dire $g \subseteq f$. Donc $f \approx g$. Ainsi f et g sont le même sous-objet de $\boldsymbol{B}$. Donc la correspondance $f \mapsto s_f$ est injective. Elle est évidemment surjective.

Enfin, soit $\Omega' = \{p_M, 1\}$ où $p_M = \bigvee\limits_{p\in\Omega\setminus\{1\}} p$ et soit $\top : \mathbf{1} \to \boldsymbol{\Omega}'$, $\{0\} \mapsto 1$. Alors :

$$[\![p_M = p_M]\!] = 1, \quad [\![p_M = 1]\!] = p_M.$$

À tout sous-objet $f : \boldsymbol{A} \rightarrowtail \boldsymbol{B}$ de $\boldsymbol{B}$, dont le sous-ensemble correspondant est $s_f : B \to \Omega$, on associe $\chi_f : \boldsymbol{B} \to \boldsymbol{\Omega}'$ définie par :

$$\tilde{\chi}_f : B \xrightarrow{s_f} \Omega \xrightarrow{\eta} \Omega'$$

où η est la fonction définie par : $\eta(y) = 1$ si et seulement si $s_f(y) = 1$ et $\eta(y) = p_M$ si et seulement si $s_f(y) \neq 1$. Il est alors facile de montrer que :

$$\begin{tikzcd} \boldsymbol{A} \arrow[r, tail, "f"] \arrow[d, "!"'] & \boldsymbol{B} \arrow[d, "\chi_f"] \\ \mathbf{1} \arrow[r, "\top"'] & \boldsymbol{\Omega}' \end{tikzcd}$$

est un produit fibré. Donc $F^*\Omega$-$\mathbb{SET}$ est un topos booléen. □

Il va sans dire que $F^*\Omega$-$\mathbb{SET}$ offre un cadre formel exempt d'ambiguïté aux notions intuitives d'existence potentielle et d'égalité partielle, mais les conditions imposées sont très contraignantes. Elles affectent non seulement les flèches mais également les objets : $F^*\Omega$-$\mathbb{SET}$ n'est pas une sous-catégorie de Ω-$\mathbb{SET}$. Pour ce qui concerne Ω, si Ω est une topologie sur un certain ensemble X, la condition $(*)$ suppose que

$$\bigcup_{A \in \Omega \setminus \{X\}} A \neq X,$$

et, par suite, que (X, Ω) soit connexe et quasi-compact. Devoir choisir entre des conditions contraignantes (qui permettent à $F^*\Omega$-$\mathbb{SET}$ d'être un topos) et la faible pertinence du modèle mathématique fourni par Ω-$\mathbb{SET}$ suggère que la structure de topos ne présente peut-être pas l'intérêt qu'on lui accorde généralement en tant que "bonne" généralisation de la catégorie $\mathbb{SET}$.

3. Ensembles empiriques

3.1 Les ensembles empiriques à la Bénabou

Le concept d'ensemble empirique fut introduit par Bénabou [2]. Soit I un ensemble d'observateurs observant un ensemble X. Pour $x, y \in X$, on pose :

$$\begin{aligned} V(x) &= \{i \in I : i \text{ voit } x\}, \\ V(x,y) &= \{i \in I : i \text{ confond } x \text{ et } y\}. \end{aligned}$$

En supposant que i voit x si et seulement si i confond x et x, on a :

$$V(x) = V(x, x).$$

On suppose que l'ensemble I est muni d'une topologie Θ et que, pour tout couple $(x, y) \in X \times X$, $V(x, y)$ est un ouvert de I. Cette hypothèse traduit l'idée que si un observateur $i \in I$ confond x et y, alors tout observateur j suffisamment proche de i confond également x et y. On suppose, en outre, que V satisfait l'axiomatique suivante :

$$V(x, y) \subseteq V(y, x), \tag{E_1}$$
$$V(x, y) \cap V(y, z) \subseteq V(x, z), \tag{E_2}$$

c'est-à-dire que V est symétrique (si i confond x et y alors il confond y et x) et transitive (si i confond x et y et y et z, alors i confond x et z).

L'entité composée d'un ensemble X et d'une application $V : X \times X \to \Theta$ satisfaisant (E_1) et (E_2) (dite ici "fonction d'observation") est appelée *ensemble empirique (observé par I)*.

Il est évident que si l'on pose, pour $x \in X$ et $y \in Y$,

$$[\![x = y]\!] = V(x, y),$$
$$[\![x = x]\!] = V(x),$$

un ensemble empirique est un Θ-ensemble, c'est-à-dire un Ω-ensemble avec $\Omega = \Theta$.

Soient (X, V) et (Y, W) deux ensembles empiriques. On appelle *fonction empirique* $f : (X, V) \to (Y, W)$ une application $f : X \times Y \to \Theta$, définie par

$$f(x, y) = \{i \in I : i \text{ voit que } y = fx\},$$

$f(x, y)$ peut donc être considéré comme l'ensemble des observateurs qui "voient que $y = fx$". Cette écriture informelle permet de dégager les axiomes suivants :

$$f(x, y) \cap V(x, x') \subseteq f(x', y) \tag{E_3}$$
$$W(y, y') \cap f(x, y) \subseteq f(x, y') \tag{E_4}$$
$$f(x, y) \cap f(x, y') \subseteq W(y, y') \tag{E_5}$$
$$V(x) = \bigcup\{f(x, y) : y \in Y\} \tag{E_6}$$

pour tous $x, x' \in X$ et tous $y, y' \in Y$.

La première idée qui vient à l'esprit est de donner à l'écriture ci-dessus une lecture littérale (à défaut de quoi l'introduction de l'équation $fx = y$ serait fautive) et ainsi de faire converger l'intuition sous-jacente (les observateurs voient que $y = fx$) et la définition formelle de $f(x, y)$, c'est-à-dire de supposer que, pour toute fonction empirique : $f : X \times Y \to \Theta$, il existe une fonction $\tilde{f} : X \to Y$ telle que :

$$f(x, y) = \{i \in I : \tilde{f}(x) = y\}.$$

Considérons alors, dans un premier temps, la catégorie dont les objets sont les ensembles empiriques et les flèches les fonctions empiriques ainsi définies.

Remarquons tout d'abord que :

$$f(x, y) = W(y, \tilde{f}(x)).$$

Bien que la signification de l'expression "l'observateur i voit que $\tilde{f}(x) = y$" – laquelle intervient dans la définition de $f(x, y)$ – ne soit pas exempte d'ambiguïté, nous avons en effet :

(1) Si $i \in f(x, y)$ alors i voit que $\tilde{f}(x) = y$. Supposons que $i \notin W(y, \tilde{f}(x))$. Alors i ne confond pas y et $\tilde{f}(x)$. Donc i voit que $\tilde{f}(x) \neq y$. Donc $i \notin f(x, y)$, ce qui est impossible.

(2) Réciproquement, si $i \in W(y, \tilde{f}(x))$ alors i confond $\tilde{f}(x)$ et y. Supposons que i n'est pas élément de $f(x, y)$. Alors i ne voit pas que $\tilde{f}(x) = y$. Donc i ne confond pas $\tilde{f}(x)$ et y c'est-à-dire $i \notin W(y, \tilde{f}(x))$, ce qui est impossible.

Enfin, une flèche $f : (X, V) \to (Y, W)$, c'est-à-dire une fonction empirique, est définie par :

$$f(x, y) = W(y, \tilde{f}(x)) = [\![y = \tilde{f}(x)]\!].$$

La catégorie ainsi construite coïncide avec la catégorie notée $F\Theta$-$\mathbb{SET}$, c'est-à-dire avec $F\Omega$-$\mathbb{SET}$ pour $\Omega = \Theta$.

On pourrait définir une fonction empirique en posant :

$$f(x,y) = W(y, \tilde{f}(x)) \cap V(x),$$

définition suggérée dans certains passages de [2], bien que contradictoire avec la définition de $f(x,y)$ ci-dessus. Cette flèche satisfait $(F\Omega_3)$-$(F\Omega_5)$ mais ne vérifie pas $(F\Omega_6)$, c'est-à-dire, dans la notation des ensembles empiriques :

$$V(x) = \bigcup_{y\in Y} W(y, \tilde{f}(x)),$$

mais elle vérifie seulement :

$$V(x) = \bigcup_{y\in Y} f(x,y),$$

c'est-à-dire l'équivalent de (Ω_6). La catégorie correspondante est notée $SF\Theta$-$\mathbb{SET}$ puisqu'elle coincide avec $SF\Omega$-$\mathbb{SET}$ pour $\Omega = \Theta$.

En tout état de cause, que les flèches (c'est-à-dire les fonctions empiriques) soient définies par :

$$f(x,y) = W(y, \tilde{f}(x))$$

ou par :

$$f(x,y) = W(y, \tilde{f}(x)) \cap V(x),$$

les catégories correspondantes $F\Theta$-$\mathbb{SET}$ et $SF\Theta$-$\mathbb{SET}$ *ne sont pas des topoï.*

Comme montré en **2.2**, les objets de la catégorie $F\Theta$-$\mathbb{SET}$ doivent, pour former un topos, satisfaire la condition :

$$\bigcup_{x\in X\backslash\{x\}} V(x,x') \subsetneq V(x). \qquad (*)$$

La catégorie correspondante est notée $F^*\Theta$-$\mathbb{SET}$ puisqu'elle coïncide avec $F^*\Omega$-$\mathbb{SET}$ pour $\Omega = \Theta$. À la différence de $F\Theta$-$\mathbb{SET}$ et de $SF\Theta$-$\mathbb{SET}$, $F^*\Theta$-$\mathbb{SET}$ est un topos. Mais il s'agit d'un topos booléen. Cette catégorie est donc soumise à des conditions contraignantes dont l'une des conséquences, outre celles déjà mentionnées dans le cas général c'est-à-dire pour $F^*\Omega$-$\mathbb{SET}$ (dont le fait que le topos est booléen) est que $F^*\Theta$-$\mathbb{SET}$ n'est pas équivalente à la catégorie des faisceaux sur I.

3.2 Espace des observations

A contrario, si l'on souhaite lever la contrainte $(*)$, il faut modifier la définition des flèches c'est-à-dire abandonner l'hypothèse que toute flèche f : $\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$ est définie par une application $\tilde{f} : A \to B$.

Le fait que la catégorie $F\Theta$-$\mathbb{SET}$ ne soit pas un topos (et ne soit donc pas équivalente à la catégorie des faisceaux sur I) vient, en effet, de ce que toute flèche $f : (X, V) \to (Y, W)$ est définie par

$$f(x, y) = \{i \in I : i \text{ voit que } y = \tilde{f}(x)\},$$

définition qui, de plus, est ambiguë et peu compréhensible, dans la mesure où elle laisse entendre qu'il y aurait une fonction $\tilde{f}$ à "voir".

Dès lors, nous considérons la catégorie dont les objets sont les ensembles empiriques satisfaisant (E_1) - (E_2) et les flèches $f : (X, V) \to (Y, W)$ sont les applications $f : X \times Y \to \Theta$ satisfaisant (E_3) - (E_6), ces dernières n'étant pas, en général, définies par des fonctions $\tilde{f} : X \to Y$.

La catégorie est notée par Θ-$\mathbb{SET}$, puisqu'elle coïncide avec Ω-$\mathbb{SET}$ pour $\Omega = \Theta$. Ainsi l'écriture (de Bénabou) :

$$f(x, y) = \{i \in I : i \text{ voit que } fx = y\},$$

doit-elle être éliminée car fautive. Dès lors, l'interprétation des flèches de Θ-$\mathbb{SET}$ est problématique : comment interpréter l'ensemble d'observateurs image de (x, y) par f, sachant que $f(x, y)$ est un "bloc" qui ne permet pas de donner un sens à "être l'image de", ni même à la "notion d'image" ? Que dire de ce que "voient" ces observateurs ?

Il est évident que Θ-$\mathbb{SET}$ comme cas particulier de Ω-$\mathbb{SET}$ est équivalente à la catégorie des faisceaux sur I (et est donc un topos). Mais une démonstration directe, spécifique aux ensembles empiriques est nécessaire, notamment en ce qu'elle met en évidence la structure de l'espace des observations.

Soit donc (X, V) un ensemble empirique sur l'espace (I, Θ) des observateurs. On définit l'espace des observations de (X, V), noté $\mathrm{Obs}(X, V)$ comme étant l'espace topologique obtenu via la construction suivante : $I \times X$ étant muni de la topologie produit de Θ et de la topologie discrète sur X, $\mathrm{Obs}(X, V)$ est l'espace quotient de :

$$\{< i, x > \in I \times X : i \in V(x, x)\}$$

muni de la topologie induite, par l'équivalence :

$$< i, x > \sim_V < i, y > \quad \text{si et seulement si} \quad i \in V(x, y),$$

dont un élément générique, c'est-à-dire une classe d'équivalence, notée par $[< i, x >]_V$, peut être interprété comme l'observation de $x \in X$ par l'observateur $i \in I$: si i confond x et y, alors x et y donnent lieu à la même observation.

L'application :

$$p : \ \mathrm{Obs}(X, V) \to I, \quad [< i, x >]_V \mapsto i$$

est un homéomorphisme local et ainsi $\mathrm{Obs}(X, V)$ est un faisceau sur I. Pour le démontrer, il suffit de remarquer que, pour tout $[< i, x >]_V \in \mathrm{Obs}(X, V)$, la famille des ensembles de la forme : $\{[< j, x >]_V : j \in U\}$ où U est un voisinage de i dans I, est une base de voisinages de $[< i, x >]_V$.

Soit donc $\mathbf{Obs}(X, V)$ l'objet de la catégorie des faisceaux sur I constitué de l'espace $\mathrm{Obs}(X, V)$ des observations et de la projection :

$$p : \mathrm{Obs}(X, V) \to I, \ [< i, x >]_V \mapsto i$$

qui à toute observation $[< i, x >]_V$ associe l'observateur dont elle est le fait. Considérons alors le foncteur T qui :

(i) à tout ensemble empirique (X, V) associe l'espace des observations $\mathbf{Obs}(X, V)$,

(ii) à toute flèche $f : (X, V) \to (Y, W)$ associe la flèche $T(f) = F$, où $F : \mathbf{Obs}(X, V) \to \mathbf{Obs}(Y, W)$, est définie pour tout $[< i, x >]_V \in \mathrm{Obs}(X, V)$ par :

$$F([< i, x >]_V) = [< i, y >]_W, \ \text{ où } y \text{ est tel que } i \in f(x, y).$$

En vertu de (E_3) - (E_6), F est bien définie. Elle est fibre à fibre, induisant l'identité sur I. On vérifie immédiatement que F est continue (en utilisant les voisinages de base des points de $\mathrm{Obs}(X, V)$ et de $\mathrm{Obs}(Y, W)$). F est donc bien une flèche de la catégorie des faisceaux sur I.

On vérifie ensuite que, pour deux flèches f et g de la catégorie des ensembles empiriques, $T(g \circ f) = T(g) \circ T(f)$ et que, pour tout ensemble empirique (X, V), la fonction d'observation $V : X \times X \to \Theta$, flèche identité de la catégorie, vérifie $T(V) = id_{\mathrm{Obs}(X,V)}$. Donc T est bien un foncteur de la catégorie des ensembles empiriques dans celle des faisceaux sur I. De plus, on montre aisément que, pour toute flèche f, la correspondance $f \mapsto T(f)$ est bijective, c'est-à-dire que T est pleinement fidèle.

La question de l'équivalence entre la catégorie des ensembles empiriques et celle des faisceaux sur I est alors celle de la représentativité de T, c'est-à-dire de l'existence, pour tout faisceau (E, p_E) sur I, d'un ensemble empirique (X, V) dont l'espace des observations $\mathbf{Obs}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{V})$ soit isomorphe à (E, p_E).

Soit, pour tout ensemble empirique (X, V) et pour tout $x \in X$, l'application :

$$\begin{aligned} \check{x} : V(x,x) &\to \mathrm{Obs}(X,V), \\ i &\mapsto [< i, x >]_V, \end{aligned}$$

qui est une section locale de $\mathrm{Obs}(X, V)$.

Alors, pour tous $x,\ x' \in X$, comme l'on a $i \in V(x, x')$ si et seulement si $[< i, x >] = [< i, x' >]$, soit encore, si et seulement si $\check{x}(i) = \check{x}'(i)$, on a donc :

$$V(x, x') = \{i \in I : \check{x}(i) = \check{x}'(i)\}.$$

Ainsi, du point de vue des observateurs, un point de l'ensemble empirique (X, V) peut être considéré comme une section de $\mathrm{Obs}(X, V)$ (ou, si l'on veut, comme un champ d'observations), si bien qu'un ensemble empirique (X, V) est un ensemble de sections locales de l'espace des observations $\mathrm{Obs}(X, V)$, ensemble tel que, pour tout $\xi \in \mathrm{Obs}(X, V)$, c'est-à-dire pour toute observation, si $p(\xi) = i$, alors il existe une section appartenant à cet ensemble dont la valeur en i est ξ : toute observation est l'observation d'un point de X.

Pour un faisceau quelconque (E, p_E) sur I, soit $\mathscr{S}(E)$ l'ensemble des sections locales de $p_E : E \to I$ et soit $\mathscr{V}$ l'application :

$$\mathscr{V} : \mathscr{S}(E) \times \mathscr{S}(E) \to \Theta$$

telle que, pour tous $s, t \in \mathscr{S}(E)$:

$$\begin{aligned} &\mathscr{V}(s, s) = U_s, \text{ ouvert de définition de } s, \\ &\mathscr{V}(s, t) = \{i \in I : s(i) = t(i)\}. \end{aligned}$$

Pour tous $s, t \in \mathscr{S}(E)$, $\mathscr{V}(s,t)$ est un ouvert de I vérifiant :

$$\begin{aligned}&\mathscr{V}(s,t) \subseteq \mathscr{V}(s,s) \cap \mathscr{V}(t,t),\\ &\mathscr{V}(s,t) = \mathscr{V}(t,s),\\ &\mathscr{V}(s,t) \cap \mathscr{V}(r,s) \subseteq \mathscr{V}(r,t), \text{ pour tout } r \in \mathscr{S}(E).\end{aligned}$$

$\mathscr{V}$ est donc une fonction d'observation de $\mathscr{S}(E)$ et $(\mathscr{S}(E), \mathscr{V})$ est un ensemble empirique (observé par I).

Le foncteur T associe, par définition, à $(\mathscr{S}(E), \mathscr{V})$ son espace des observations $\mathbf{Obs}(\mathscr{S}(\boldsymbol{E}), \mathscr{V})$, où $\mathrm{Obs}(\mathscr{S}(E), \mathscr{V})$ est l'espace topologique quotient du sous-espace :

$$\{< i, s > : s \text{ est définie en } i\ \} \subseteq I \times \mathscr{S}(E)$$

($I \times \mathscr{S}(E)$ étant muni de la topologie produit de Θ et de la topologie discrète sur $\mathscr{S}(E)$) par la relation d'équivalence :

$$< i, s > \sim_{\mathscr{V}} < i, t > \ \text{ si et seulement si } \ s(i) = t(i).$$

Pour démontrer que T est représentatif, on considère l'application Φ_E suivante :

$$\begin{aligned}\Phi_E : \mathrm{Obs}(\mathscr{S}(E), \mathscr{V}) &\to E\\ [< i, s >]_{\mathscr{V}} &\mapsto s(i)\end{aligned}$$

qui à toute observation de la section $s \in \mathscr{S}(E)$ (par l'observateur i), associe l'évaluation de s en i, soit $s(i) \in E$, résultat de cette observation $[< i, s >]_{\mathscr{V}}$ faite par i, qui fait de E un espace de "résultats d'observations" de ses sections.

Théorème : *L'application Φ_E est une identification de la catégorie des faisceaux de* $\boldsymbol{Obs}(\mathscr{S}(\boldsymbol{E}), \mathscr{V})$ *avec (E, p_E). Le foncteur T est donc représentatif et la catégorie Θ-$\mathbb{SET}$ est équivalente à la catégorie des faisceaux sur I.*

Preuve : (i) Φ_E est clairement fibre à fibre et induit l'identité sur I.

(ii) Φ_E est bijective. En effet, si $[< i, s >]_{\mathscr{V}}$ et $[< j, t >]_{\mathscr{V}}$ sont tels que $\Phi_E([< i, s >]_{\mathscr{V}}) = \Phi_E([< j, t >]_{\mathscr{V}})$, alors, d'une part $i = j$ et, d'autre part, $s(i) = t(j)$. Donc $i \in \mathscr{V}(s,t)$ c'est-à-dire $[< i, s >]_{\mathscr{V}} = [< j, t >]_{\mathscr{V}}$. Donc Φ_E est injective. Par ailleurs, soit $\xi \in E$ tel que $i = p_E(\xi)$. Alors, il existe une section locale s_ξ définie dans un voisinage ouvert de i telle que $s_\xi(i) = \xi$. Ainsi, pour tout $\xi \in E$, il existe une section $s \in \mathscr{S}(E)$ telle que $\Phi_E([< p_E(\xi), s >]_{\mathscr{V}}) = \xi$. Donc Φ_E est surjective.

(iii) Φ_E est continue. En effet, soit $[< i, s >]_{\mathscr{V}} \in \mathrm{Obs}(\mathscr{S}(E), \mathscr{V})$ et soit W un voisinage de $\Phi_E([< i, s >]_{\mathscr{V}}) = s(i) = \xi \in E$. Alors il existe un voisinage ouvert W' de $s(i)$, inclus dans W et tel que $p_{E|_{W'}}$ est un homéomorphisme $W' \to p_E(W') = U'$, U' étant donc un ouvert de I. Soit alors la section :

$$s_\xi : U' \to E,\ s_\xi = (p_{E|_{W'}})^{-1}.$$

On a : $s_\xi(i) = \xi = s(i)$ c'est-à-dire que s et s_ξ coïncident sur un voisinage U de i, $U \subseteq U' \cap \mathscr{V}(s,s)$. Considérons alors $\{[< j, s >]_{\mathscr{V}} : j \in U\}$. C'est un voisinage de $[< i, s >]_{\mathscr{V}}$ dans $\mathrm{Obs}(\mathscr{S}(E), \mathscr{V})$ et l'on a :

$$\Phi_E(\{[< j, s >]_{\mathscr{V}} : j \in U\}) = s(U) = s_\xi(U) \subseteq W' \subseteq W.$$

Ainsi, pour tout voisinage W de $s(i) = \Phi_E([< i, s >]_{\mathscr{V}})$ dans E, il existe un voisinage U de $[< i, s >]_{\mathscr{V}}$ dans $\mathrm{Obs}(\mathscr{S}(E), \mathscr{V})$ tel que $\Phi_E(U) \subseteq W$. Donc Φ_E est continue.

(iv) Φ_E, étant continue et fibre à fibre, est un homéomorphisme local de $\mathrm{Obs}(\mathscr{S}(E), \mathscr{V})$ dans E. Comme Φ_E est bijective, c'est un homéomorphisme. Donc Φ_E est un isomorphisme

$$\mathbf{Obs}(\mathscr{S}(\boldsymbol{E}), \mathscr{V}) \to (E, p_E).$$

Le foncteur T est donc représentatif et établit une équivalence entre la catégorie des ensembles empiriques observés par I et la catégorie des faisceaux sur I. □

Tout faisceau (E, p_E) est donc isomorphe à l'espace des observations d'un ensemble empirique : l'ensemble $\mathscr{S}(E)$ de ses sections locales muni de la fonction d'observation $\mathscr{V}$ qui à une section locale $s \in \mathscr{S}(E)$ associe son ouvert $\mathscr{V}(s,s)$ de définition et à deux sections locales $s, t \in \mathscr{S}(E)$ associe l'ouvert $\mathscr{V}(s,t)$ sur lequel ces sections sont égales. Via cet isomorphisme, E apparaît comme l'espace des (résultats des) observations de ses sections.

Toutefois, comme nous le verrons ci-dessous, cette équivalence, du point de vue des observateurs, n'est pas sans susciter un certain nombre d'interrogations pouvant aller jusqu'à la remise en cause du concept même d'ensemble empirique, interrogations qui font écho à celles du paragraphe **2.2** sur la pertinence du concept de topos.

4. Une équivalence malheureuse ?

4.1 Restrictions et recollements

Soit (X, V) un ensemble empirique sur I et $\mathrm{Obs}(X, V)$ son espace des observations. $\mathrm{Obs}(X, V)$ étant un faisceau sur I, on peut lui appliquer la construction précédente.

Ainsi, si l'on note $\mathscr{X}$ l'ensemble $\mathscr{S}(\mathrm{Obs}(X, V))$ des sections locales de $\mathrm{Obs}(X, V)$ et si l'on considère la fonction d'observation $\mathscr{V} : \mathscr{X} \times \mathscr{X} \to \Theta$ définie, comme ci-dessus, pour l'ensemble des sections d'un faisceau (E, p_E) quelconque sur I, nous avons :

$$\mathbf{Obs}(\mathscr{X}, \mathscr{V}) = T((\mathscr{X}, \mathscr{V})),$$
$$\mathbf{Obs}(X, V) = T((X, V)).$$

Il s'ensuit que $\mathbf{Obs}(\mathscr{X}, \mathscr{V})$ et $\mathbf{Obs}(X, V)$ sont isomorphes dans la catégorie des faisceaux et, partant, les ensembles empiriques $(\mathscr{X}, \mathscr{V})$ et (X, V) sont isomorphes.

Tout point $x \in X$ définit une section locale $\check{x}$ de $\mathrm{Obs}(X, V)$ et l'on peut considérer que l'application $x \mapsto \check{x}$ de X dans $\mathscr{X}$ est injective sans réelle perte de généralité (puisque, si deux points x et x' de X définissent la même section locale de $\mathrm{Obs}(X, V)$, on a alors $V(x, x) = V(x', x') = V(x, x')$). Mais toute section de $\mathrm{Obs}(X, V)$ ne correspond pas, loin s'en faut, à un point de X : celles qui correspondent à un point de X (de la forme $\check{x}$, $x \in X$) n'ont aucune propriété distinctive ; leur seule propriété est de former collectivement une famille de sections locales que l'on peut qualifier de "génératrice" en ce sens que, pour tout $i \in I$ et pour toute section locale s de $\mathrm{Obs}(X, V)$, il existe une section de cette famille qui prend la même valeur que s au point i et, donc, sur tout un voisinage de i.

Ainsi, on peut seulement dire, d'une manière générale, que toute section de $\mathrm{Obs}(X, V)$ est "construite à partir des points de X" (en l'occurence à partir d'observations de ces points) puisque son ouvert de définition peut toujours être recouvert par une famille de petits ouverts de I dans chacun desquels elle coïncide avec une des sections de la forme $\check{x}, x \in X$. En d'autres termes, toute section locale s de $\mathrm{Obs}(X, V)$ s'obtient à partir des sections correspondant aux points de X de l'une des deux façons suivantes :

(i) par "restriction" : si U est l'ouvert de définition de s, il existe $x \in X$ tel que $s = \check{x}_{|_U}$ i.e., pour tout $i \in U$, $s(i) = [< i, x >]_V$.

(ii) par "recollement" : pour tout $i \in U$, il existe un voisinage U' de i et $x \in X$ tels que, pour tout $j \in U'$, $s(j) = [< j, x >]_V$ i.e. $s_{|_{U'}} = \check{x}_{|_{U'}}$.

Remarque : Le fait que (X, V) et $(\mathscr{X}, \mathscr{V})$ donnent lieu au même espace d'observations peut s'interpréter, du point de vue des observateurs, de la façon suivante : si l'on admet qu'un point "observé" est obtenu comme un "champ (local et continu) d'observations", on obtient alors indifféremment les points de X et ceux de $\mathscr{X}$ en récoltant des observations provenant de différents petits ouverts d'observateurs de telle sorte que les observations provenant d'un même petit ouvert soient des observations d'un même point de X par les différents observateurs de cet ouvert. On obtient ainsi tout autant les points de x (les sections $\check{x}, x \in X$) que leurs restrictions $\check{x}_{|_U}$ (correspondant à des "vues partielles", émanant d'un ouvert U d'observateurs, sur ces points x de X) et des "points artificiels", en quelque sorte "imaginés" par une famille d'ouverts d'observateurs qui "recombinent" leurs observations.

Quel est le statut des sections de $\mathrm{Obs}(X, V)$, "restrictions" de points de X, c'est-à-dire de la forme $\check{x}_{|_U}$, $x \in X$, U ouvert de I ? Il n'est pas a priori absurde, du point de vue des observateurs, de prendre en considération ces sections : elles correspondent, en effet, à des "vues partielles" sur les points de X et peuvent posséder certaines propriétés que n'ont pas les sections $\check{x}$, $x \in X$. Doit-on pour autant, comme c'est le cas avec $(\mathscr{X}, \mathscr{V})$ leur donner le même statut que les points de X et ainsi considérer, par exemple, un point de x (i.e. la section $\check{x}$) et sa restriction $\check{x}_{|_U}$ comme deux points différents au même titre que deux points x et x' de X (i.e. $\check{x}$ et $\check{x}$') ?

De façon un peu plus précise, pour tous les observateurs appartenant à l'ouvert U de la restriction $\check{x}_{|_U}$ du point $\check{x}$, $\check{x}$ et $\check{x}_{|_U}$ procèdent de la même observation. Dès lors, que signifie que ces observateurs, qui sont les seuls à "voir" $\check{x}_{|_U}$, voient $\check{x}$ et $\check{x}_{|_U}$? A fortiori, pour $x \in X$ et $i \in V(x, x)$, est-il raisonnable de considérer (comme c'est le cas avec $(\mathscr{X}, \mathscr{V})$) que cet observateur i voit effectivement tous les points $\check{x}_{|_W}$ de $\mathscr{X}$ où W est un voisinage ouvert de i inclus dans $V(x, x)$, et ce à partir de la seule observation $[< i, x >]_V$? Ainsi, considérer des restrictions comme des points à part entière conduit à obtenir, à partir d'espaces d'observations identiques, des ensembles empiriques très différents, pouvant être, comme $\mathscr{X}$, fort éloignés des ensembles observés par les observateurs individuellement, i.e. les fibres de $\mathrm{Obs}(X, V)$ ou de $\mathrm{Obs}(\mathscr{X}, \mathscr{V})$. Cela conduit, en quelque sorte, à ce que les observateurs, à partir de leurs observations individuelles d'un ensemble empirique donné n'observent en fait - collectivement et localement - que... leur propre topologie !

Ainsi, que (X, V) soit isomorphe, donc identifiable, à $(\mathscr{X}, \mathscr{V})$, lequel contient les sections $\check{x}$, $x \in X$, toutes leurs restrictions (et d'autres choses...), conduit à des "identifications" entre ensembles empiriques qui semblent pour le moins abusives, en ce qu'elles permettent d'obtenir des ensembles empiriques sans lien réel avec des observations individuelles.

La question qui se trouve ainsi posée est donc celle de la signification du mot "voir", plus précisément de l'expression "i voit x".

Remarques : (i) Dans $F^*\Theta$-$\mathbb{SET}$ la condition $(*)$ sur la fonction d'observation fait que, dans un ensemble empirique (X, V), on ne peut avoir de points de X qui soient des restrictions d'autres points (pas plus, d'ailleurs que des recollements). Les ensembles empiriques de $F^*\Theta$-$\mathbb{SET}$ sont donc plus "proches" des ensembles observés individuellement par les observateurs. Ainsi la définition de "voir" que cette catégorie autorise est-elle plus intuitivement satisfaisante. En effet, un point de X est "vu" par les observateurs de I s'il existe un observateur de I qui ne confond ce point avec aucun autre. En outre, la condition $(*)$ implique que tout point est vu par au moins un observateur.

(ii) En contrepoint de l'analyse critique ci-dessus, la considération des restrictions comme des points à part entière n'est pas sans justification, par exemple lorsque les observateurs représentent des ordres de grandeur, comme les indices des nombres elliptiques de Levi-Cività [8]. En prenant les indices comme observateurs et la topologie discrète, par exemple, sur leur ensemble, la troncature d'un nombre elliptique à un certain indice est bien une "restriction" de ce nombre mais peut être également considérée comme un nombre elliptique à part entière.

L'ensemble $\mathscr{X} = \mathscr{S}(\text{Obs}(X, V))$ contient, outre les sections $\check{x}$ correspondant aux points $x \in X$ et leurs restrictions, toutes les autres sections obtenues en "recollant" des restrictions de sections de la forme $\check{x}$, $x \in X$. Mais, dès lors, l'isomorphisme entre (X, V) et $(\mathscr{X}, \mathscr{V})$ identifie l'ensemble (X, V) des points "objectifs" (ensemble qui fournit la "matière des observations") à l'ensemble $(\mathscr{X}, \mathscr{V})$ de toutes les recombinaisons que peuvent faire les observateurs en "recollant" des observations partielles de "points objectifs" - recombinaisons qui, de plus, sont considérés comme des "points objectifs" de $(\mathscr{X}, \mathscr{V})$.

Afin de mieux appréhender, au niveau des ensembles empiriques, la "distorsion" créée par cet isomorphisme entre (X, V) et $(\mathscr{X}, \mathscr{V})$, il convient de montrer à quoi correspondent ces "recombinaisons" relativement à l'ensemble empirique (X, V), c'est-à-dire d'exprimer les sections locales du faisceau $\text{Obs}(X, V)$ en termes de notions relatives à (X, V).

Proposition : *À toute section locale s de Obs(X, V) correspond une et une seule flèche $F_s : (\{I\}, V_U) \to (X, V)$ où U est un ouvert de I, c'est-à-dire une flèche d'un sous-objet de l'objet terminal dans (X, V). Inversement à toute flèche $F : (\{I\}, V_U) \to (X, V)$, modulo l'identification de $\{I\} \times X$ à X, correspond une et une seule section locale de Obs(X, V).*

Preuve : Tout d'abord, rappelons qu'un sous-objet quelconque de l'objet terminal (I, id_I) est un mono $inj_U : U \to I$ où U est un ouvert de I, sous-objet que nous noterons (U, inj_U). Puisque, par ailleurs, dans la catégorie des faisceaux sur I, une section locale d'un faisceau (E, p_E) sur I peut être définie comme une flèche $s : U \to E$

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "s"] \arrow[d, "inj_{U}"'] & E \arrow[d, "p_E"] \\ I \arrow[r, "id"'] & I \end{tikzcd}$$

où U est l'ouvert de définition de s, toute section locale de (E, p_E) peut être définie, moyennant le même abus de notation, comme une flèche d'un sous-objet (U, inj_{U}) de l'objet terminal dans (E, p_E).

Soit donc U un ouvert de I et soit $(\{I\}, V_U)$ l'ensemble empirique correspondant. Son espace d'observations $\mathrm{Obs}(\{I\}, V_U)$ s'identifie clairement à (U, inj_{U}). Ainsi, à toute flèche $F : (\{I\}, V_U) \to (X, V)$ correspond, via le foncteur T, une flèche $f : (U, inj_{U}) \to \mathbf{Obs}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{V})$, c'est-à-dire une section locale de $\mathrm{Obs}(X, V)$ définie sur U. Du fait des propriétés de T, les flèches de $(\{I\}, V_U)$ dans (X, V) sont en bijection avec les sections locales de $\mathrm{Obs}(X, V)$ définies sur U. Cette propriété est vraie pour tout ouvert U de I. Donc, à toute section locale s de $\mathrm{Obs}(X, V)$ dont l'ouvert de définition est U, il correspond une et une seule flèche $F_s : (\{I\}, V_U) \to (X, V)$. $\square$

Remarque : Définir, comme ci-dessus, une section locale d'un faisceau (E, p_E) comme une flèche d'un sous-objet (U, inj_{U}) de l'objet terminal dans (E, p_E) évoque la définition d'un élément d'un sous-objet d'un objet donné [3]. Une section locale de (E, p_E) apparaît ainsi comme un "sous-élément" de (E, p_E) ou, plus exactement, du sous-objet id_E (un élément de id_E n'étant autre qu'une section globale de (E, p_E)).

Proposition : *Les sections locales de Obs*(X, V) *sont en bijection avec les singletons de l'ensemble empirique* (X, V).

Preuve : Un singleton d'un ensemble empirique (X, V) est une application $\alpha : X \to \Theta$ vérifiant :

$$\begin{array}{ll} (i) & \alpha(x) \subseteq V(x, x), \text{ pour tout } x \in X, \\ (ii) & \alpha(x) \cap V(x, x') \subseteq \alpha(x'), \text{ pour tous } x, x' \in X, \\ (iii) & \alpha(x) \cap \alpha(x') \subseteq V(x, x'), \text{ pour tous } x, x' \in X. \end{array}$$

Soit donc F une flèche de $(\{I\}, V_U)$ dans (X, V). Considérons l'application :

$$\alpha_F : X \to \Theta, \quad x \mapsto F(I, x).$$

Elle vérifie clairement (i), et, en application de (E_3), on a :

$$F(I, x) \cap V(x, x') \subseteq F(I, x'),$$

c'est-à-dire que α_F vérifie (ii). De même, en application de (E_4), α_F vérifie(iii). α_F est donc un singleton de (X, V).

Réciproquement, soit α un singleton de (X, V). Considérons alors l'ouvert

$$U_\alpha = \bigcup_{x \in X} \alpha(x),$$

le sous-objet $(\{I\}, V_{U_\alpha})$ de l'objet terminal et l'application $F_\alpha : \{I\} \times X \to \Theta$, $(I, x) \mapsto \alpha(x)$. Alors F_α vérifie évidemment (E_3). Comme α vérifie (ii), F_α vérifie (E_5). Enfin, puisque par définition de F_α et U_α,

$$\bigcup_{x \in X} F_\alpha(I, x) = U_\alpha,$$
$$V_{U_\alpha}(I, I) = U_\alpha,$$

F_α vérifie (E_6). Il est clair, d'après les définitions, que, pour tout singleton α de (X, V), on a $\alpha_{F_\alpha} = \alpha$ et que, pour tout $U \in \Theta$ et toute flèche $F : (\{I\}, V_U) \to (X, V)$, on a $F_{\alpha_F} = F$. □

Remarque : Pour tout singleton α de (X, V), la section locale de $\mathrm{Obs}(X, V)$ qui correspond à α est la section s_α définie sur $U_\alpha = \bigcup_{x \in X} \alpha(x)$ par :

pour tout $i \in U_\alpha$, $\quad s_\alpha(i) = [< i, x >]_V$, où x est tel que $i \in \alpha(x)$.

Ainsi, pour tout ensemble empirique (X, V) sur I, les points de l'ensemble empirique $(\mathscr{X}, \mathscr{V})$, où $\mathscr{X} = \mathscr{S}(\mathrm{Obs}(X, V))$, sont les singletons de (X, V). De plus, $(\mathscr{X}, \mathscr{V})$ est "complet" au sens suivant : tout singleton de $(\mathscr{X}, \mathscr{V})$ correspond à un point de $\mathscr{X}$ (toute section locale de $\mathrm{Obs}(\mathscr{X}, \mathscr{V})$ est de la forme $\check{x}$ pour un certain $x \in \mathscr{X}$). En effet un singleton de $(\mathscr{X}, \mathscr{V})$

est défini par une flèche $F : (\{I\}, V_U) \to (\mathscr{X}, \mathscr{V})$. Pour une telle flèche, soit l'application $\sigma_F : U \to \mathrm{Obs}(X, V)$ définie par

$$\sigma_F(i) = s(i) \in \mathrm{Obs}(X, V),$$

où $s \in \mathscr{X}$ est telle que $i \in F(I, s)$.

L'application σ_F est bien définie sur U puisque, si $i \in F(I, s) \cap F(I, s')$, alors $i \in \mathscr{V}(s, s')$, c'est-à-dire $s(i) = s'(i)$. σ_F est fibre à fibre et continue. En effet, si $i \in U$ et si $s \in \mathscr{X}$ sont tels que $\sigma_F(i) = s(i)$, alors $i \in F(I, s)$, ouvert, et l'on a $\sigma_F(j) = s(j)$ pour tout $j \in F(I, s)$. Ainsi σ_F coïncide avec s sur un voisinage de i et est donc continue en i. Cette propriété valant pour tout $i \in U$, σ_F est continue et est donc une section locale de $\mathrm{Obs}(X, V)$, i.e. $\sigma_F \in \mathscr{X}$. Il est donc clair que, pour tout $s \in \mathscr{X}$,

$$F(I, s) = \mathscr{V}(\sigma_F, s) = \{i \in I : \sigma_F(i) = s(i)\}$$

et

$$\bigcup_{s \in \mathscr{X}} F(I, s) = U = \mathscr{V}(\sigma_F, \sigma_F).$$

Donc, tout singleton de $(\mathscr{X}, \mathscr{V})$ est de la forme $s \in \mathscr{X} \mapsto \mathscr{V}(\sigma, s)$ pour un certain $\sigma \in \mathscr{X}$. Donc $(\mathscr{X}, \mathscr{V})$ est complet au sens ci-dessus.

$(\mathscr{X}, \mathscr{V})$ peut être défini comme le "complété" de (X, V) dans le sens suivant : $(\mathscr{X}, \mathscr{V})$ est l'ensemble empirique dont les points sont les singletons de (X, V) et la fonction d'observation la fonction qui à deux singletons α et α' de (X, V) associe l'ouvert de I suivant :

$$\bigcup_{x \in X} [\alpha(x) \cap \alpha'(x)]$$

(fonction obtenue en "traduisant" la fonction d'observation $\mathscr{V}$ de $(\mathscr{X}, \mathscr{V})$ en terme de singletons de (X, V)). Lorsque α et α' sont de la forme $x'' \mapsto V(x, x'')$ et $x'' \mapsto V(x', x'')$ où $x, x' \in X$, cette fonction d'observation associe à α et α' l'ouvert $V(x, x')$.

Ainsi, les recombinaisons d'observations partielles de points objectifs font que les observateurs n'obtiennent que les singletons de (X, V). Mais, ces points "artificiels" de (X, V) étant les points "objectifs" de $(\mathscr{X}, \mathscr{V})$, dès lors que (X, V) et $(\mathscr{X}, \mathscr{V})$ sont isomorphes, la distinction entre points "objectifs" et points "artificiels" de (X, V) tient-elle vraiment ? Peut-on dire que ce sont les points de X qui sont les points "objectifs" de (X, V), c'est-à-dire ceux qui fournissent matière à observation ? En effet, pour toute famille génératrice X' de sections locales de $\text{Obs}(X, V)$, en posant, pour tout $s \in X'$:

$$V'(s, s) = U_s, \text{ ouvert de définition de } s,$$

et, pour tous $s, t \in X'$:

$$V'(s, t) = \{i \in U_s \cap U_t : s(i) = t(i)\},$$

l'ensemble empirique (X', V') est, lui aussi, isomorphe à (X, V) et peut ne contenir aucun point "objectif" de (X, V), c'est-à-dire qu'aucune des sections $\check{x}$, pour $x \in X$, n'appartient à X'.

Une question cruciale se pose alors : *qu'est-ce-qui est réellement observé ?* De quels objets (points "objectifs") les observateurs de I font-ils l'observation ? L'équivalence entre la catégorie des faisceaux sur I et la catégorie Θ-$\mathbb{SET}$ fait que, dans le cadre de cette dernière, nous n'avons (pas plus que les observateurs) le moyen de déterminer en quoi consistent les points "objectifs" d'un ensemble empirique (X, V) donné. En effet, si les points "artificiels" de (X, V) trouvent leur expression sous la forme de singletons, de (X, V), aucune notion ne correspond aux points "objectifs".

Aussi la notion même d'ensemble empirique se dissout-elle dans cette équivalence. Pour ce qui est des observations, de quoi sont-elles les observations ?

4.2 Retour sur la question des flèches

Tout comme avec la catégorie Ω-$\mathbb{SET}$, les problèmes rencontrés avec la catégorie Θ-$\mathbb{SET}$ - problèmes liés à ces isomorphismes où se trouve engloutie la notion de "point objectif", et ainsi d'"objet observé" - amènent à remettre en cause l'usage de cette catégorie, équivalente à la catégorie des faisceaux sur I, pour représenter la notion intuitive d'ensemble empirique, et cela en raison de la définition de ses flèches.

Dans le cas général de Ω-$\mathbb{SET}$, l'(in)aptitude de cette catégorie à rendre compte (en raison de la définition de ses flèches) des notions dont elle est censée fournir une représentation formelle à déjà été mise en cause (voir

§ **2**), ce qui nous a conduit à introduire la catégorie $F^*\Omega$-$\mathbb{SET}$. Notons, dès à présent, que dans la catégorie $F^*\Theta$-$\mathbb{SET}$ aucune des difficultés auxquelles nous sommes confrontés dans Θ-$\mathbb{SET}$, c'est-à-dire dans le cas général des ensembles empiriques (X, V) quelconques, ne se présente plus. Ainsi, par exemple, les seuls singletons de (X, V) qui sont des éléments de (X, V) sont ceux qui correspondent aux points de X.

Aussi se bornera-t-on à ne considérer que les problèmes posés par la définition des flèches de la catégorie Θ-$\mathbb{SET}$, problèmes spécifiques à la situation qui nous occupe et qui échappent à la discussion générale sur Ω-$\mathbb{SET}$, parce que liés aux observateurs.

Le problème central est de comprendre comment la définition de cette catégorie (de ses flèches) conduit à rendre isomorphes des ensembles empiriques comme (X, V) et $(\mathscr{X}, \mathscr{V})$ et, par suite, des ensembles empiriques, comme (X, V) et (X', V') dans l'exemple ci-dessus, qui ne partagent aucun "point objectif".

Remarquons d'abord que la définition des flèches de Ω-$\mathbb{SET}$, c'est-à-dire des "fonctions empiriques" dans la terminologie introduite par Bénabou [2], n'exige d'elles aucun fondement "objectif". Ainsi, du point de vue des rapports des ensembles et des fonctions empiriques aux entités "objectives" correspondantes, cette catégorie présente une forte dissymétrie entre le statut de ses objets et celui de ses flèches :

- la définition d'un ensemble empirique (X, V) comprend la donnée d'un ensemble X de points "objectifs" à observer,
- la définition d'une fonction empirique entre (X, V) et (Y, W) ne fait intervenir aucune donnée "objective".

Une catégorie tient surtout par ses flèches et il semble que la perte d'objectivité des points (de la notion de "point objectif") dans la catégorie Θ-$\mathbb{SET}$ soit effectivement due à cette absence d'exigence d'un fondement objectif dans la définition de ses flèches. On peut s'en convaincre à la lumière du résultat suivant.

Soient (X, V) et (Y, W) deux ensembles empiriques. Considérons les ensembles empiriques $(\mathscr{X}, \mathscr{V})$ et $(\mathscr{Y}, \mathscr{W})$ tels que $\mathscr{X} = \mathscr{S}(\mathrm{Obs}(X, V))$ et $\mathscr{Y} = \mathscr{S}(\mathrm{Obs}(Y, W))$ et où $\mathscr{V}$ et $\mathscr{W}$ sont les fonctions d'observation définies comme en **4.1**. Soit F une flèche $(X, V) \to (Y, W)$. Alors il existe une fonction (et une seule) $\tilde{f} : \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ qui fait commuter le diagramme :

$$\begin{array}{ccc}
(X, V) & \xrightarrow{\quad F \quad} & (Y, W) \\
H_X \Big\downarrow \Big\uparrow H_X^{-1} & & H_Y^{-1} \Big\uparrow \Big\downarrow H_Y \\
(\mathscr{X}, \mathscr{V}) & \xrightarrow[\quad \mathscr{F} \quad]{} & (\mathscr{Y}, \mathscr{W})
\end{array}$$

où l'application $\mathscr{F} : \mathscr{X} \times \mathscr{Y} \to \Theta$, $\mathscr{F}(s, t) = \mathscr{W}(\tilde{f}(s), t)$ est une flèche $(\mathscr{X}, \mathscr{V}) \to (\mathscr{Y}, \mathscr{W})$ et $F = H_Y^{-1} \circ \mathscr{F} \circ H_X$, où H_X et H_Y sont respectivement les isomorphismes $(X, V) \to (\mathscr{X}, \mathscr{V})$ et $(Y, W) \to (\mathscr{Y}, \mathscr{W})$. Ainsi à toute fonction empirique $(X, V) \to (Y, W)$ correspond une fonction objective entre $\mathscr{X}$ et $\mathscr{Y}$, ensembles constitués des points "artificiels" reconstruits par les observateurs à partir d'observations partielles des points de X et Y. Ainsi, pour retrouver, à partir des fonctions empiriques entre points objectifs, les fonctions objectives, il faut considérer les points "artificiels" !

Cette situation est entièrement imputable à l'équivalence entre Θ-$\mathbb{SET}$ et la catégorie des faisceaux sur I. Que ces isomorphismes (H_X et H_Y) qui posent problème s'obtiennent via cette équivalence peut conduire à remettre en cause cette dernière. Il semble, néanmoins, que la question primordiale est moins celle de cette équivalence que celle de la raison pour laquelle elle conduit à ces isomorphismes.

En effet, est-il légitime que les ensembles empiriques (X, V) et $(\mathscr{X}, \mathscr{V})$ donnent lieu au même espace d'observations ? Cela nous conduit à examiner à quoi correspondent, en termes d'observateurs, les flèches de la catégorie des faisceaux.

Une flèche entre deux espaces d'observation $\mathrm{Obs}(X, V)$ et $\mathrm{Obs}(Y, W)$ est, comme on le sait, une application $f : \mathrm{Obs}(X, V) \to \mathrm{Obs}(Y, W)$, continue et fibre à fibre. Elle définit donc, pour tout $i \in \bigcup_{x \in X} V(x, x)$, une fonction entre les fibres au-dessus de i de $\mathrm{Obs}(X, V)$ et de $\mathrm{Obs}(Y, W)$: chaque observateur i établit une correspondance f_i entre les observations qu'il fait de X et celles qu'il fait de Y. La flèche f apparaît ainsi comme une collection de telles f_i, pour $i \in \bigcup_{x \in X} V(x, x)$.

Dans le cas général, une telle collection ne peut se comprendre comme une observation de fonction (entre X et Y). Mais f étant continue, on pourrait espérer de cette utilisation de la topologie de I que la collection

$$\{f_i : i \in \bigcup_{x \in X} V(x,x)\}$$

qui la constitue présente une cohérence suffisante pour que l'on puisse considérer f comme une fonction des observations. Or l'expression, en termes d'observateurs, de la continuité de f, montre qu'il n'en est rien : la topologie sur I est utilisée *a minima*, la continuité de f demandant uniquement, au niveau des f_i, que l'on ait :

(P) : Pour tout $i \in \bigcup_{x \in X} V(x,x)$ si $x \in X$ et $y \in Y$ sont tels que :

$$f_i([< i, x >]_V) = [< i, y >]_W\,,$$

alors il existe un voisinage U de i tel que pour tout $j \in U$,

$$f_j([< j, x >]_V) = [< j, y >]_W\,.$$

ce qui signifie que, pour constituer une telle flèche f, les fonctions f_i sont seulement contraintes à se "recoller" point par point.

Or, la topologie sur I nous permettrait d'imposer des conditions de cohérence plus fortes sur la collection des f_i que la simple condition (P). On pourrait imposer, par exemple :

(P') : Pour tout $i \in \bigcup_{x \in X} V(x,x)$, il existe un voisinage U de i tel que, pour tout $x \in X$, si $f_i\,([< i, x >]_V) = [< i, y >]_W$, alors, pour tout $j \in U \cap V(x,x)$, il existe $y' \in Y$ tel que :

$$[< i, y' >]_W = [< i, y >]_W$$

et :

$$f_j\,([< j, x >]_V) = [< j, y' >]_W.$$

voire la condition suivante, encore un peu plus exigeante :

(P'') : Pour tout $i \in \bigcup_{x \in X} V(x,x)$ il existe un voisinage U de i tel que :
pour tout $x \in X$ tel que $V(x,x) \cap U \neq \emptyset$, il existe $y \in Y$ tel que, pour tout $j \in V(x,x) \cap U$, on a :

$$f_j([< j, x >]_V) = [< j, y >]_W.$$

La vérification d'une de ces conditions (en particulier (P'')) permettrait de comprendre la fonction $f : \mathrm{Obs}(X, V) \to \mathrm{Obs}(Y, W)$, formée par la collection des f_i, comme une fonction des observations. Avec la condition (P''), il s'agit d'un recollement d'observations de fonctions "objectives" puisque, pour tout $i \in \bigcup_{x \in X} V(x, x)$, on a, pour un certain voisinage U de i, une fonction :

$$\tilde{f}_U : \{x \in X : V(x, x) \cap U \neq \emptyset\} \to Y,$$

qui est telle que, pour tout observateur $j \in U$, on a :

$$f_j([< j, x >]_V) = [< j, \tilde{f}_U(x) >]_W.$$

Dans le cas où X est fini, les propriétés (P), (P') et (P'') sont équivalentes. Mais dans le cas général, la contrainte de "cohérence" imposée par la seule continuité (propriété (P)) à la collection des f_i pour qu'elle constitue une flèche de la catégorie des faisceaux est extrêmement lâche : les observateurs ne peuvent plus, dès lors, faire le "tri" de leurs observations.

Or, en se plaçant du point de vue des observateurs, il est facile de sélectionner les flèches de la catégorie des faisceaux correspondant à des "observations de fonctions".

Ces résultats nous conduiront à considérer la catégorie dont les objets sont ceux de Θ-$\mathbb{SET}$ (à ceci près que la topologie Θ n'est pas supposée complète) et dont les flèches sont définies par des *fonctions observables*, c'est-à-dire des fonctions $\tilde{f}$ de X dans Y telles que :

$$V(x, x') \subset W(\tilde{f}(x), \tilde{f}(x'),$$

pour tous x, $x' \in X$: tout observateur qui voit x voit $\tilde{f}(x)$ et tout observateur qui confond x et x' confond $\tilde{f}(x)$ et $\tilde{f}(x')$.

Nous serons également amenés à considérer la catégorie dont les objets sont ceux de $F^*\Theta$-$\mathbb{SET}$ et dont les flèches sont définies par des fonctions strictement observables, c'est-à-dire des fonctions $\tilde{f}$ de X dans Y telles que :

(i) $\tilde{f}$ est observable,

(ii) pour tout $x \in X$, $V(x,x) = W(\tilde{f}(x), \tilde{f}(x))$.

Les catégories ainsi définies feront l'objet d'un prochain article. Nous montrerons que la première est une catégorie cartésienne fermée mais n'est pas un topos, et que la seconde est un topos booléen.

5. Conclusion

La catégorie Θ-$\mathbb{SET}$, à l'instar de Ω-$\mathbb{SET}$, est un topos (un résultat connu dont le présent article fournit une nouvelle démonstration), mais le substrat intuitif ne peut être préservé que dans le cadre restreint des topoï booléens. En revanche, les catégories $F\Theta$-$\mathbb{SET}$ et $SF\Theta$-$\mathbb{SET}$ *ne forment pas des topoï* et ne revêtent donc pas l'intérêt mathématique escompté.

Ces résultats (négatifs) sur les Ω-ensembles et les ensembles empiriques commandent, selon nous, de redéfinir à nouveaux frais ces derniers et, comme il y est fait allusion au paragraphe **2.2** ci-dessus, d'étudier plus avant l'intérêt du concept de topos dans le cadre des ensembles empiriques mais également dans un cadre plus large. Sans entrer dans le détail d'une telle étude, qui fera l'objet d'un prochain article, versons quelques éléments au dossier.

Rappelons, tout d'abord, que le terme de "topos" fut choisi, en association avec celui de topologie, par Grothendieck pour suggérer qu'il s'agit de l'"objet par excellence " auquel s'applique l'intuition topologique, un terme devant être considéré comme une sorte de généralisation du terme d'"espace" (topologique), une "extension insoupçonnée, pour mieux dire, une métamorphose de la notion d'espace " [5] . La définition des ensembles empiriques à la Bénabou procède de cette démarche et ambitionne notamment de mettre en évidence des liens entre topos et topologie.

Un point crucial dans la définition des ensembles empiriques est la transitivité de la fonction d'observation V, hypothèse [1] liée à celle que l'ensemble des observateurs I est structuré par la donnée d'une topologie. La topologie, par le biais du quatrième axiome de définition du concept de voisinage,

1. Cette hypothèse n'est pas aussi naturelle qu'elle peut le sembler au premier abord : ainsi, d'après Poincaré [9] : les "résultats bruts de l'expérience" nous suggèrent de regarder " $A = B$, $B = C$, $A < C$ " comme étant "la formule du continu physique".

introduit en effet une hypothèse de transitivité : si U est un voisinage de x, il existe un voisinage W de x tel que, pour tout y de W, U soit un voisinage de y. Notons, en outre, que toute topologie peut être obtenue à partir d'une structure quasi-uniforme transitive. Appréhender la notion de perception d'un objet par un ensemble d'observateurs au moyen de la topologie est donc problématique.

La topologie de Grothendieck dont la définition correspond au désir de représenter la modalité "localement", apporte à cette remarque un éclairage particulier. En effet, si J est une topologie de Grothendieck sur une catégorie C, un J-faisceau est un préfaisceau pour lequel le passage du local au global est possible. Par exemple, pour un crible Γ couvrant un ouvert U, la donnée de fonctions continues sur chaque ouvert du crible, compatibles entre elles, c'est-à-dire telles que pour $W_1 \subset W_2$ ouverts du crible, la fonction donnée sur W_1 soit la restriction de celle donnée sur W_2, détermine une unique fonction sur U tout entier. C'est exactement ce que dit la définition des faisceaux : un faisceau est un préfaisceau pour lequel, d'une certaine façon, local et global coïncident.

Dans un topos $\mathcal{T}$, l'objet $\boldsymbol{\Omega}$ joue le rôle d'objet des "valeurs de vérité" puisqu'un sous-objet d'un objet X est déterminé par sa flèche caractéristique de X vers $\boldsymbol{\Omega}$. Une flèche $j : \boldsymbol{\Omega} \to \boldsymbol{\Omega}$ peut donc être interprétée comme une modalité, puisqu'elle agit sur les valeurs de vérité. Toutefois, pour qu'elle ait un comportement conforme à l'idée intuitive de ce que l'on entend par "localement", on peut exiger que j satisfasse les propriétés suivantes , où la flèche $\top : \mathbf{1} \to \boldsymbol{\Omega}$ désigne la "valeur de vérité " vrai dans $\mathcal{T}$:

(i) $\quad j \circ \top = \top$,

(ii) $\quad j \circ j = j$,

(iii) $\quad j \circ \wedge = \wedge \circ (j \times j)$,

propriétés qui se traduisent de la façon suivante : (i) : pour tout concept stable par restriction (continuité, différentiabilité, etc.), donc tout concept autorisant une notion de préfaisceau, "globalement" implique "localement" (une fonction continue est localement continue); (ii) : "localement" est idempotent (A est localement localement p si et seulement si A est localement

p) ; (iii) : "localement" commute avec la conjonction (A est localement p et q si et seulement si A est localement p et localement q). Ces propriétés présentent l'avantage de "coller" à celles permettant de définir une topologie sur un ensemble au sens habituel du terme, donc de généraliser cette dernière (plus exactement de généraliser la notion de fermeture). Mais cela met également en évidence deux points problématiques.

D'une part, une condition nécessaire pour qu'une famille $\mathcal{U} = (U_i)_{i\in I}$ d'ouverts soit un crible pour un ouvert U d'un espace topologique $(E, \mathcal{O}(E))$ est que $\mathcal{O}(E)$, en tant qu'algèbre de Heyting, soit complètement distributive, donc complète. La généralisation opérée par la topologie de Grothendieck (donc par la topologie de Lawvere-Tierney) constitue également une perte de généralité.

D'autre part, l'énoncé de ces propriétés souligne la fragilité de l'hypothèse sous-tendant (ii) : l'idempotence du "localement", en particulier si on l'envisage sous l'angle de la "proximité" (ce que la topologie et, d'ailleurs, les structures uniformes ambitionnent de prendre en charge), est pour le moins discutable.

Par ailleurs, le concept de classificateur de sous-objets, outil de l'internalisation, n'est pas sans poser de problèmes. Outre qu'il conduit à une remise en cause du primat du structurel sur le logique (qu'est-ce qu'une logique interne à une structure ?), il se trouve à l'origine d'une tension insurmontable entre point de vue "interne et point de vue "externe".

Il est clair enfin que ces problèmes sont également liés aux contraintes imposées par la définition de l'exponentiation, propriété cardinale des catégories cartésiennes fermées, donc des topoï.

En effet, la propriété d'exponentiation impose que, pour tout couple d'objets $< \boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} >$ il existe un objet exponentiel $\boldsymbol{B}^{\boldsymbol{A}}$ et une flèche d'évaluation $e : \boldsymbol{B}^{\boldsymbol{A}} \times \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A}$ telle que, pour toute flèche $g : \boldsymbol{C} \times \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$, il existe une flèche adjointe $\hat{g} : \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{B}^{\boldsymbol{A}}$

$$\frac{g : \boldsymbol{C} \times \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}}{\hat{g} : \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{B}^{\boldsymbol{A}}}$$

telle que $e \circ (\hat{g} \times id_{\boldsymbol{A}}) = g$, donc une bijection :

$$\mathrm{Hom}(\boldsymbol{C} \times \boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) \approx \mathrm{Hom}(\boldsymbol{C}, \boldsymbol{B}^{\boldsymbol{A}}).$$

Or, cette propriété n'est autre que la traduction catégorique de la règle (classique et intuitionniste) d'introduction de l'implication

$$\frac{\Gamma, \phi \vdash \psi}{\Gamma \vdash \phi \to \psi}$$

ou, de façon équivalente, de l'axiome du paradoxe positif : $\vdash \psi \to (\phi \to \psi)$, règle en vertu de laquelle, si ψ est prouvable à partir de Γ, alors il en est de même de $\phi \to \psi$ *gratis prodeo*. Peut-on imaginer entorse plus manifeste au constructivisme censé inspirer l'intuitionnisme, partant la théorie des topoï ?

Le concept de topos n'est donc pas réellement adapté à une saisie intuitive du spatial. Aussi est-il souhaitable de mettre à l'ordre du jour l'élaboration d'une nouvelle *analysis situs* [3] qui s'affranchisse de ces problèmes et fournisse, entre autres, un cadre formel à la notion intuitive d'ensemble empirique et à la notion d'observation.

Références

[1] Jean Bénabou. Séminaires sur les ensembles empiriques. 1975.

[2] Jean Bénabou. Rapports entre le fini et le continu. In *(J.-M. Salanskis et H. Sinaceur Éditeurs) Le labyrinthe du continu*. Paris, Springer-Verlag France, 1992.

[3] Michel De Glas. Locology and localistic logic. Mathematical and epistemological aspects. *Journal of Logics and their Applications. Special Issue Dedicated to the Memory of Gregory Mints*, vol. 4, May 2017 : 967 – 992.

[4] Robert Goldblatt. *Topoi. The categorial analysis of logic.* Amsterdam, London, North-Holland, 1983 ou Dover, 2006.

[5] Alexandre Grothendieck. Sur quelques points d'algèbre homologique. *Tokohu Mathematical Journal*, 9, Number 2 (1957) : 119 – 221.

[6] D. Higgs. Injectivity in the Topos of Complete Heyting Algebra Valued Sets. *Can. J. Math.*, XXXVI n°1, 1984 : 550 – 568.

[7] Peter T. Johnstone. *Sketches of an Elephant : A Topos Theory Compendium.* Oxford University Press, 2002.

[8] Tullio Levi-Cività. Sugli infiniti ed infinitesimi attuali quali elementi analitici. *Atti Istituto Veneto di sc., lett. ed arti*, s. VII, t. VI (1892-1893) : 1765 – 1815.

[9] Henri Poincaré. La grandeur mathématique et l'expérience. In *La science et l'hypothèse*. Flammarion, 1968.

Christine Bertrand
UFR de Mathématiques
et Atelier de Bio-informatique, UMR 7205-ISYEB
Faculté des Sciences et Ingénierie - Sorbonne Université
4, rue Charles Moureu
75013 Paris
christine.bertrand@sorbonne-universite.fr

Michel De Glas
SPHERE (UMR 7219)
CNRS - Université Paris Cité
Bâtiment Olympe de Gouges
27, rue Jean-Antoine de Baïf
place Paul Ricœur
75013 Paris
michel.deglas@gmail.com