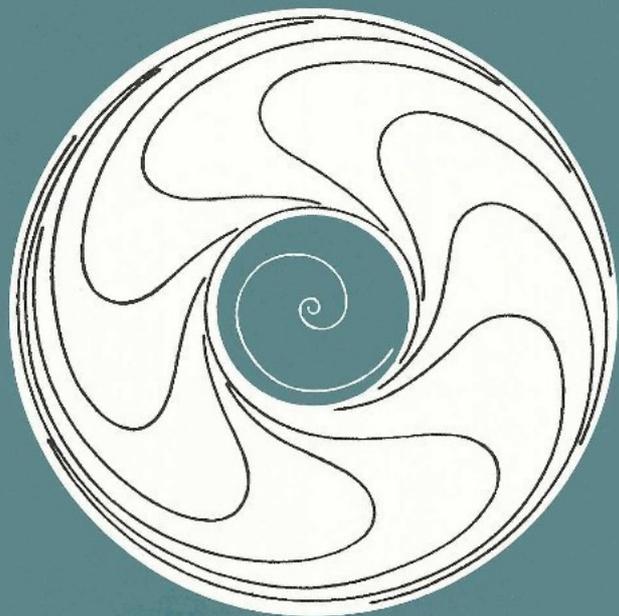


# cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques

créés par CHARLES EHRESMANN en 1958  
dirigés par Andrée CHARLES EHRESMANN

VOLUME LXV-1, 1er Trimestre 2024



AMIENS

## ***Cahiers de Topologie et Géométrie Différentielle Catégoriques***

**Directeur de la publication:** Andrée C. EHRESMANN,  
Faculté des Sciences, Mathématiques LAMFA  
33 rue Saint-Leu, F-80039 Amiens.

### **Comité de Rédaction (Editorial Board)**

*Rédacteurs en Chef (Chief Editors) :*

**Ehresmann Andrée**, ehres@u-picardie.fr  
**Gran Marino**, marino.gran@uclouvain.be  
**Guitart René**, rene.guitart@orange.fr

*Rédacteurs (Editors)*

**Adamek Jiri, J.**  
Adamek@tu-bs.de  
**Berger Clemens**,  
clemens.berger@unice.fr  
**† Bunge Marta**  
**Clementino Maria Manuel**,  
mmc@mat.uc.pt  
**Janelidze Zurab**,  
zurab@sun.ac.za  
**Johnstone Peter**,  
P.T.Johnstone@dpmms.cam.ac.uk  
**Kock Anders**, kock@imf.au.dk

**Lack Steve**, steve.lack@mq.edu.au  
**Mantovani Sandra**,  
sandra.mantovani@unimi.it  
**Porter Tim**,  
t.porter.maths@gmail.com  
**Pradines Jean**, pradines@wanadoo.fr  
**Pronk Dorette**,  
pronk@mathstat.dal.ca  
**Street Ross**, ross.street@mq.edu.au  
**Stubbe Isar**,  
Isar.stubbe@univ-littoral.fr  
**Vasilakopoulou Christina**,  
cvasilak@math.ntua.gr

Les "*Cahiers*" comportent un Volume par an, divisé en 4 fascicules trimestriels. Ils publient des articles originaux de Mathématiques, de préférence sur la Théorie des Catégories et ses applications, e.g. en Topologie, Géométrie Différentielle, Géométrie ou Topologie Algébrique, Algèbre homologique... Les manuscrits soumis pour publication doivent être envoyés à l'un des Rédacteurs comme fichiers .pdf.

Depuis 2018, les "*Cahiers*" publient une **Edition Numérique en Libre Accès**, sans charge pour l'auteur : le fichier pdf du fascicule trimestriel est, dès parution, librement téléchargeable sur les sites:

<https://mes-ehres.fr/>  
<https://cahierstgdc.com>

The "*Cahiers*" are a quarterly Journal with one Volume a year (divided in 4 issues). They publish original papers in Mathematics, the center of interest being the Theory of categories and its applications, e.g. in topology, differential geometry, algebraic geometry or topology, homological algebra... Manuscripts submitted for publication should be sent to one of the Editors as pdf files.

From 2018 on, the "*Cahiers*" have also a **Full Open Access Edition** (without Author Publication Charge): the pdf file of each quarterly issue is immediately freely downloadable on:

# cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques

créés par CHARLES EHRESMANN en 1958  
dirigés par Andrée CHARLES EHRESMANN  
VOLUME LXV-1, 1<sup>er</sup> trimestre 2024

## SOMMAIRE

MARCO GRANDIS, The Topology of Critical Processes, I	3
C. BERTRAND & M. DE GLAS, $\Omega$ -ensembles et Ensembles Empiriques revisités	35
JACQUES PENON, L'Enrichissement et ses différents Points de Vue, I	73





# THE TOPOLOGY OF CRITICAL PROCESSES, I (PROCESSES AND MODELS)

*Marco GRANDIS*

**Résumé.** Cet article fait partie d'un sujet, la topologie algébrique dirigée, dont l'objectif général est d'inclure les processus non réversibles dans le domaine de la topologie générale et algébrique. Ici, comme une étape successive, nous voulons également couvrir les « processus critiques », c'est-à-dire indivisibles et inarrêtables.

Cette partie introductive est consacrée à la mise en place du nouveau cadre et à la représentation de processus issus de divers domaines, en faisant appel à des prérequis mathématiques minimaux. La catégorie fondamentale et la structure d'homotopie du cadre actuel seront traitées dans les prochains articles.

**Abstract.** This article belongs to a subject, Directed Algebraic Topology, whose general aim is including non-reversible processes in the range of topology and algebraic topology. Here, as a further step, we also want to cover 'critical processes', indivisible and unstopable.

This introductory part is devoted to fixing the new framework and representing processes of diverse domains, with minimal mathematical prerequisites. The fundamental category and the homotopy structure of the present setting will be dealt with in a sequel.

**Keywords.** Directed algebraic topology, category theory for algebraic topology, hysteresis, hybrid systems.

**Mathematics Subject Classification (2010).** 55M, 55U, 74N, 93C30.

## Introduction

### 0.1 Aims

Directed Algebraic Topology is a recent subject, dating from the 1990's. It is an extension of Algebraic Topology, dealing with 'spaces' – typically the *directed spaces* studied in [Gr1, Gr2] – where the paths need not be reversible, with the general aim of including the representation of *irreversible processes*.

We want to introduce a further extension, called *controlled spaces*, where the paths need not be decomposable, in order to include *critical processes*, indivisible and unstoppable, either reversible or not.

Taking into account transformations that cannot be stopped is an unfortunate aspect of our time. But there are plenty of normal events which cannot be stopped or decomposed in parts, like quantum effects, the onset of a nerve impulse, the combustion of fuel in a piston, the switch of a thermostat, the change of state in a memory cell, deleting a file in a computer, the action of a siphon, the eruption of a geyser, an all-or-nothing transform in cryptography, moving in a section of an underground network, etc.

Critical processes and transport networks are often represented by graphs, in an effective way as far as they do not interact with continuous variation. We want to show that they can also be modelled by structured spaces, in a theory that includes classical topology and 'non-reversible spaces'.

Controlled spaces can thus unify aspects of continuous and discrete mathematics, interacting with sectors of Control Theory (see 0.6). The simple fact of classifying phenomena of diverse domains by mathematical models which live in the same world may have an interest: these models can be combined together, and studied with extensions of the usual tools of Algebraic Topology.

In this introductory part we fix the general framework, presenting many models and their concrete interpretations. The mathematical background is essentially restricted to elementary topology and basic category theory: limits and adjoint functors.

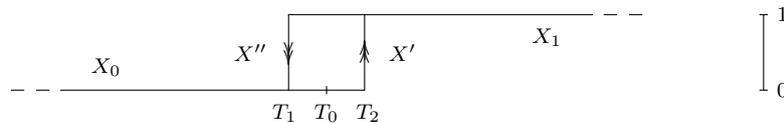
Part II of this series will introduce the fundamental category of con-

trolled spaces, with suitable methods of calculation. Their homotopy theory and the breaking of the usual symmetries of topology will be dealt with in a sequel.

## 0.2 An example

On-off controllers are systems overseeing a certain variable. Their description, as in the usual figure below, combines classical topology, where the variable moves freely, and graph theory, where a change of state takes place. We want to model them in one framework – an enriched form of topology.

For concreteness, let us think of a cooling system, with a thermostat set at temperature  $T_0$ , and a tolerance interval  $[T_1, T_2]$ . In the following picture the horizontal axis measures the temperature, and the vertical axis denotes two states: at level 0 the cooling device is off, at level 1 it is on



On the left branch  $X_0$  the system is in stand by; if the temperature reaches  $T_2$  the cooling device goes on, jumping to state 1; from there, if the temperature cools to  $T_1$ , it goes back to state 0.

An elementary hysteresis process, or ‘hysteron’, behaves the same way: for instance, the change of state in a memory cell, or the change of orientation in an elementary domain of a ferromagnetic object.

We shall construct a model of this process, ‘pasting’ two *natural* intervals  $X_0, X_1$  (with euclidean topology and nothing more) and two *one-jump* intervals  $X', X''$  where the paths allowed have to jump the whole interval, in the marked direction: see 3.1(a). More complex models can be used for combined systems, like a heating and cooling device, in 3.1(c), or a system that regulates two variables, for instance temperature and pressure in an air-supported dome, in 3.2.

### 0.3 Directed and controlled spaces

Directed spaces, our main structure meant to cover irreversible processes, were introduced in [Gr1] and extensively studied in a book on Directed Algebraic Topology [Gr2]; they are frequently used in the theory of concurrent processes, see 0.6.

A *directed space*  $X$ , or *d-space*, is a topological space equipped with a set  $X^\sharp$  of *directed paths*  $[0, 1] \rightarrow X$ , or *d-paths*, closed under: trivial loops, concatenation and partial increasing reparametrisation (including restrictions to subintervals). The selected paths, generally, cannot be travelled backwards but are *reflected* in the opposite d-space  $X^{\text{op}}$ .

A topological space has a *natural* structure of d-space, where all paths are selected. Directed Algebraic Topology is an extension of the classical case; in particular, the fundamental groupoid and the groups of singular homology are extended to directed versions: the fundamental category  $\uparrow\Pi_1(X)$  and the preordered abelian groups  $\uparrow H_n(X)$  of directed singular homology.

For all this we shall mainly refer to the book [Gr2]. The prefixes *d*- and  $\uparrow$  are used to distinguish a directed notion from the corresponding ‘reversible’ one.

We now relax the axioms of d-spaces, to include critical processes: essentially, the selected paths are no longer required to be closed under restriction; they are called *controlled paths*, and the prefix *c*- is used to distinguish the new notions. This is still a directed setting, pertaining to Directed Algebraic Topology.

In this extension we gain models of phenomena which have no place in the previous setting, and interesting formal ‘shapes’, like the *one-jump interval*  $c\mathbb{I}$ , the *one-stop circle*  $c\mathbb{S}^1$ , the *n-stop circle*  $c_n\mathbb{S}^1$ , or the higher controlled spheres and tori described in 2.3-2.6.

We also lose some good properties of the theory of d-spaces. The fundamental category and directed singular homology of d-spaces can be extended to c-spaces, but new methods of calculation will be needed: the van Kampen theorem and the Mayer-Vietoris sequence are both based on the subdivision of paths and homological chains, which is no longer permitted. Nevertheless, the fundamental category of ‘rigid’ c-spaces, as the previous ones, can be fairly simple to analyse, precisely

because of the scarcity of allowed paths.

Essentially, the previous setting of d-spaces extends classical topology by breaking the symmetry of reversion: the allowed paths need no longer be reversible and the fundamental groupoid becomes a category. This further extension to c-spaces breaks a flexibility feature that d-spaces still retain: paths can no longer be subdivided, and this has drastic consequences.

#### 0.4 The threshold effect

As another example, in the *threshold effect*, or *siphon effect*, the process is partially described by a variable  $v$  which can vary in a real interval  $[v_0, v_1]$ ; when the variable reaches the highest value, the *threshold*  $v_1$ , it jumps down to the least value  $v_0$ , in a way that cannot be stopped within the process itself.

There are many examples of this effect in Particle Physics, Natural Sciences, Computer Science, Medicine, Economics, Sociology, etc.

Some cases are well-known:

- in Hydraulics: the emptying of a basin through a siphon (see 3.3);
- in Biology: the onset of a nerve impulse ( $v$  is an electric potential);
- in Engineering: the combustion in a piston ( $v$  is the quantity of fuel);
- in Zoology and Sociology: mass migration ( $v$  is the rate of the population present in a region, with respect to the sustainable population).

The *anti-siphon effect* behaves in the opposite way: the threshold is at the lowest level  $v_0$ ; reaching it, the variable goes up to the highest value. The management of stocks of a given article, in a store or at home, roughly follows this pattern.

Two models are proposed for the siphon effect, in 3.3.

#### 0.5 An outline

In Section 1 we introduce the category  $\mathbf{cTop}$  of controlled spaces and we recall the category  $\mathbf{dTop}$  of directed spaces. We also examine the links among them and other domains: the categories  $\mathbf{Top}$  of topological

spaces and  $\text{pTop}$  of preordered spaces. Flexible and rigid paths, critical paths and critical points are dealt with in 1.6.

Section 2 begins with limits and colimits for  $c$ -spaces and  $d$ -spaces. Then we describe diverse  $c$ -structures on the interval  $[0, 1]$ , on the spheres, on the square  $[0, 1]^2$ , etc.

Finally, Section 3 explores less elementary processes and how they can be modelled: on-off controllers in 3.1 and 3.2; the threshold effect in 3.3; transport networks in 3.4.

## 0.6 Literature

The framework of  $d$ -spaces, its fundamental category and singular homology are used by various authors working in the theory of concurrency by methods of Directed Algebraic Topology.

This topic is covered in a recent book by L. Fajstrup, E. Goubault, E. Haucourt, S. Mimram and M. Raussen [FjGHMR], and many articles among which [CaGM, FjR, Gb, GbM, MeR, Ra1, Ra2]. The present setting of  $c$ -spaces is closely related to the ‘multipointed  $d$ -spaces’ introduced in [Ga].

In a different perspective, there are various approaches to what we are calling critical processes, generally more concrete than the present one. A comprehensive study of hysteretic processes, in the form of operators turning an input function into an output function, can be found in the book [BrS].

A combined analysis of continuous behaviours (possibly ruled by differential equations) and ‘jumps’ between them (possibly controlled by a state machine) is also present in the theory of switched systems [Fl, Li], hybrid control systems [Bra], hybrid automata [He] and networked control systems [BeHJ]. The author is indebted to the Referee and M. Raussen for suggesting these links. Some work will be required to explore the relationship between these approaches and the present one: for instance, differential equations can be used to select smooth paths, which would then generate part of the  $c$ -structure.

Hopefully the controlled spaces proposed here might form a common ground for diverse more specific frameworks.

## 0.7 Notation

The symbol  $\subset$  denotes weak inclusion. A continuous mapping between topological spaces, possibly structured, is called a *map*. Open and semiopen intervals of the real line are always denoted by square brackets, like  $]0, 1[$ ,  $[0, 1[$  etc. Marginal remarks are written in small characters.

A *preorder* relation, generally written as  $x \prec y$ , is assumed to be reflexive and transitive; an *order* relation, often written as  $x \leq y$ , is also assumed to be anti-symmetric. A mapping which preserves (resp. reverses) preorders is said to be *increasing* (resp. *decreasing*), always meant in the weak sense.

## 1. Spaces with selected paths

We introduce the category  $\mathbf{cTop}$  of controlled spaces, or *c-spaces*, an extension of the category  $\mathbf{dTop}$  of directed spaces studied in [Gr1, Gr2], and we examine the links between them. Both structures are based on topological spaces with ‘selected paths’ satisfying some axioms, more general for the new structure.

### 1.1 Spaces and preordered spaces

$\mathbf{Top}$  is the category of topological spaces and continuous mappings, or *maps*.

A *preordered topological space* is just a space equipped with a pre-order relation  $x \prec x'$  (reflexive and transitive), without assuming any relationship between these structures. They form the category  $\mathbf{pTop}$  of preordered topological spaces, with the increasing (i.e. pre-order preserving) continuous mappings.

A preordered topological space  $X$  is a ‘directed notion’, which can be reversed: the object  $X^{\text{op}}$  has the opposite pre-order  $x \prec^{\text{op}} x'$  (defined by  $x' \prec x$ ). This gives a (covariant) involutive endofunctor, called *reversor*

$$R: \mathbf{pTop} \rightarrow \mathbf{pTop}, \quad RX = X^{\text{op}}. \quad (1)$$

(The category  $\mathbf{Cat}$  of small categories has a similar reversor.)

$\mathbb{R}$  will denote the euclidean line as a topological space, and  $\mathbb{I}$  the standard euclidean interval  $[0, 1]$ . Similarly  $\mathbb{R}^n$  and  $\mathbb{I}^n$  are euclidean spaces.  $\mathbb{S}^n$  is the  $n$ -dimensional sphere.

On the other hand,  $\uparrow\mathbb{R}$  and  $\uparrow\mathbb{I}$  are ordered topological spaces, with their natural (total) order;  $\uparrow\mathbb{R}^n$  and  $\uparrow\mathbb{I}^n$  are cartesian powers in  $\mathbf{pTop}$ , with the product order:  $(x_i) \leq (y_i)$  if and only if, for all  $i$ ,  $x_i \leq y_i$ .

Homotopy theory in  $\mathbf{Top}$  is parametrised on  $\mathbb{I}$ . In  $\mathbf{pTop}$  it is parametrised on the ordered interval  $\uparrow\mathbb{I}$ , yielding an elementary form of directed homotopy (cf. [Gr2], 1.1.3-5).

## 1.2 The terminology of paths

In a topological space  $X$ , a (continuous) map  $a: \mathbb{I} \rightarrow X$  is called a *path* in  $X$ , from  $a(0)$  to  $a(1)$  – its endpoints. It is a *loop* at  $x$  if  $a(0) = x = a(1)$ .

We begin by listing the (rather standard) terminology that we shall use for paths.

(a) *Concatenation*. The concatenation of paths will be written as  $a' * a''$ ; the constant (or trivial, or degenerate) loop at the point  $x$  is written as  $e_x$ ; the *reversed* path  $t \mapsto a(1 - t)$  as  $a^\sharp$ .

We recall that the (standard, or regular) concatenation  $a = a' * a''$  of two consecutive paths  $a', a''$  (with  $a'(1) = a''(0)$ ) is defined as

$$a(t) = \begin{cases} a'(2t), & \text{for } 0 \leq t \leq 1/2, \\ a''(2t - 1), & \text{for } 1/2 \leq t \leq 1. \end{cases} \quad (2)$$

As an important feature of topological spaces, called here the *path splitting property*, every path  $a$  has a unique decomposition  $a = a' * a''$ , with:

$$a'(t) = a(t/2), \quad a''(t) = a((t + 1)/2) \quad (t \in \mathbb{I}). \quad (3)$$

The operation of concatenation is not associative, the constant loops do not behave as identities, and the reversed paths are not inverses – except in trivial cases (e.g. in discrete spaces). But this works up to homotopy with fixed endpoints, which allows us to define the fundamental groupoid  $\Pi_1(X)$  of a space, and the fundamental group  $\pi_1(X, x_0)$  of a pointed space.

(b) *Regular concatenation.* The *regular  $n$ -ary concatenation*  $a = a_1 * \dots * a_n$  of consecutive paths is based on the regular partition  $0 < 1/n < 2/n < \dots < 1$  of the standard interval, and is again uniquely determined (it is understood that  $i = 1, \dots, n$ ):

$$\begin{aligned} a(t) &= a_i(nt - i + 1), & \text{for } t \in [(i-1)/n, i/n], \\ a_i(t) &= a((t + i - 1)/n), & \text{for } t \in \mathbb{I}. \end{aligned} \quad (4)$$

(c) *General concatenation.* More generally,  $a = C((a_i), (t_i))$  will denote a *general concatenation* of  $n$  consecutive paths  $a_1, \dots, a_n$ , based on an arbitrary partition  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$  of  $\mathbb{I}$

$$\begin{aligned} a(t) &= a_i((t - t_{i-1})/\tau_i), & \text{for } t \in [t_{i-1}, t_i], \\ a_i(t) &= a(\tau_i t + t_{i-1}), & \text{for } t \in \mathbb{I} \quad (\tau_i = t_i - t_{i-1}). \end{aligned} \quad (5)$$

(d) *Reparametrisation.* We are interested in reparametrising the path  $a$  as  $a\rho: \mathbb{I} \rightarrow X$ , where the *reparametrisation*  $\rho: \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{I}$  is any increasing map. We speak of a *global reparametrisation* if  $\rho$  is surjective, that is  $\rho(0) = 0$  and  $\rho(1) = 1$ . We speak of an *invertible reparametrisation* if  $\rho$  is an increasing homeomorphism, or equivalently an automorphism  $\mathbb{I} \rightarrow \mathbb{I}$  of ordered sets (or of ordered topological spaces).

Plainly, all  $n$ -ary concatenations are equivalent, up to invertible reparametrisation.

Of course, a non-surjective reparametrisation ‘restricts’ a path: for instance, if  $\rho(t) = t/2$  (as in formula (3)), the path  $a\rho$  covers the first half of  $a$ ; let us note that it is still parametrised on  $\mathbb{I}$ . More drastically, if  $\rho$  is constant  $a\rho$  is a constant loop.

A *restriction* will be an affine, non-degenerate (i.e. non-constant), increasing map:

$$\rho: \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{I} \quad \rho(t) = (t_2 - t_1)t + t_1 \quad (0 \leq t_1 < t_2 \leq 1). \quad (6)$$

By the usual pleonastic terminology, a reparametrisation will also be called a *partial reparametrisation* when we want to stress that it is not assumed to be global (although it might be).

### 1.3 Main definitions, I

A *controlled space*  $X$ , or *c-space*, will be a topological space equipped with a set  $X^\sharp$  of (continuous) maps  $a: \mathbb{I} \rightarrow X$ , called *controlled paths*, or *c-paths*, that satisfies three axioms:

(csp.0) (*constant paths*) the trivial loops at the endpoints of a controlled path are controlled,

(csp.1) (*concatenation*) the controlled paths are closed under path concatenation: if the consecutive paths  $a, b$  are controlled, their concatenation  $a * b$  is also,

(csp.2) (*global reparametrisation*) the controlled paths are closed under pre-composition with every surjective increasing map  $\rho: \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{I}$ : if  $a$  is a controlled path,  $a\rho$  is also.

As a consequence, the c-paths are also closed under general concatenation. The underlying topological space is written as  $U(X)$ , or  $|X|$ , and called the *support* of  $X$ .

A *map* of c-spaces  $f: X \rightarrow Y$ , or *c-map*, is a continuous mapping between c-spaces which preserves the selected paths. Their category will be written as  $\mathbf{cTop}$ .

A c-space  $X$  is a directed notion. Reversing c-paths, by the involution  $r(t) = 1 - t$ , yields the *opposite* c-space  $RX = X^{\text{op}}$ , where  $a \in (X^{\text{op}})^\sharp$  if and only if  $ar$  belongs to  $X^\sharp$ . This defines the *reversor* endofunctor

$$R: \mathbf{cTop} \rightarrow \mathbf{cTop}, \quad RX = X^{\text{op}}. \quad (7)$$

A c-path  $a$  of  $X$  is *reversible* if  $ar$  is also controlled. The c-space itself is *reversible* if  $X = X^{\text{op}}$ , that is if all its c-paths are reversible. More generally, it is *reversible* if it is isomorphic to  $X^{\text{op}}$ .

### 1.4 Main definitions, II

Controlled spaces extend a structure introduced in [Gr1], also studied in [Gr2] and elsewhere (see 0.6).

A *directed space*  $X$ , or *d-space*, is equipped with a set  $X^\sharp$  of maps  $a: \mathbb{I} \rightarrow X$ , called *directed paths*, or *d-paths*, that satisfies three axioms:

(dsp.0) (*constant paths*) every trivial loop is directed,

(dsp.1) (*concatenation*) if the consecutive paths  $a, b$  are directed, their concatenation  $a * b$  is also,

(dsp.2) (*partial reparametrisation*) if  $\rho: \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{I}$  is an increasing map and  $a$  is a directed path,  $a\rho$  is also.

The second axiom is the same of c-spaces (up to terminology), the others are stronger; every d-space is a c-space, and the notation  $X^\sharp$  for the set of selected paths is consistent. (In [Gr1, Gr2] this set is written as  $dX$ , a notation which has no good extension here.)

A *map* of d-spaces, or *directed map*, or *d-map*, is a continuous mapping which preserves the directed paths. Their category  $\mathbf{dTop}$  is a full subcategory of  $\mathbf{cTop}$ . The reversor endofunctor works in the same way.

A ‘multipointed d-space’, introduced by P. Gaucher [Ga] in 2009, is more general: (dsp.0) is not assumed and (dsp.2) is only required for invertible reparametrisations. It also generalises a c-space.

### 1.5 Standard intervals

The difference between these settings shows clearly in two structures of the euclidean interval  $[0, 1]$ .

(a) In  $\mathbf{dTop}$  the *standard d-interval*  $\uparrow\mathbb{I}$  has for directed paths all the increasing maps  $\mathbb{I} \rightarrow \mathbb{I}$ . It plays the role of the standard interval in the category  $\mathbf{dTop}$ , because the directed paths of any d-space  $X$  coincide with the d-maps  $\uparrow\mathbb{I} \rightarrow X$ .

It may be viewed as the essential model of a non-reversible process, or a one-way route in transport networks. It will be represented as

$$\begin{array}{ccc} \longleftarrow & \longrightarrow & \longleftarrow \\ | & & | \\ 0 & & 1 \end{array} \quad (8)$$

(b) In  $\mathbf{cTop}$  the *standard c-interval*  $c\mathbb{I}$ , or *one-jump interval*, has the same support, with controlled paths the surjective increasing maps  $\mathbb{I} \rightarrow \mathbb{I}$  and the trivial loops at 0 or 1. The controlled paths of any c-space  $X$  coincide with the c-maps  $c\mathbb{I} \rightarrow X$ . It models a *non-reversible unstopable process*, or a *one-way no-stop route*

$$\begin{array}{ccc} \bullet & \longrightarrow & \bullet \\ | & & | \\ 0 & & 1 \end{array} \quad (9)$$

### 1.6 Flexible paths and critical points

(a) *Flexible paths.* In a c-space  $X$ , a point  $x$  will be said to be *flexible* if its trivial loop  $e_x$  is controlled; the *flexible support*  $|X|_0$  is the subspace of these points. In a diagram, an isolated flexible point will be marked by a bullet, as in figure (9) above.

We say that a controlled path  $a$  is *splittable* if its halves  $a', a''$  (cf. (3)) are also controlled, so that the decomposition  $a = a' * a''$  stays within c-paths; we say that  $a$  is *flexible* if all its restrictions are controlled (see (6)), or equivalently all its decompositions in general concatenations give raise to c-paths. Each controlled trivial loop is flexible. A c-map preserves all these properties.

The c-space itself is *flexible* if every point and every c-path is flexible. A c-space is a d-space if and only if it is flexible, if and only if every trivial loop is controlled and all its controlled paths are splittable.

A c-path  $a$  is *rigid* if in each general concatenation of  $a$  by controlled paths, precisely one of them is not constant. A c-space is *rigid* if every non-trivial path is a general concatenation of rigid paths. The interval  $c\mathbb{I}$  is rigid, as well as many c-spaces introduced in the next section.

(b) *Critical paths and critical points.* In a c-space  $X$ , a controlled path is *critical* if it is not flexible.

A point  $x$  is:

- *critical*, if every non-trivial c-path  $a$  through  $x$  (i.e.  $x \in \text{Im } a$ ) is critical, and there is some,
- *future critical*, if every non-trivial c-path starting there is critical, and there is some,
- *past critical*, if every non-trivial c-path arriving there is critical, and there is some.

A future or past critical point  $x$  is always flexible, a critical point need not. A d-space has no critical points.

In the interval  $c\mathbb{I}$  all points are critical, the point 0 is also future critical, while 1 is also past critical. There are c-spaces where these three kinds are disjoint: see 2.3(e).

### 1.7 Reshaping and generated structures

The c-structures on a topological space  $X$  are closed under arbitrary intersection (as subsets of  $\text{Top}(\mathbb{I}, X)$ ), and form a complete lattice for the inclusion: we say that the structure  $X_1$  is *finer* than  $X_2$  if  $X_1^\sharp \subset X_2^\sharp$ , or equivalently if the identity map of  $X$  gives a map  $X_1 \rightarrow X_2$ ; this map is called a *reshaping*.

(a) Every set  $S$  of paths in the space  $X$  generates a c-structure, the finest, or smallest, containing it. It is obtained by adding all the constant loops at the endpoints of the paths of  $S$ , and stabilising the latter under global reparametrisation and general concatenation.

(b) Similarly, the d-structures on a topological space  $X$  form a complete lattice. Every set of paths of  $X$  generates a d-structure.

(c) If we start from a c-space  $X$ , the d-structure generated by the c-paths can be obtained stabilising them under constant paths, restriction and general concatenation.

(d) The forgetful functor  $U: \text{dTop} \rightarrow \text{Top}$  takes a d-space to its support, the underlying topological space  $|X|$ . It has a left and a right adjoint

$$U: \text{dTop} \begin{array}{c} \longleftarrow \\ \rightleftarrows \\ \longrightarrow \end{array} \text{Top} : D, D' \quad D \dashv U \dashv D'. \quad (10)$$

For a topological space  $T$ , the d-space  $DT$  is the same space with the *discrete d-structure* (the finest, or smallest), with directed paths all the trivial loops.  $D'T$  has the *indiscrete d-structure* (the largest, or coarsest), where all paths are directed.

(e) The category  $\text{cTop}$  has two forgetful functors to topological spaces

$$U: \text{cTop} \rightarrow \text{Top}, \quad U_0: \text{cTop} \rightarrow \text{Top}, \quad (11)$$

where  $U(X) = |X|$  is the topological support and  $U_0(X) = |X|_0$  is the flexible support.  $U$  has both adjoints,  $U_0$  has only the left one

$$D_c \dashv U \dashv D', \quad D \dashv U_0. \quad (12)$$

For a topological space  $T$ , the c-space  $D_cT$  is the same space with the *discrete c-structure*: no path is controlled.  $D'T$  has the *indiscrete*

*c-structure*, where all paths are controlled. In  $DT$  all trivial loops are controlled. The functors  $D$  and  $D'$  take values in  $d\mathbf{Top}$ , and are denoted as previously.

A topological space will be viewed as a  $c$ -space (and a  $d$ -space) by its *natural* structure  $D'T$ , so that all its paths are selected.

(f) The singleton has two structures in  $c\mathbf{Top}$ : the *c-discrete* singleton  $D_c\{*\}$  and the *flexible singleton*  $\{*\}$  ( $= D\{*\} = D'\{*\}$ ), having a controlled loop  $e_*$ ; the flexible singleton is by far more important, as it is the terminal object and the unit of the cartesian product (see 2.1).

A  $c$ -map  $x: D_c\{*\} \rightarrow X$  is ‘the same’ as a point of  $X$ , while a  $c$ -map  $x: \{*\} \rightarrow X$  is a flexible point. In other words,  $D_c\{*\}$  represents the functor  $U: c\mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{Set}$ , while  $\{*\}$  represents  $U_0: c\mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{Set}$ .

(g) All the  $c$ -spaces  $DT$  are trivially flexible and rigid.

### 1.8 Comparing directed structures

We are considering three ways of enriching topological spaces by a directed structure (in a general sense), encoded in the categories  $p\mathbf{Top}$ ,  $d\mathbf{Top}$  and  $c\mathbf{Top}$ . We now examine their interplay.

A preordered topological space  $X$  (in the sense recalled in 1.1) will always be viewed as a  $d$ -space (and a  $c$ -space) by selecting the increasing (continuous) paths  $\uparrow\mathbb{I} \rightarrow X$ , where  $\uparrow\mathbb{I}$  denotes the ordered euclidean interval  $[0, 1]$ .

This defines a functor  $d: p\mathbf{Top} \rightarrow d\mathbf{Top}$ , and our categories are linked by three obvious functors

$$d: p\mathbf{Top} \rightarrow d\mathbf{Top}, \quad d\mathbf{Top} \subset c\mathbf{Top}, \quad d: p\mathbf{Top} \rightarrow c\mathbf{Top}. \quad (13)$$

Let us note that  $d$  is *not an embedding*: trivially, all preorders on a discrete topological space give the same selected paths, namely the trivial loops. (One can find more interesting examples in [Gr2], 1.4.5.)

(a) There is an adjunction

$$d: p\mathbf{Top} \rightleftarrows d\mathbf{Top} : p, \quad p \dashv d, \quad (14)$$

where the left adjoint  $p$  provides a  $d$ -space with the *path-preorder*  $x \preceq x'$ , meaning that there exists a  $d$ -path from  $x$  to  $x'$ . The counit on a

preordered space  $X$  is the preorder-reshaping  $\mathbf{pd}X \rightarrow X$ : if  $x \preceq x'$  there exists a d-path from  $x$  to  $x'$  in  $\mathbf{d}X$ , whence  $x \prec x'$  in  $X$ .

Both functors  $\mathbf{p}, \mathbf{d}$  are faithful. A d-space is said to be of *(pre)order type* if it can be obtained, as above, from a topological space with such a structure. Thus  $\uparrow\mathbb{R}^n$  and  $\uparrow\mathbb{I}^n$  are of order type;  $\mathbb{R}^n$ ,  $\mathbb{I}^n$  and  $\mathbb{S}^n$  are of chaotic-preorder type. The directed sphere  $\uparrow\mathbb{S}^n$  described in 2.5 is not of preorder type (for  $n > 0$ ).

(b) The embedding  $\mathbf{dTop} \rightarrow \mathbf{cTop}$  has a left and a right adjoint:

$$\begin{aligned} \hat{\phantom{c}} : \mathbf{cTop} &\rightarrow \mathbf{dTop} && \text{(the reflector),} \\ \mathbf{Fl} : \mathbf{cTop} &\rightarrow \mathbf{dTop} && \text{(the coreflector).} \end{aligned} \quad (15)$$

For a c-space  $X$ , the *generated d-space*  $\hat{X}$  has the same underlying topological space with the d-structure generated by the c-paths. The unit of the adjunction is the reshaping  $X \rightarrow \hat{X}$ , the counit is the identity  $\hat{Y} = Y$  for a d-space  $Y$ .

In the second construction the *flexible part*  $\mathbf{Fl}X$  is the flexible support  $|X|_0$  with the d-structure of the flexible c-paths. The counit is the inclusion  $\mathbf{Fl}X \rightarrow X$ , the unit is the identity  $Y = \mathbf{Fl}Y$  for a d-space  $Y$ .

The full subcategory of reversible c-spaces has a similar reflector and coreflector: the *generated reversible c-space* and the *reversible part*.

(c) Composing the adjunction (14) with the previous reflection

$$\mathbf{pTop} \begin{array}{c} \xleftarrow{\mathbf{p}} \\ \xrightarrow{\mathbf{d}} \end{array} \mathbf{dTop} \begin{array}{c} \xleftarrow{\hat{\phantom{c}}} \\ \xrightarrow{\mathbf{c}} \end{array} \mathbf{cTop} \quad \mathbf{pTop} \begin{array}{c} \xleftarrow{\hat{\mathbf{p}}} \\ \xrightarrow{\mathbf{d}} \end{array} \mathbf{cTop} \quad (16)$$

we get the adjunction  $\hat{\mathbf{p}} \dashv \mathbf{d}$ , where  $\mathbf{d}$  still equips a preordered space  $X$  with the increasing maps  $\uparrow\mathbb{I} \rightarrow X$  as c-paths (producing a d-space), while  $\hat{\mathbf{p}}(X) = \mathbf{p}(\hat{X})$  provides a c-space with the *generated-path preorder*  $x \preceq x'$ , depending on the d-paths of  $\hat{X}$ . (The c-paths of  $X$  give a preorder on the flexible support  $|X|_0$ , not used here.)

## 2. Limits, colimits and structural models

Limits and colimits, for c-spaces and d-spaces, are easily obtained as topological limits and colimits with the initial or terminal structure determined by the structural maps.

Then we describe diverse c-structures on the interval, the spheres and the square; they can represent elementary events and will be used as bricks to form models of more complex processes.

## 2.1 Limits and colimits

We already remarked that the c-structures on a topological space  $T$  form a complete lattice. Therefore every family of maps  $f_i: T \rightarrow X_i$  with values in c-spaces defines an initial c-structure on the space  $T$ : a path  $a$  is controlled if and only if all composites  $f_i a$  are. Dually, every family of maps  $f_i: X_i \rightarrow T$  defined on c-spaces gives raise to a final c-structure on the space  $T$ : the controlled paths in  $T$  are generated by all the paths  $f_i a$ , where  $a \in X_i^\sharp$  for some index  $i$ .

A (controlled) *subspace*  $X' \subset X$  of a c-space  $X$  has the initial structure of the embedding, which selects those paths in  $X'$  that are controlled in  $X$ . A (controlled) *quotient*  $X/R$  has the quotient structure, that is the final one for the projection  $p: X \rightarrow X/R$ ; it is generated by the projected c-paths through general concatenation (see 1.7(a)).

The category  $\mathbf{cTop}$  has all limits and colimits, constructed as in  $\mathbf{Top}$  and equipped with the initial or final c-structure for the structural maps. For instance a path  $\mathbb{I} \rightarrow \prod_i X_i$  with values in a product of c-spaces is controlled if and only if all its components  $\mathbb{I} \rightarrow X_i$  are, while a path  $\mathbb{I} \rightarrow \sum_i X_i$  with values in a sum is controlled if and only if it is in some summand  $X_i$ . Equalisers and coequalisers are realised as subspaces or quotients, in the sense described above.

We already described the terminal  $\{*\}$ , which is the unit of the cartesian product. On the other hand,  $X \times D_c\{*\}$  is the discrete c-structure  $D_c|X|$  on the underlying space.

If  $X$  is a c-space and  $A \subset |X|$  is a *non-empty* subset,  $X/A$  will denote the c-quotient of  $X$  which identifies all points of  $A$ .

All this works in the same way in  $\mathbf{pTop}$  and  $\mathbf{dTop}$ . The embedding  $\mathbf{dTop} \subset \mathbf{cTop}$  preserves all limits and colimits, as it has both adjoints (see (15)). On the other hand, the canonical functors  $\mathbf{d}: \mathbf{pTop} \rightarrow \mathbf{dTop}$  and  $\mathbf{d}: \mathbf{pTop} \rightarrow \mathbf{cTop}$  of (13) preserve limits (as right adjoints) and sums (obviously), but do not preserve coequalisers.

In fact, in  $\mathbf{pTop}$  the coequaliser of the endpoints  $\{*\} \rightrightarrows \uparrow\mathbb{I}$  is

the circle  $\mathbb{S}^1$  with the indiscrete preorder. In  $\mathbf{dTop}$  (and  $\mathbf{cTop}$ ) we get a non-trivial d-structure, the directed circle  $\uparrow\mathbb{S}^1$ , described below in 2.5(a). Essentially, this is ‘why’ directed homotopy is simple but very elementary in  $\mathbf{pTop}$ .

(The standard c-circle  $\mathbf{cS}^1$ , described in 2.6(a), is the coequaliser of the endpoints in  $\mathbf{c}\mathbb{I}$ .)

## 2.2 Controlled actions

Let  $G$  be a group, in additive notation (although not necessarily commutative). A *controlled  $G$ -space* is a c-space  $X$  equipped with a (right) *action* of  $G$ : this is an action on the underlying topological space such that, for each  $g \in G$ , the induced map

$$X \rightarrow X, \quad x \mapsto x + g, \quad (17)$$

is a map of c-spaces (and therefore an isomorphism of  $\mathbf{cTop}$ ). Directed  $G$ -spaces are a particular case.

The c-space *of orbits*  $X/G$  is the quotient c-space, modulo the equivalence relation which collapses each orbit to a point. Its c-paths are simply the projections of the directed paths of  $X$ , as verified below. The same holds for d-spaces.

We have to prove that these projections are closed under global (resp. partial) reparametrisation and binary concatenation. The first fact is obvious. As to the second, let  $a, b: \mathbb{I} \rightarrow X$  be two selected paths whose projections are consecutive in  $X/G$ : there is some  $g \in G$  such that  $a(1) = b(0) + g$ . Then the path  $b'(t) = b(t) + g$  is selected in  $X$ , and  $a * b'$  is also. Finally, writing as  $p: X \rightarrow X/G$  the canonical projection,  $pa * pb = p(a * b')$  is the projection of a selected path.

## 2.3 Elementary models

(a) The euclidean interval  $\mathbb{I}$  and the euclidean line  $\mathbb{R}$  have the natural d-structure, where all paths are selected. The same holds for their cartesian powers  $\mathbb{I}^n$  and  $\mathbb{R}^n$ , and for all spheres  $\mathbb{S}^n$ .  $\mathbb{I}$  will be called the *natural* interval.

(b) The ordered euclidean interval  $\uparrow\mathbb{I}$  and the ordered euclidean line  $\uparrow\mathbb{R}$  have the d-structure given by the increasing paths (already recalled for

the former). The same holds for their cartesian powers  $\uparrow\mathbb{I}^n$  and  $\uparrow\mathbb{R}^n$ . They are not reversible (for  $n > 0$ ), yet reversible, i.e. isomorphic to the opposite structure.

$\uparrow\mathbb{I}$  is the standard ordered interval, and also the standard d-interval, as already said. Its d-structure is generated by the identity map  $\mathbb{I} \rightarrow \mathbb{I}$ ; a d-map  $\uparrow\mathbb{I} \rightarrow X$  is the same as a directed path of  $X$ .

But  $\uparrow\mathbb{I}$  will also be important in  $c\mathbf{Top}$ , as the *flexible interval*. Indeed, for a c-space  $X$ , the c-maps  $\uparrow\mathbb{I} \rightarrow X$  are the flexible paths of  $X$ .

(c) We already introduced the standard controlled interval  $c\mathbb{I}$ , with the c-structure generated by the identity map  $\mathbb{I} \rightarrow \mathbb{I}$ : the c-paths are the surjective increasing maps  $\mathbb{I} \rightarrow \mathbb{I}$  and the trivial loops at the endpoints. The c-maps  $c\mathbb{I} \rightarrow X$  are the selected paths of the c-space  $X$  (possibly a d-space).

The c-space  $c\mathbb{I}$  will also be called the *quantum interval*, or the *one-jump interval*

$$\begin{array}{ccc} \bullet & \xrightarrow{\gg} & \bullet \\ 0 & & 1 \end{array} \quad c\mathbb{I} \quad (18)$$

The generated d-space is  $(c\mathbb{I})^\wedge = \uparrow\mathbb{I}$ , while the flexible part  $\text{Fl}(c\mathbb{I}) = D\{0, 1\}$  is the discrete boundary  $\partial\mathbb{I}$  of the interval, with its trivial loops.

(d) The *line with integral stops*  $c\mathbb{R}$ , or *integral jumps*, is equipped with the c-structure generated by the family of embeddings  $\mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $t \mapsto t + k$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ). Now the c-paths are the increasing maps  $\mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R}$  whose image is precisely an interval  $[k, k']$  with integral endpoints (possibly the same)

$$\begin{array}{ccccccc} \text{---} & \bullet & \xrightarrow{\gg} & \bullet & \xrightarrow{\gg} & \bullet & \xrightarrow{\gg} & \bullet & \xrightarrow{\gg} & \bullet & \text{---} \\ & -1 & & 0 & & 1 & & 2 & & 3 & \end{array} \quad (19)$$

The line  $c\mathbb{R}$  is a controlled  $\mathbb{Z}$ -space, with respect to the action of the group  $\mathbb{Z}$  by translations. The interval  $c\mathbb{I}$  is a subspace of  $c\mathbb{R}$ , and the latter is the controlled  $\mathbb{Z}$ -space generated by the embedding of  $c\mathbb{I}$ .

The line  $c\mathbb{R}$  is a rigid c-space (see 1.6): the rigid paths are those of length 1, and every non-trivial c-path is a concatenation of them, on a suitable partition. All points of  $c\mathbb{R}$  are critical; the integral numbers

are also past and future critical. The generated d-space  $(c\mathbb{R})^\wedge = \uparrow\mathbb{R}$  is of order type; the flexible part  $\text{Fl}(c\mathbb{I}) = D\mathbb{Z}$  is the discrete integral line with the discrete d-structure.

(e) Let  $X$  be the euclidean ordered interval  $[0, 3]$ , with controlled paths given by the increasing maps  $\mathbb{I} \rightarrow X$  whose image either contains the open subinterval  $]1, 2[$  or does not meet it.

Loosely speaking, we are modelling a process measured on the interval  $[0, 3]$ , which

- can only proceed ‘forward’,
- passing point 1, is obliged to go on to point 2, at least,

or a one-way route with a no-stop section, or a stream with rapids

$$\begin{array}{ccccccc}
 & \longrightarrow & & \longrightarrow & & \longrightarrow & \\
 0 & & 1 & & 2 & & 3
 \end{array} \tag{20}$$

The point 1 is future critical; all the points of  $]1, 2[$  are not flexible and critical; 2 is past critical. The generated d-space  $\hat{X} = \uparrow[0, 3]$  is the ordered structure, while  $\text{Fl} X$  is the ordered structure on the flexible support  $[0, 1] \cup [2, 3]$ .

### 2.4 Other structures on the interval

We have already seen three c-structures on the euclidean interval  $[0, 1]$ : the natural structure  $\mathbb{I}$ , where all paths are controlled; the ordered structure  $\uparrow\mathbb{I}$ , with the increasing paths; the one-jump structure  $c\mathbb{I}$ , with the surjective increasing paths and the trivial loops at the endpoints.

There are many others, that can be used as bricks of modelisation. We list here some of them; two ‘siphon structures’ can be found in 3.3.

(a) The *two-jump interval*  $c\mathbb{J}$  has the c-structure generated by the restrictions to the first or second half

$$c^-(t) = t/2, \quad c^+(t) = (t + 1)/2 \quad (t \in \mathbb{I}), \tag{21}$$

$$\begin{array}{ccccccc}
 & \longrightarrow & & \longrightarrow & & \longrightarrow & \\
 0 & & 1/2 & & 1 & & 
 \end{array}$$

The non-trivial c-paths are the increasing maps  $\mathbb{I} \rightarrow \mathbb{I}$  whose image is either  $[0, 1/2]$ , or  $[1/2, 1]$ , or  $[0, 1]$ . This c-space is isomorphic to the subspace  $c[0, 2] \subset c\mathbb{R}$ , and can model a *non-reversible two-stage process*. Formally, it parametrises the concatenation of two c-paths (see Part II).

(b) *Delayed intervals*. The *past-delayed c-interval*  $c_-\mathbb{I}$  will be the euclidean interval  $[0, 1]$  with the c-structure generated by the past-delayed reparametrisation  $\rho: \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{I}$

$$\rho(t) = 0 \vee (2t - 1), \quad \sigma(t) = 2t \wedge 1, \quad (22)$$

while the *future-delayed c-interval*  $c_+\mathbb{I}$  has the c-structure generated by the future-delayed reparametrisation  $\sigma: \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{I}$ .

In  $c_-\mathbb{I}$  the non-trivial controlled paths are the surjective increasing maps  $\mathbb{I} \rightarrow \mathbb{I}$  which are constant on some non-degenerate interval  $[0, t_1]$ . For a c-space  $X$ , a c-map  $c_-\mathbb{I} \rightarrow X$  is the same as a *past-delayed c-path* (constant as above).

These c-spaces are not reversive, but anti-isomorphic to each other, by reversion

$$r: c_-\mathbb{I} \rightarrow (c_+\mathbb{I})^{\text{op}}, \quad r(t) = 1 - t. \quad (23)$$

Their structures are rigid and finer than  $c\mathbb{I}$ , because their generators are surjective increasing maps, i.e. controlled paths in  $c\mathbb{I}$ .

There are many delayed structures on the interval. They can model *irreversible non-stoppable processes with inertia, or inductance*.

(c) The *reversible d-interval*  $\mathbb{I}^\sim$  is the d-space generated by identity and reversion  $\text{id}, r: \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{I}$ ; its directed paths are the piecewise monotone maps  $\mathbb{I} \rightarrow \mathbb{I}$ . The reversible directed paths of a d-space  $X$  coincide with the d-maps  $\mathbb{I}^\sim \rightarrow X$ .  $\mathbb{I}^\sim$  is strictly finer than the natural interval  $\mathbb{I}$ ; it can model a shock absorber.

(d) The *one-jump reversible interval*  $c\mathbb{I}^\sim$  has the c-structure generated by identity and reversion  $\text{id}, r: \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{I}$ . The reversible c-paths of a c-space  $X$  coincide with the c-maps  $c\mathbb{I}^\sim \rightarrow X$ .

Every c-path in  $c\mathbb{I}^\sim$  has an integral length and those of length 1 are rigid;  $c\mathbb{I}^\sim$  is rigid and the generated d-space is  $\mathbb{I}^\sim$ . The interval  $c\mathbb{I}^\sim$  can (basically) model a *reversible non-stoppable process*, like the change of

state in a memory cell, or a *two-way no-stop route*, or the flights of an airplane between two airports

$$\begin{array}{c} \bullet \longleftarrow \rightleftarrows \longrightarrow \bullet \\ 0 \qquad \qquad \qquad 1 \end{array} \quad c\mathbb{I}^{\sim} \quad (24)$$

## 2.5 Directed spheres and tori

(a) The *standard d-circle*  $\uparrow\mathbb{S}^1$  is the standard circle with the *anticlockwise structure*, where the directed paths  $a: \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{S}^1$  move this way, in the oriented plane  $\mathbb{R}^2$ :  $a(t) = (\cos \vartheta(t), \sin \vartheta(t))$ , with an increasing continuous argument  $\vartheta: \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\begin{array}{c} \curvearrowleft \\ \circlearrowleft \\ \uparrow\mathbb{S}^1 \end{array} \quad (25)$$

The directed circle can be described as an orbit space

$$\uparrow\mathbb{S}^1 = (\uparrow\mathbb{R})/\mathbb{Z}, \quad (26)$$

with respect to the action of the group of integers on the directed line  $\uparrow\mathbb{R}$ , by translations: the directed paths of  $\uparrow\mathbb{S}^1$  are simply the projections of the increasing paths in the line.

The c-space  $\uparrow\mathbb{S}^1$  can also be obtained as the coequaliser in  $d\mathbf{Top}$  of the following pair of maps

$$\partial^-, \partial^+ : \{*\} \rightrightarrows \uparrow\mathbb{I}, \quad \partial^-(*) = 0, \quad \partial^+(*) = 1. \quad (27)$$

Indeed, this coequaliser is the quotient  $\uparrow\mathbb{I}/\partial\mathbb{I}$ , which identifies the endpoints; the d-structure of the quotient, generated by the projected paths, is what we want: it is sufficient to concatenate a finite number of projected paths, which are already stable under partial reparametrisation.

(b) The *standard directed n-sphere* is defined, for  $n > 0$ , as the quotient of the directed cube  $\uparrow\mathbb{I}^n$  modulo its (ordinary) boundary  $\partial\mathbb{I}^n$

$$\uparrow\mathbb{S}^n = (\uparrow\mathbb{I}^n)/(\partial\mathbb{I}^n), \quad \uparrow\mathbb{S}^0 = \mathbb{S}^0 = \{-1, 1\} \quad (n > 0), \quad (28)$$

while  $\uparrow\mathbb{S}^0$  has the discrete topology and the natural d-structure (obviously discrete).

All directed spheres are reversionary; their d-structure can be described by an asymmetric distance (see [Gr2], 6.1.5). The pointed suspension of  $\mathbb{S}^0$  in the category of pointed d-spaces gives  $\uparrow\mathbb{S}^1$  and, by iteration, all higher  $\uparrow\mathbb{S}^n$  ([Gr2], 1.7.4, 1.7.5). The unpointed suspension gives different d-spaces, less interesting.

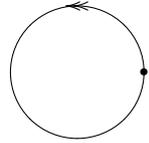
(c) The *standard directed n-torus* is a cartesian power of  $\uparrow\mathbb{S}^1$

$$\uparrow\mathbb{T}^n = (\uparrow\mathbb{S}^1)^n. \quad (29)$$

Equivalently, it is the orbit d-space  $(\uparrow\mathbb{R}^n)/\mathbb{Z}^n$ , for the action of the additive group  $\mathbb{Z}^n$  by translations.

## 2.6 Controlled spheres and tori

(a) The *standard c-circle*  $c\mathbb{S}^1$ , or *one-stop circle*, is now defined as the orbit c-space of the line  $c\mathbb{R}$  for the action of the group  $\mathbb{Z}$ , by translations



$$c\mathbb{S}^1 = (c\mathbb{R})/\mathbb{Z} \quad (30)$$

The controlled paths of  $c\mathbb{S}^1$  are the projections of the controlled paths in the line: here this means an anticlockwise path (as in 2.5(a)) which is a loop at  $[0]$ , the only flexible point (corresponding to  $(1, 0)$  in the plane). The simple loops are rigid, and so is  $c\mathbb{S}^1$ .

The circle  $c\mathbb{S}^1$  can also be obtained as the coequaliser in  $c\mathbf{Top}$  of the endpoints of  $c\mathbb{I}$

$$\partial^-, \partial^+ : \{*\} \rightrightarrows c\mathbb{I}, \quad \partial^-(*) = 0, \quad \partial^+(*) = 1. \quad (31)$$

All points are critical; the flexible point is also past and future critical. The generated d-space is  $(c\mathbb{S}^1)^\wedge = \uparrow\mathbb{S}^1$ , while  $\mathbf{Fl}(c\mathbb{S}^1)$  is the flexible point with its trivial loop.

(b) More generally, the *n-stop c-circle*  $c_n\mathbb{S}^1$  ( $n > 0$ ) is the orbit space

$$c_n\mathbb{S}^1 = (c_n\mathbb{R})/\mathbb{Z} \quad (c_1\mathbb{S}^1 = c\mathbb{S}^1), \quad (32)$$

where the  $c$ -paths of  $c_n\mathbb{R}$  are the increasing paths whose image is an interval  $[k/n, k'/n]$ , for integers  $k \leq k'$ .

In  $c_n\mathbb{S}^1$  a  $c$ -path is an anticlockwise path between two points  $[k/n]$  and  $[k'/n]$  of the circle. The ‘minimal generators’ have length  $1/n$  of the circle and are rigid; the  $c$ -space itself is also.

Rotating motions can follow this pattern, with mandatory direction and stops: for instance, the second hand of a watch, a washing machine dial, a panoramic wheel with  $n$  cabins. The mode dial of a photcamera and a railway turntable can be modelled by the reversible  $c$ -space generated by  $c_n\mathbb{S}^1$ .

(c) The *standard  $c$ -sphere*  $c\mathbb{S}^n$  is defined as a quotient of  $c\mathbb{I}^n$  (for  $n > 0$ )

$$c\mathbb{S}^n = (c\mathbb{I}^n)/(\partial\mathbb{I}^n), \quad c\mathbb{S}^0 = \mathbb{S}^0 = \{-1, 1\} \quad (n > 0), \quad (33)$$

and will be examined in Part III.

(d) The *standard controlled  $n$ -torus* is a cartesian power of  $c\mathbb{S}^1$

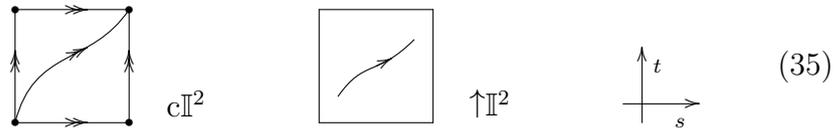
$$c\mathbb{T}^n = (c\mathbb{S}^1)^n, \quad (34)$$

and can also be obtained as the orbit  $c$ -space  $(c\mathbb{R}^n)/\mathbb{Z}^n$ .

### 2.7 Controlled squares and cubes

(a) We have already seen the ordered square  $\uparrow\mathbb{I}^2$ , also called the *flexible square* when viewed in  $c\text{Top}$ .

(b) The *standard  $c$ -square*  $c\mathbb{I}^2$ , represented in the left figure below, has the structure of a cartesian power: a path  $\mathbb{I} \rightarrow \mathbb{I}^2$  is controlled if and only if it is increasing and each of its projections covers  $[0, 1]$ , or is constant at 0 or 1



There are four flexible points, the vertices of the square. The  $c$ -paths of  $c\mathbb{I}^2$  have five kinds of generators: two horizontal paths  $s \mapsto (s, \alpha)$  (for

$\alpha = 0, 1$ ), two vertical paths  $t \mapsto (\alpha, t)$ , and all increasing paths from  $(0, 0)$  to  $(1, 1)$  in the ordered square, as exemplified in the left picture above.

There is no finite set of generators, but we shall see that the fundamental category has only five non-trivial arrows (and four identities at the flexible points).

The space is rigid. The generated d-space is the ordered square  $\uparrow\mathbb{I}^2$ , whose d-paths are the increasing maps  $\mathbb{I} \rightarrow \mathbb{I}^2$ ; one of them is drawn in the second picture above.

Similarly, in the *standard c-cube*  $c\mathbb{I}^n$  a path is controlled if and only if it is increasing and each of its projections covers  $[0, 1]$ , or is constant at 0 or 1. Again,  $(c\mathbb{I}^n)^\wedge = \uparrow\mathbb{I}^n$ .

For a product, the structure  $(X \times Y)^\wedge$  is always finer than  $\hat{X} \times \hat{Y}$ , and can be strictly finer. For instance one can take the empty structure  $X = D_c\{*\}$  and  $Y = c\mathbb{I}$  or  $\uparrow\mathbb{I}$ , so that  $(X \times Y)^\wedge = (D_c|\mathbb{I}|)^\wedge = D|\mathbb{I}|$ , but  $\hat{X} \times \hat{Y} = \{*\} \times \uparrow\mathbb{I} = \uparrow\mathbb{I}$ . This issue will be studied in a Part II.

(c) The *hybrid square*  $c\mathbb{I} \times \uparrow\mathbb{I}$  will be important in the construction of the fundamental category. Here a path  $\mathbb{I} \rightarrow \mathbb{I}^2$  is controlled if and only if it is increasing and its first projection is either surjective or constant at 0 or 1

(36)

(All the horizontal paths  $s \mapsto (s, t_0)$  are controlled, but already belong to the family of increasing paths whose first projection is surjective.)

The generated d-space is again  $\uparrow\mathbb{I}^2$ ; the flexible part  $D\{0, 1\} \times \uparrow\mathbb{I}$  only allows increasing paths in the vertical edges.

(d) The following example shows a sharp distinction between a c-structure  $X$  of the square and the generated d-space

(37)

The c-paths of  $X$  are generated by two diagonal paths,  $t \mapsto (t, t)$  and  $t \mapsto (t, 1 - t)$ ; the flexible points are the four vertices of the square, and it is easy to guess that the fundamental category  $\uparrow\Pi_1(X)$  will only have two non-trivial arrows, the marked ones. But the fundamental category  $\uparrow\Pi_1(\hat{X})$  of the generated d-space has two new arrows between the vertices, like the arrow  $p' \rightarrow p''$  displayed in the right figure above.

Clearly, one cannot model a crossing of railways by a d-space. Within c-spaces, one can make  $X$  reversible adding the reversed c-paths.

### 3. Critical processes and models

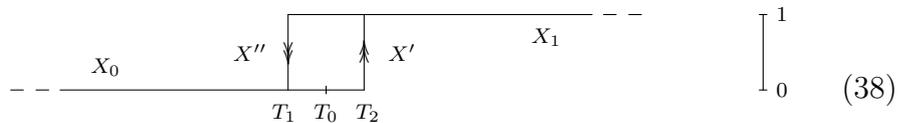
We now start from ‘critical processes’, trying to model them by c-spaces built with the previous ones, by limits and colimits.

#### 3.1 On-off controllers and elementary hysteresis

We consider a system meant to regulate a certain variable, either opposing its rising, or helping it, or working both ways. An elementary hysteresis process, or ‘hysteron’, generally behaves in the first way – counteracting the effect.

(a) *Reacting controller.* We begin by considering a cooling device counteracting the rising of temperature, with a thermostat set at temperature  $T_0$  and a tolerance interval  $[T_1, T_2]$ .

In the following picture the horizontal axis represents the temperature, and the vertical axis denotes two states, 0 and 1



On the left branch  $X_0$  the system is off; if the temperature grows to  $T_2$  the device jumps to state 1; then, if the temperature cools to  $T_1$ , it goes back to state 0.

The support  $|X|$  of our model is a one-dimensional subspace of  $\mathbb{R}^2$ , the union of the supports of the following c-spaces

$$\begin{aligned} X_0 &= [0, T_2] \times \{0\}, & X_1 &= [T_1, +\infty[ \times \{1\}, \\ X' &= \{T_2\} \times \mathbb{c}\mathbb{I}, & X'' &= \{T_1\} \times \mathbb{c}\mathbb{I}^{\text{op}}. \end{aligned}$$

The c-structure of  $X$  is generated by the c-structures of:

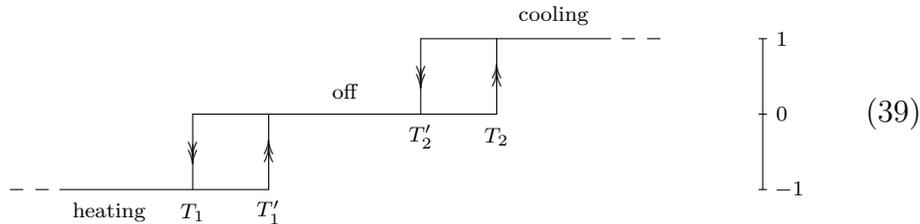
- $X_0, X_1$ , natural intervals, where the temperature can vary,
- $X', X''$ , one-jump c-intervals, where the state of the system varies.

One could also use the plane with the terminal c-structure  $c_f\mathbb{R}^2$  produced by the topological embedding  $f: X \rightarrow \mathbb{R}^2$ ; the c-paths are those of  $X$ .

A hysteretic process is generally studied as a functional operator that turns a piecewise monotone input function into an output function (of time, in both cases): see [BrS], Chapter 2. Here the input is the temperature function, while the output values are the states 0, 1. This analysis presents some indetermination and failure of continuity at the critical temperatures  $T_1, T_2$ , as discussed in [BrS], Example 2.1.1.

(b) *Cooperating controller.* A heating system supports the rising of temperature. It can be modelled by the opposite c-space: in state 0 the system is on; see the lower half of the following diagram.

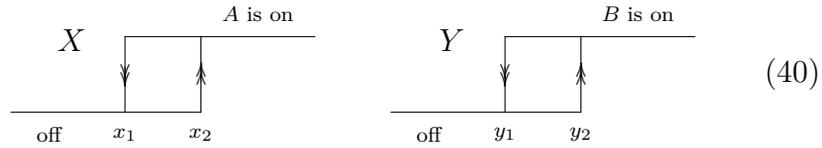
(c) *Dual controller.* Combining both models we can represent a heating and cooling system, like a heat pump. The system is meant to keep the temperature in an interval  $[T_1, T_2]$ , with a lower tolerance  $[T_1, T'_1]$  and an upper tolerance  $[T'_2, T_2]$  (disjoint intervals); the vertical axis denotes now three states: at level 0 the system is off, at level -1 the heating is on, at level 1 the cooling device is on



**3.2 Controlling two variables**

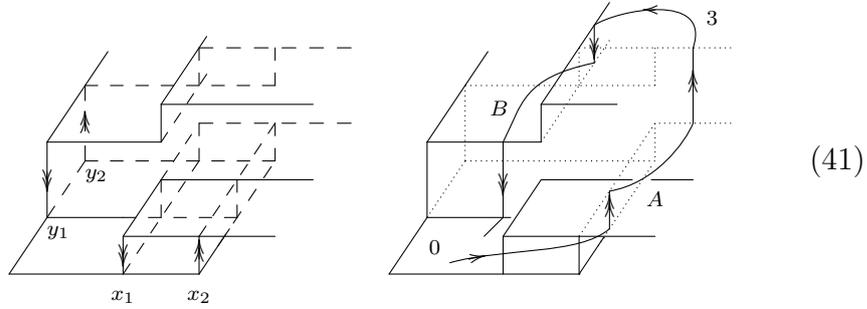
We deal now with a pair of on-off controllers, acting on two independent variables

(a) *Two reacting controllers.* We start from two copies  $X, Y$  of the c-space drawn in (38)



In  $X$  a device  $A$  controls the variable  $x$ , countering its rising; in  $Y$  the device  $B$  acts similarly on the variable  $y$ .

The cartesian product  $X \times Y$  models the combined system. Its support is a subspace of  $\mathbb{R}^4$ , but we draw it in  $\mathbb{R}^3$ , with four states on the vertical axis: at 0 both devices are off, at 1 only  $A$  is on, at 2 only  $B$  is on, at 3 both  $A$  and  $B$  are on



The new c-space can be obtained as follows. We put on  $\mathbb{R}^3$  the terminal c-structure for the topological map

$$f: X \times Y \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad f(x, s, y, t) = (x, y, s + 2t), \quad (42)$$

and we use this c-space  $c_f\mathbb{R}^3$ . Equivalently, we can use the c-subspace  $Z = \text{Im } f$  of the previous structure: they have the same c-paths.  $Z$  is contained in four parallel planes, at level 0, 1, 2, 3.

The right figure above represents a c-path in  $Z$ . It starts at level 0, with both variables below the active thresholds  $x_2, y_2$ , and both increasing; when the variable  $x$  reaches  $x_2$ , system  $A$  jumps on, counteracting it. Both variables are still growing; when  $y$  attains  $y_2$ , device  $B$  also activates and the process is in state 3. Then the variable  $x$  decreases below  $x_1$  and  $A$  goes off, while  $B$  is still on, in state 2. Finally also the variable  $y$  is brought below  $y_1$  and both devices are off, at level 0.

(b) The opposite case of two cooperating controllers is modelled by the opposite c-space  $Z^{\text{op}}$ . The mixed case, with  $A$  cooperating with variable  $x$  and  $B$  counteracting variable  $y$ , is also of interest.

An air-supported dome can give examples of both cases. In winter time, the compressor would rise pressure and the heating would rise temperature; in summer time, the compressor would work the same way while air-conditioning would reduce temperature.

### 3.3 The threshold effect and siphon structures.

In the threshold effect a variable  $v$  can vary in the interval  $[v_0, v_1]$ ; reaching the *threshold*  $v_1$  it jumps down to its least value  $v_0$ . Various processes of this type are listed in the Introduction, Subsection 0.4. Here we consider two structures on the interval  $\mathbb{I}$  that can model such a process.

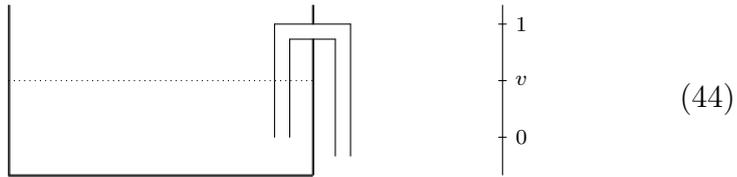
(a) *The growing siphon.* We denote as  $c_S\mathbb{I}$  the standard interval with the c-structure generated by all the increasing maps  $\mathbb{I} \rightarrow \mathbb{I}$  and the reversion  $r(t) = 1 - t$

$$\begin{array}{c} \xrightarrow{\quad\quad\quad} \\ \text{0} \cdots \cdots \leftarrow \cdots \cdots \text{1} \end{array} \quad c_S\mathbb{I} \quad (43)$$

A controlled path can only increase between 0 and 1; reaching 1, either it stays there or jumps down to 0. Point 1 is future critical, point 0 is past critical, and there are no (bilateral) critical points. The generated d-structure  $(c_S\mathbb{I})^\wedge$  has two generators,  $\text{id}\mathbb{I}$  and  $r$ : it is the reversible d-interval  $\mathbb{I}^\sim$  of 2.4(c); the flexible part is  $\uparrow\mathbb{I}$ .

For concreteness, we refer to a hydraulic system consisting of a water basin filled by a source; water can only get out by a siphon tube, as in

the figure below, so that its level  $v$  in the basin will grow up to the upper part of the tube, marked 1, and then flow out until the level reaches the lower opening of the tube in the basin, marked 0 (the diameter of the tube is overlooked)



(b) *The oscillating siphon.* A more complex model  $c'_s\mathbb{I}$  allows the  $c$ -paths to decrease in the semiopen interval  $[0, 1[$ . There are three kinds of generators of the  $c$ -paths:

- the increasing maps  $\mathbb{I} \rightarrow \mathbb{I}$ ,
- the decreasing maps  $a: \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{I}$  with image in  $[0, 1[$ , i.e.  $a(0) < 1$ ,
- the reversion  $r(t) = 1 - t$ .

Here a controlled path is piecewise monotone; whenever it reaches 1, either it stays there or it jumps to 0 (and possibly goes on). Point 1 is still future critical, but 0 is no more past critical. The generated  $d$ -structure is again the reversible  $d$ -interval  $\mathbb{I}^\sim$ , the flexible part allows the piecewise monotone paths which can only reach 1 as the terminal endpoint.

In the hydraulic system previously described, the basin can now let out water by other openings or evaporation. Other processes considered in 0.4 are also better fitted by this model; for instance the electric potential at a neural membrane can increase and decrease; reaching the threshold value the impulse is emitted.

### 3.4 Transport networks and labelled graphs

Transport networks are usually modelled in graph theory. They can also be modelled by  $c$ -spaces, as we have already seen in various examples; this would allow to combine them with planar or three-dimensional regions.

(a) The following is a model of a road that contains a dual-carriage section (for left-hand drive one would turn the picture upside-down)



The d-space  $X$  is the quotient  $Y/R$  of the sum  $Y = X_1 + \dots + X_4$

$$\begin{aligned} X_1 &= [0, 1], & X_2 &= \uparrow[1, 2], \\ X_3 &= \uparrow[1, 2]^{\text{op}}, & X_4 &= [2, 3], \end{aligned}$$

modulo the equivalence relation that identifies the three points 1 (of  $X_1$ ,  $X_2$ ,  $X_3$ ) and – separately – the three points 2 (of  $X_2$ ,  $X_3$ ,  $X_4$ ). A path in  $X$  is directed if and only if it is a general concatenation of projections of d-paths in the various  $X_i$ . For instance, to go from 0 to the point  $(1/2)_3$  of  $X_3$  we must (at least) reach 2 along  $X_1$  and  $X_2$  and then come back along  $X_3$ ; there are infinitely many longer paths.

(b) Similarly, one can construct a one-dimensional c-space  $X$  as a realisation of a *labelled graph*, in the sense of a multigraph whose edges are labelled with additional information on direction and critical properties. We have already drawn many examples in 3.1.

As above, the c-space  $X$  can be obtained as a quotient of a sum of intervals with the appropriate c-structure: natural intervals  $\mathbb{I}$  when unlabelled, standard d-intervals  $\uparrow\mathbb{I}$  when labelled by a single arrow, standard c-intervals  $c\mathbb{I}$  when labelled by a double arrow, etc.

This can represent a transport networks, where some routes are one-way and others are no-stop – as in an underground section, or a motorway tunnel, or an airline route. The model can be further enriched, adding delays (for a stop sign), etc. Or higher dimensional regions, as we were suggesting.

### 3.5 Point-like variations

In the examples of this section one can often form a ‘slightly’ different model, using a general procedure: if  $X$  is a c-space and  $A \subset |X|$ , one builds a finer c-space on  $|X|$  excluding all the previous c-paths that have an endpoint in  $A$ .

Thus, in the model of the heat controller described in 3.1(a), one can omit the paths that start or end at  $(0, T_2)$  or  $(1, T_1)$ . Similarly, in the siphon-interval 3.3(a) one can rule out the paths starting or ending at 1. In both cases we are forcing the jump at these points, which become critical and non-flexible. This can be appreciated, but the new models are more complicated and their fundamental category will also be.

In our opinion the choice between such variations is merely a theoretical issue, that should be based on the results one can obtain. In the same way as, if we model a thin rod by the interval  $[0, 1]$ , it is Mathematics rather than experience that leads us to use an interval of the real line instead of the rational line: the classical results on continuous functions and differential equations only hold in the former.

## References

- [BeHJ] A. Bemporad, M. Heemels and M. Johansson (Ed.), Networked control systems, Springer, 2010.
- [Bra] M.S. Branicky, Introduction to hybrid systems, in: D. Hristu-Varsakelis and W.S. Levine (Ed.), Handbook of networked and embedded control systems, Birkhäuser, 2005.
- [BrS] M. Brokate and J. Sprekels, Hysteresis and Phase Transitions, Springer, 1996.
- [CaGM] C. Calk, E. Goubault and P. Malbos, Persistent homology of directed spaces, arXiv:2305.03357, 2023.
- [FjGHMR] L. Fajstrup, E. Goubault, E. Haucourt, S. Mimram and M. Raussen, Directed algebraic topology and concurrency, Springer, 2016.
- [FjR] L. Fajstrup and J. Rosický, A convenient category for directed homotopy, Theory Appl. Categ. 21 (2008), No. 1, 7–20.
- [Fl] A.F. Filippov, Differential equations with discontinuous righthand sides, Translated from the Russian, Math. Appl. (Soviet Ser.) 18, Kluwer Academic Publishers, 1988.

- [Ga] P. Gaucher, Homotopical interpretation of globular complex by multipointed d-space, *Theory Appl. Categ.* 22 (2009), no. 22, 588–621.
- [Gb] E. Goubault, A semi-abelian approach to directed homology, [arXiv:2301.06409](https://arxiv.org/abs/2301.06409), 2023.
- [GbM] E. Goubault and S. Mimram, Directed homotopy in non-positively curved spaces, *Log. Methods Comput. Sci.* 16 (2020), no.3, Paper No. 4, 55 pp.
- [Gr1] M. Grandis, Directed homotopy theory, I. The fundamental category, *Cah. Topol. Géom. Différ. Catég.* 44 (2003), 281–316.
- [Gr2] M. Grandis, Directed Algebraic Topology, Models of non-reversible worlds, Cambridge Univ. Press, 2009. Downloadable at: [http://www.dima.unige.it/~grandis/BkDAT\\_page.html](http://www.dima.unige.it/~grandis/BkDAT_page.html)
- [He] T. Henzinger, The theory of hybrid automata, in *Proc. IEEE Symp. Logic in Computer Science*, 1996, pp. 278–292.
- [Li] D. Liberzon, *Switching in systems and control*, Birkhäuser, 2003.
- [MeR] R. Meshulam and M. Raussen, *Homology of spaces of directed paths in Euclidean pattern spaces*, Springer, 2017, 593–614.
- [Ra1] M. Raussen, Inessential directed maps and directed homotopy equivalences, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A* 151 (2021), no. 4, 1383–1406.
- [Ra2] M. Raussen, Strictifying and taming directed paths in higher dimensional automata, *Math. Structures Comput. Sci.* 31 (2021), no. 2, 193–213.

Marco Grandis  
Dipartimento di Matematica  
Università di Genova  
Via Dodecaneso 35  
16146 - Genova, Italy  
[grandis@dima.unige.it](mailto:grandis@dima.unige.it)



# $\Omega$ -ENSEMBLES ET ENSEMBLES EMPIRIQUES REVISITÉS

*Christine BERTRAND et Michel DE GLAS*

**Résumé :** Cet article est consacré, en premier lieu, à l'examen de la théorie des  $\Omega$ -ensembles, à en évaluer l'intérêt mathématique au regard des hypothèses qui la fondent et la pertinence en tant que pourvoyeuse présumée d'un modèle des notions intuitives de degré d'appartenance et d'existence. Cet examen conduit, en second lieu, à étudier à nouveaux frais la théorie des ensembles empiriques (ou ensembles observés) introduite par Bénabou. On montre, en particulier, que la catégorie des ensembles empiriques n'est un topos que modulo le sacrifice de l'intuition sous-jacente à la notion d'observation.

**Abstract :** This paper is devoted first to revisit  $\Omega$ -set theory, to assess its mathematical interest with regard to the hypotheses it is based on and its relevance as an alleged provider of a model to the intuitive notions of membership and existence degrees. This then leads to re-examine empirical (or observed) set theory à la Bénabou. It is shown in particular that the category of empirical sets is a topos only if one sacrifices the intuition underlying the notion of observation.

**Keywords :**  $\Omega$ -sets, empirical sets, topoi.

**Mathematics Subject Classification (2010).** 18B25, 03C90, 54B40

## 1. Introduction

Le concept d' $\Omega$ -ensemble a donné lieu à une abondante littérature [1], [4], [7], en raison, d'une part, du fait que la catégorie  $\Omega$ -SET des  $\Omega$ -ensembles

est équivalente à la catégorie  $\mathcal{Sh}(\Omega)$  des faisceaux sur  $\Omega$ , et, d'autre part, du fait que le concept d' $\Omega$ -ensemble est censé offrir un modèle mathématique aux notions intuitives de degré d'égalité et de degré d'existence.

Nous montrons, dans cet article, que cette interprétation informelle n'est fondée que sous certaines hypothèses en vertu desquelles  $\Omega$ -SET perd une grande part de son intérêt mathématique : la catégorie cesse d'être un topos et n'est, dès lors, plus équivalente à  $\mathcal{Sh}(\Omega)$ .

Nous montrons, de plus, que dans le cadre de la théorie des  $\Omega$ -ensembles, il est en fait impossible de préserver le substrat intuitif de cette théorie (gradualité de l'égalité et de l'existence) sans un appauvrissement des structures mathématiques : la catégorie des  $\Omega$ -ensembles permettant de rendre compte de l'intuition sous-jacente est un topos booléen.

Cette contradiction entre la recherche a priori d'une structure mathématique (celle de topos) et la préservation du substrat intuitif à l'origine de la théorie des  $\Omega$ -ensembles conduit, pour tenter d'en réduire les effets, à une autre alternative : utiliser des sous-catégories de  $\Omega$ -SET par restriction de l'ensemble des objets ( $C\Omega$ -SET) ou par restriction de l'ensemble des flèches ( $F\Omega$ -SET). Nous privilégierons le second terme de cette alternative, notamment parce que c'est la définition des flèches de  $\Omega$ -SET qui s'écarte de l'intuition originare et donne naissance à la contradiction.

C'est sur ces bases que Bénabou a conçu le concept d'ensemble empirique [2] ou d'ensemble observé par une famille  $I$  d'observateurs. Ainsi la théorie des ensembles empiriques est-elle confrontée au même dilemme que la théorie des  $\Omega$ -ensembles : la préservation du substrat intuitif qui a présidé à leur définition entre en contradiction avec le désir de munir la catégorie des ensembles empiriques d'une structure toposique. Nous procéderons au même choix que dans le cas des  $\Omega$ -ensembles généraux, notamment parce que si la définition des objets de la catégorie capte l'intuition sous-jacente, il en va tout autrement des flèches.

De tels résultats conduisent à revisiter le concept même d'ensemble empirique, en privilégiant le "point de vue" des observateurs et des espaces d'observations. Nous montrons, toutefois, qu'il est impossible de s'affranchir du cadre des topoï booléens, en conséquence de quoi la formalisation de la notion d'ensemble empirique nécessite une refonte.

## 2. $\Omega$ -ensembles

### 2.1 Rappels

Soit  $(\Omega, \wedge, \vee, \leq)$  une algèbre de Heyting complète avec un plus petit élément 0 et un plus grand élément 1.

Un  $\Omega$ -ensemble  $A$  [4] [6] est la donnée d'un ensemble  $A$  et d'une application de  $A \times A$  dans  $\Omega$ ,  $\langle x, y \rangle \mapsto \llbracket x = y \rrbracket$ , telle que :

$$\llbracket x = y \rrbracket \leq \llbracket y = x \rrbracket \quad (\Omega_1)$$

$$\llbracket x = y \rrbracket \wedge \llbracket y = z \rrbracket \leq \llbracket x = z \rrbracket, \quad (\Omega_2)$$

l'élément  $\llbracket x = x \rrbracket$  étant noté  $\llbracket Ex \rrbracket$ .

Étant donnés deux  $\Omega$ -ensembles  $A$  et  $B$ , on considère les applications  $f : A \times B \rightarrow \Omega$  qui vérifient, pour tous  $x, x' \in A$  et tous  $y, y' \in B$  :

$$\llbracket x = x' \rrbracket \wedge f(\langle x, y \rangle) \leq f(\langle x', y \rangle) \quad (\Omega_3)$$

$$f(\langle x, y \rangle) \wedge \llbracket y = y' \rrbracket \leq f(\langle x, y' \rangle) \quad (\Omega_4)$$

$$f(\langle x, y \rangle) \wedge f(\langle x, y' \rangle) \leq \llbracket y = y' \rrbracket \quad (\Omega_5)$$

$$\llbracket x = x \rrbracket = \bigvee_{y \in B} f(\langle x, y \rangle). \quad (\Omega_6)$$

On note  $\Omega\text{-SET}$  la catégorie dont les objets sont les  $\Omega$ -ensembles (satisfaisant  $(\Omega_1)$  et  $(\Omega_2)$ ) et les flèches les applications  $f : A \times B \rightarrow \Omega$  satisfaisant  $(\Omega_3)$  -  $(\Omega_6)$ . La composition de  $f : A \rightarrow B$  et  $g : B \rightarrow C$  est la flèche  $g \circ f : A \rightarrow C$  définie par l'application  $g \circ f : A \times C \rightarrow \Omega$  telle que :

$$(g \circ f)(\langle x, z \rangle) = \bigvee_{y \in B} (f(\langle x, y \rangle) \wedge g(\langle y, z \rangle)).$$

La flèche  $A \rightarrow A$  définie par  $\langle x, y \rangle \mapsto \llbracket x = y \rrbracket$  est la flèche identité, notée  $id_A$ .

L'objet  $\mathbf{1}$ , défini par l' $\Omega$ -ensemble  $\{0\}$ ,  $\llbracket 0 = 0 \rrbracket = 1$ , est tel que, pour tout objet  $A$ , il existe une flèche unique  $f : A \rightarrow \mathbf{1}$ ,  $\langle x, 0 \rangle \mapsto \llbracket Ex \rrbracket$ . Donc  $\mathbf{1}$  est un objet terminal de  $\Omega\text{-SET}$ .

Le produit de deux  $\Omega$ -ensembles  $A$  et  $B$  est l' $\Omega$ -ensemble  $A \times B$  défini par  $A \times B$  et l'application  $(A \times B)^2 \rightarrow \Omega$  telle que, pour tous  $x, x' \in A$  et tous  $y, y' \in B$ , on ait :

$$\llbracket \langle x, y \rangle = \langle x', y' \rangle \rrbracket = \llbracket x = x' \rrbracket \wedge \llbracket y = y' \rrbracket.$$

Le produit fibré d'un couple  $A \xrightarrow{f} C \xleftarrow{g} B$  de flèches est le couple  $A \xleftarrow{f'} D \xrightarrow{g'} B$ , où  $D$  est défini par  $D = A \times B$  et l'application de  $(A \times B)^2$  dans  $\Omega$  telle que :

$$\llbracket \langle x, y \rangle = \langle x', y' \rangle \rrbracket = \llbracket E \langle x, y \rangle \rrbracket \wedge \llbracket E \langle x', y' \rangle \rrbracket \wedge \llbracket x = x' \rrbracket \wedge \llbracket y = y' \rrbracket,$$

$$\text{où : } \llbracket E \langle x, y \rangle \rrbracket = \bigvee_{c \in C} (f(\langle x, c \rangle) \wedge g(\langle y, c \rangle)),$$

et, pour tout  $a \in A$  et tout  $b \in B$  :

$$f'(\langle x, y \rangle, a) = \llbracket E \langle x, y \rangle \rrbracket \wedge \llbracket x = a \rrbracket,$$

$$g'(\langle x, y \rangle, b) = \llbracket E \langle x, y \rangle \rrbracket \wedge \llbracket y = b \rrbracket.$$

Un sous-ensemble d'un  $\Omega$ -ensemble  $A$  est une application  $s : A \rightarrow \Omega$  telle que, pour tout  $x, y \in A$  :

$$(i) \quad s(x) \wedge \llbracket x = y \rrbracket \leq s(y),$$

$$(ii) \quad s(x) \leq \llbracket Ex \rrbracket.$$

Un sous-objet d'un objet  $B$  est un mono  $f : A \rightarrow B$ , c'est-à-dire une flèche  $f$  telle que, pour tous  $x, y \in A$  et  $z \in B$ ,

$$f(\langle x, z \rangle) \wedge f(\langle y, z \rangle) \leq \llbracket x = y \rrbracket.$$

Alors, à tout sous-objet  $f$  de  $B$  on peut associer un sous-ensemble de  $B$ , c'est-à-dire une application  $s_f : B \rightarrow \Omega$  définie par :

$$s_f(y) = \bigvee_{x \in A} f(\langle x, y \rangle).$$

Réciproquement, un sous-ensemble  $s : B \rightarrow \Omega$  de  $B$  définit un sous-objet  $f_s : A_s \rightarrow B$ , où  $A_s$  est l'entité définie par  $B$  et l'application :

$$f_s : \langle x, y \rangle \mapsto \llbracket x = y \rrbracket \wedge s(x) \wedge s(y).$$

Donc ([4], p. 281), les sous-objets d'un objet  $\mathbf{B}$  sont entièrement définis par les sous-ensembles de  $\mathbf{B}$ .

Soit, enfin,  $\Omega$  l' $\Omega$ -ensemble défini par  $\Omega$  et l'application de  $\Omega \times \Omega$  dans  $\Omega$ ,  $\langle p, q \rangle \mapsto \llbracket p = q \rrbracket$  telle que :

$$\llbracket p = q \rrbracket = (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$$

où  $\Rightarrow$  est la pseudo-complémentation relative dans l'algèbre de Heyting  $\Omega$ . Soit  $\top : \mathbf{1} \rightarrow \Omega$  la flèche définie par

$$\top(\langle 0, p \rangle) = \llbracket p = 1 \rrbracket = p.$$

À tout sous-objet  $f : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{X}$  (donc à tout sous-ensemble  $s_f : A \rightarrow \Omega$ ) de  $\mathbf{X}$  peut être associée sa flèche caractéristique  $\chi_f : \mathbf{X} \rightarrow \Omega$  définie par :

$$\chi_f(\langle x, p \rangle) = \llbracket Ex \rrbracket \wedge \llbracket s_f(x) = p \rrbracket.$$

Alors  $\chi_f \circ f = \top \circ !$ , où  $!$  est la flèche  $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{1}$ . Il s'ensuit que  $\Omega\text{-SET}$  est un topos.

## 2.2 Analyse critique

Un objet  $\mathbf{A}$  de  $\Omega\text{-SET}$  est défini par la donnée d'un ensemble  $A$  et d'une application  $A \times A \rightarrow \Omega$  qui, à tout couple  $\langle x, y \rangle$  associe le "degré d'égalité"  $\llbracket x = y \rrbracket$  de  $x$  et  $y$ , l'entité  $\llbracket x = x \rrbracket$ , notée  $\llbracket Ex \rrbracket$ , pouvant être vue comme le "degré d'existence" de  $x$ . De la même façon, pour un sous-ensemble  $s : A \rightarrow \Omega$  d'un  $\Omega$ -ensemble  $\mathbf{A}$ ,  $s(x)$  est le "degré" auquel  $x$  appartient à l'"ensemble"  $s$ .

Pour ce qui concerne les flèches de  $\Omega\text{-SET}$ , le "graphe" d'une flèche  $f : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$  est un sous-ensemble de  $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ , soit une application de  $A \times B$  dans  $\Omega$  qui peut être vue, en première approximation, comme une application  $f : A \rightarrow B$ , en associant à  $\langle x, y \rangle$  la "valeur de vérité"  $\llbracket f(x) = y \rrbracket \in \Omega$ , degré d'égalité de  $f(x) = y$ , c'est-à-dire la mesure du degré auquel  $y$  est l'image de  $x$  par  $f$ . Les axiomes de définition d'une flèche de  $\Omega\text{-SET}$  peuvent alors être interprétés de la façon suivante :  $(\Omega_3)$  et  $(\Omega_4)$  imposent l'extensionnalité, c'est-à-dire la validité des formules :

$$(x \approx x') \wedge (f(x) \approx y) \Rightarrow (f(x') \approx y)$$

et :

$$(f(x) \approx y) \wedge (y \approx y') \Rightarrow (f(x) \approx y'),$$

instances de l'axiome d'identité. L'axiome ( $\Omega_5$ ) signifie que deux éléments  $y$  et  $y'$  sont des images de  $x$  par  $f$  pour autant qu'ils sont égaux. L'axiome ( $\Omega_6$ ) permet d'interpréter une formule quantifiée existentiellement : une formule du type " il existe  $x \in A$  tel que  $\phi(x)$ " a pour valeur de vérité  $\bigvee_{x \in B} \phi(x)$ . ( $\Omega_6$ ) signifie également que tout  $x$  de  $A$  a une image par  $f$ , c'est-à-dire que  $f$  est une application. Enfin, puisque  $\llbracket x = x \rrbracket = \llbracket Ex \rrbracket$ , une lecture de ( $\Omega_6$ ) est : tout  $x$  de  $A$  existe pour autant qu'il a une image dans  $B$ .

Notons par ailleurs, que l'hypothèse d'inf-complétion de  $\Omega$ , bien que superflue pour établir la structure de topos de  $\Omega\text{-SET}$ , permet, par dualité, l'interprétation de formules quantifiées universellement : pour tout  $x \in B$ ,  $\phi(x)$  a pour valeur de vérité  $\bigwedge_{x \in B} \llbracket \phi(x) \rrbracket$ .

Toutefois, ces interprétations informelles des axiomes de définition de  $\Omega\text{-SET}$  reposent sur l'hypothèse que  $f(\langle x, y \rangle)$  et  $\llbracket f(x) = y \rrbracket$  sont interchangeable. Or pour une flèche  $f : A \times B \rightarrow \Omega$ , il peut ne pas exister d'application  $\tilde{f} : A \rightarrow B$  (on utilise désormais deux notations différentes pour éviter toute confusion) telle que

$$f(\langle x, y \rangle) = \llbracket \tilde{f}(x) = y \rrbracket.$$

Interpréter  $f(\langle x, y \rangle)$  comme le degré d'égalité de  $\tilde{f}(x)$  et  $y$  ou le degré auquel  $y$  est l'image de  $x$  par  $\tilde{f}$  (interprétation censée conférer à la structure toposique de  $\Omega\text{-SET}$  un surcroît d'intelligibilité), sachant qu'un tel  $\tilde{f}$  peut ne pas exister, confine dès lors à l'*abstract nonsense*. En particulier, la notation  $\llbracket f(x) = y \rrbracket$  dans la définition informelle de  $f(\langle x, y \rangle)$  est pour le moins maladroite, pour ne pas dire fautive.

A contrario, si l'on impose à toute flèche  $f : A \rightarrow B$  dans  $\Omega\text{-SET}$  d'être définie par l'intermédiaire d'une fonction  $\tilde{f} : A \rightarrow B$ , c'est-à-dire si toute flèche  $f : A \rightarrow B$  est une fonction  $f : A \times B \rightarrow \Omega$  telle que :

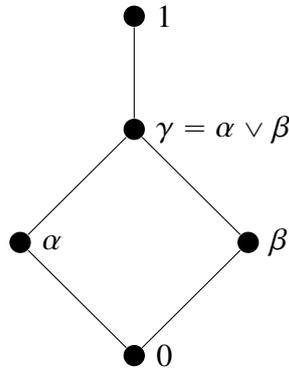
$$f(\langle x, y \rangle) = \llbracket \tilde{f}(x) = y \rrbracket$$

pour une certaine fonction  $\tilde{f} : A \rightarrow B$ , ou encore :

$$f(\langle x, y \rangle) = \llbracket \tilde{f}(x) = y \rrbracket \wedge \llbracket x = x \rrbracket$$

pour exprimer le fait que l'égalité ne vaut que pour autant que  $x$  existe, et que l'on note les catégories correspondantes  $F\Omega$ -SET et  $SF\Omega$ -SET respectivement, alors la justification informelle des axiomes de définition de  $\Omega$ -SET est parfaitement fondée, mais ni  $F\Omega$ -SET ni  $SF\Omega$ -SET n'est un topos.

Considérons, en effet, l'exemple suivant : soit  $\Omega$  l'algèbre de Heyting définie par :



et soient  $A$  et  $B$  les deux  $\Omega$ -ensembles définis par :

$$A = \{0, 1, 2\}, \quad \llbracket 0 = 1 \rrbracket = \alpha, \llbracket 0 = 2 \rrbracket = \beta, \llbracket 1 = 2 \rrbracket = 0, \quad \llbracket a = a \rrbracket = \gamma,$$

$$B = \{1, 2\}, \quad \llbracket 1 = 2 \rrbracket = 0, \quad \llbracket b = b \rrbracket = \gamma,$$

pour tout  $a \in A$  et tout  $b \in B$ .

Soit  $f = id_A : A \rightarrow A$  la flèche identité, c'est-à-dire la fonction de  $A \times A$  dans  $\Omega : \langle x, y \rangle \mapsto \llbracket x = y \rrbracket$ , et soit  $g$  la flèche d'inclusion  $g : B \hookrightarrow A$  définie par :

$$g : B \times A \rightarrow \Omega, \quad \langle x, y \rangle \mapsto \llbracket x = y \rrbracket,$$

c'est-à-dire  $g(\langle x, y \rangle) = f(\langle x, y \rangle)$  pour tout  $\langle x, y \rangle \in B \times A$ .

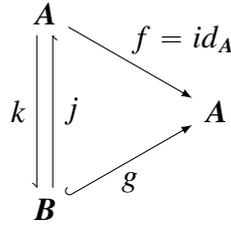
Alors  $f$  et  $g$  sont deux monos qui correspondent, respectivement, aux deux sous-ensembles  $s_f$  et  $s_g$  de  $A$ , c'est -à-dire aux deux applications  $s_f$  et  $s_g$  de  $A \rightarrow \Omega$ , définies par :

$$s_f(y) = \bigvee_{x \in A} \llbracket x = y \rrbracket = \llbracket 0 = y \rrbracket \vee \llbracket 1 = y \rrbracket \vee \llbracket 2 = y \rrbracket,$$

$$s_g(y) = \bigvee_{x \in B} \llbracket g(x) = y \rrbracket = \llbracket 1 = y \rrbracket \vee \llbracket 2 = y \rrbracket,$$

pour tout  $y \in A$ .

Donc  $s_f(y) = s_g(y)$  pour tout  $y \in A$ . Donc  $s_f = s_g$ . Ainsi  $f$  et  $g$  désignent le même sous-objet de  $\mathbf{A}$  (c'est-à-dire  $\llbracket f \rrbracket = \llbracket g \rrbracket$  ou  $f \approx g$ ) dans  $\Omega\text{-SET}$ . Donc  $g$  est un mono et un épi (et donc un iso de  $\Omega\text{-SET}$ ). De même,  $f$  est un mono et un épi de  $SF\Omega\text{-SET}$ . Supposons que  $g$  soit un iso de  $SF\Omega\text{-SET}$ . Alors, il existe un iso  $j : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$  dont l'inverse est un iso  $k : \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{A}$  tels que le diagramme



commute ; la flèche  $j : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$  est l'application  $A \times B \rightarrow \Omega$  définie par :

$$j(\langle x, y \rangle) = \llbracket x = y \rrbracket \wedge \llbracket x = x \rrbracket = \llbracket x = y \rrbracket.$$

Supposons alors qu'il existe une application  $\tilde{j} : A \rightarrow B$  telle que :

$$j(\langle x, y \rangle) = \llbracket \tilde{j}(x) = y \rrbracket \wedge \llbracket x = x \rrbracket = \llbracket \tilde{j}(x) = y \rrbracket,$$

pour tout  $x \in A$  et tout  $y \in B$ .

Alors il existe  $a_1, a_2 \in A$  tels que  $\tilde{j}(a_1) = \tilde{j}(a_2) = b \in B$ , c'est-à-dire  $j(\langle a_1, b \rangle) = j(\langle a_2, b \rangle)$ . Donc, on a  $\llbracket a_1 = b \rrbracket = \llbracket a_2 = b \rrbracket$  bien que  $a_1 \neq a_2$  : une contradiction.

Inversement, si l'on impose à  $j$  d'être définie par  $j(\langle x, y \rangle) = \llbracket \tilde{j}(x) = y \rrbracket$ , pour un certain  $\tilde{j} : A \rightarrow B$ , alors  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{B}$  ne sont pas isomorphes. Donc  $g$  n'est pas un iso de  $SF\Omega\text{-SET}$ .

Cet exemple est, en fait, générique dans le sens suivant. Toute flèche  $h : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$  avec  $B \subsetneq A$  et  $h(\langle x, y \rangle) = \llbracket x = y \rrbracket$  est un mono puisque, pour

tous  $x, z \in A$  et tout  $y \in B$ ,

$$h(\langle x, y \rangle) \wedge h(\langle z, y \rangle) = \llbracket x = y \rrbracket \wedge \llbracket y = z \rrbracket \leq \llbracket x = z \rrbracket$$

et un épi puisque, pour tout  $y \in B$ ,

$$\bigvee_{x \in A} h(\langle x, y \rangle) = \bigvee_{x \in A} \llbracket x = y \rrbracket = \llbracket y = y \rrbracket.$$

Dans  $\Omega$ -SET,  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{B}$  sont donc des objets isomorphes mais il n'existe pas d'application  $\tilde{h} : A \rightarrow B$  telle que  $h(\langle x, y \rangle) = \llbracket \tilde{h}(x) = y \rrbracket$ . Inversement, dans  $SF\Omega$ -SET où l'on impose que toute flèche soit définie au moyen d'une telle égalité,  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{B}$  ne sont pas isomorphes.  $h$  est donc un mono et un épi mais n'est pas un iso. Donc  $SF\Omega$ -SET n'est pas un topos.

Il en est de même de  $F\Omega$ -SET. Il suffit, en effet, d'adapter le contre-exemple ci-dessus en prenant  $\gamma = 1$ .

Il est donc clair que, d'un côté, la "définition" informelle de  $f(\langle x, y \rangle)$  comme degré d'égalité de  $\tilde{f}(x)$  et  $y$ , non pertinente pour une large classe d' $\Omega$ -ensembles, n'est pas tenable. L'intérêt et la pertinence du concept même d' $\Omega$ -ensemble sont alors à établir.

D'un autre côté, les hypothèses sur les flèches confèrent à  $F\Omega$ -SET et  $SF\Omega$ -SET un substrat intuitif, mais entraînent un appauvrissement de la structure catégorique correspondante. Cumuler la richesse mathématique de la structure, tout en en préservant la pertinence en tant que modèle mathématique, nécessite une modification de la définition des objets et/ou des flèches considérés.

Une première possibilité est offerte par la sous-catégorie  $C\Omega$ -SET de  $\Omega$ -SET des  $\Omega$ -ensembles complets [4] : ses objets sont les  $\Omega$ -ensembles  $\mathbf{A}$  dont tous les singletons sont de la forme  $a : x \mapsto \llbracket x = a \rrbracket$  pour un unique  $a \in A$  ; ses flèches  $f : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$  sont les fonctions  $f : A \rightarrow B$  telles que :

$$\llbracket x = y \rrbracket \leq \llbracket f(x) = f(y) \rrbracket, \quad (C\Omega_1)$$

$$\llbracket x = x \rrbracket \leq \llbracket f(x) = f(x) \rrbracket. \quad (C\Omega_2)$$

Les catégories  $\Omega$ -SET et  $C\Omega$ -SET sont équivalentes ([4], exercice 27 p. 394).  $C\Omega$ -SET est donc un topos dans lequel, les flèches  $f : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$  sont des fonctions  $f : A \rightarrow B$ ; l'interprétation de  $f(\langle x, y \rangle) = \llbracket f(x) = y \rrbracket$  comme étant la mesure du degré d'égalité de  $f(x)$  et de  $y$  (ou le degré auquel  $y$  est l'image de  $x$  par  $f$ ) est possible. Toutefois, en restreignant ainsi l'ensemble des objets, la notion intuitive de degré d'égalité dans la définition des objets de  $\Omega$ -SET perd une partie de sa pertinence dans  $C\Omega$ -SET.

### 2.3 La catégorie $F^*\Omega$ -SET

Au vu du contre-exemple développé en 2.2, une condition nécessaire pour que la catégorie des  $\Omega$ -ensembles soit munie de propriétés satisfaisantes (tout sous-objet  $f$  d'un objet  $\mathbf{A}$  est défini par un sous-ensemble  $s_f$  de  $\mathbf{A}$ ) est que, pour tout objet  $\mathbf{A}$ , on ait pour tout  $x \in A$  :

$$\bigvee_{\substack{y \in A \\ y \neq x}} \llbracket x = y \rrbracket < \llbracket x = x \rrbracket. \quad (*)$$

Est-ce une condition suffisante ? Soit  $F^*\Omega$ -SET la catégorie correspondante, c'est-à-dire la catégorie dont les objets sont les  $\Omega$ -ensembles satisfaisant (\*) ainsi que  $(\Omega_1)$  et  $(\Omega_2)$  et dont les flèches  $f : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$  sont les applications :  $A \times B \rightarrow \Omega$ ,  $\langle x, y \rangle \mapsto \llbracket \tilde{f}(x) = y \rrbracket$ ,  $\tilde{f} : A \rightarrow B$ , telles que :

$$\llbracket x = x' \rrbracket \wedge \llbracket \tilde{f}(x) = y \rrbracket \leq \llbracket \tilde{f}(x') = y \rrbracket, \quad (F\Omega_3)$$

$$\llbracket \tilde{f}(x) = y \rrbracket \wedge \llbracket y = y' \rrbracket \leq \llbracket \tilde{f}(x) = y' \rrbracket, \quad (F\Omega_4)$$

$$\llbracket \tilde{f}(x) = y \rrbracket \wedge \llbracket \tilde{f}(x) = y' \rrbracket \leq \llbracket y = y' \rrbracket, \quad (F\Omega_5)$$

$$\llbracket x = x \rrbracket = \bigvee_{y \in B} \llbracket \tilde{f}(x) = y \rrbracket. \quad (F\Omega_6)$$

$F^*\Omega$ -SET est une sous-catégorie pleine de  $F\Omega$ -SET.

**Théorème :**  $F^*\Omega$ -SET est un topos booléen.

**Preuve :** (i) Remarquons tout d'abord qu'une condition nécessaire et suffisante pour que  $\Omega$  satisfasse (\*) est que l'on ait :

$$\bigvee_{p \in \Omega \setminus \{1\}} p \neq 1. \quad (**)$$

En effet, pour tout  $p \notin \{0, 1\}$ ,

$$\bigvee_{q \in \Omega \setminus \{1\}} q = \bigvee_{q \in \Omega \setminus \{0,1\}} q = \bigvee_{q \in \Omega \setminus \{0,1\}} q \vee \neg q \geq p \vee \neg p,$$

où  $\neg$  désigne la pseudo-complémentation dans  $\Omega$  ( $\neg p = p \Rightarrow 0$ ). Donc, si  $(**)$  est satisfaite,  $p \vee \neg p < 1$  pour tout  $p \notin \{0, 1\}$ . Ainsi

$$\bigvee_{p \in \Omega \setminus \{q\}} \llbracket p = q \rrbracket \leq q \vee \neg q < 1.$$

De plus,

$$\bigvee_{p \in \Omega \setminus \{1\}} \llbracket p = 1 \rrbracket = \bigvee_{p \in \Omega \setminus \{1\}} p \neq 1$$

et

$$\bigvee_{p \in \Omega \setminus \{0\}} \llbracket p = 0 \rrbracket = \bigvee_{p \in \Omega \setminus \{1\}} \neg p \neq 1.$$

Donc, pour tout  $q \in \Omega$ ,

$$\bigvee_{p \in \Omega \setminus \{q\}} \llbracket p = q \rrbracket < \llbracket p = p \rrbracket = 1,$$

c'est-à-dire que  $\Omega$  satisfait  $(*)$ . La réciproque est évidente.

(ii) On définit, dans  $F^*\Omega\text{-SET}$ , les notions d'objet terminal, de produit, de produit fibré, d'exponentiation de la même façon que dans  $\Omega\text{-SET}$ . Pour démontrer que  $F^*\Omega\text{-SET}$  est un topos, il suffit donc de démontrer l'existence d'un classificateur de sous-objets. Une flèche  $f : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$  dans  $F\Omega\text{-SET}$  est un mono si et seulement si

$$\llbracket \tilde{f}(x) = z \rrbracket \wedge \llbracket \tilde{f}(y) = z \rrbracket \leq \llbracket x = y \rrbracket,$$

pour tout  $x, y \in A$  et tout  $z \in B$ . De même,  $f$  est un épi si et seulement si :

$$\bigvee_{x \in A} \llbracket \tilde{f}(x) = y \rrbracket = \llbracket y = y \rrbracket,$$

pour tout  $y \in B$ . À tout mono  $f : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$  on peut associer un sous-ensemble de  $\mathbf{B}$ , c'est-à-dire une application  $s_f : B \rightarrow \Omega$  définie par :

$$s_f(y) = \bigvee_{x \in A} \llbracket \tilde{f}(x) = y \rrbracket.$$

Il convient alors de démontrer que, dans  $F^*\Omega\text{-SET}$ , pour tout objet  $\mathbf{B}$  et tout sous-objet  $f$  de  $\mathbf{B}$ , la correspondance  $f \mapsto s_f$  est bijective, à la différence de ce qui se produit dans  $F\Omega\text{-SET}$ . Soient donc  $f : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$  et  $g : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{B}$  deux sous-objets de  $\mathbf{B}$  tel que  $s_f = s_g$  c'est-à-dire tels que, pour tout  $a \in B$ ,

$$\bigvee_{z \in C} \llbracket \tilde{g}(z) = a \rrbracket = \bigvee_{z \in A} \llbracket \tilde{f}(z) = a \rrbracket,$$

et, pour tout  $u \in A$ , en application de (\*),

$$\bigvee_{z \in C} \llbracket \tilde{g}(z) = \tilde{f}(u) \rrbracket = \bigvee_{x \in A} \llbracket \tilde{f}(x) = \tilde{f}(u) \rrbracket \geq \llbracket \tilde{f}(u) = \tilde{f}(u) \rrbracket.$$

Supposons qu'il existe  $u \in X$  tel que, pour tout  $z \in C$ ,  $\tilde{g}(z) \neq \tilde{f}(u)$ . Alors :

$$\bigvee_{z \in C} \llbracket \tilde{g}(z) = \tilde{f}(u) \rrbracket \leq \bigvee_{y \in B \setminus \{\tilde{f}(u)\}} \llbracket y = \tilde{f}(u) \rrbracket \leq \llbracket \tilde{f}(u) = \tilde{f}(u) \rrbracket,$$

ce qui est impossible. Donc, pour tout  $u \in A$ , il existe un  $z \in C$  tel que  $\tilde{g}(z) = \tilde{f}(u)$ , c'est-à-dire qu'il existe une flèche  $k : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{C}$  telle que  $f = g \circ k$ . Donc  $k$  est un mono et  $f \subseteq g$ . De la même façon, on peut démontrer que  $g = f \circ h$  pour un certain  $h : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{A}$ , c'est-à-dire  $g \subseteq f$ . Donc  $f \approx g$ . Ainsi  $f$  et  $g$  sont le même sous-objet de  $\mathbf{B}$ . Donc la correspondance  $f \mapsto s_f$  est injective. Elle est évidemment surjective.

Enfin, soit  $\mathcal{Q}' = \{p_M, 1\}$  où  $p_M = \bigvee_{p \in \mathcal{Q} \setminus \{1\}} p$  et soit  $\top : \mathbf{1} \rightarrow \mathcal{Q}'$ ,  $\{0\} \mapsto 1$ .

Alors :

$$\llbracket p_M = p_M \rrbracket = 1, \quad \llbracket p_M = 1 \rrbracket = p_M.$$

À tout sous-objet  $f : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$  de  $\mathbf{B}$ , dont le sous-ensemble correspondant est  $s_f : \mathbf{B} \rightarrow \mathcal{Q}$ , on associe  $\chi_f : \mathbf{B} \rightarrow \mathcal{Q}'$  définie par :

$$\tilde{\chi}_f : \mathbf{B} \xrightarrow{s_f} \mathcal{Q} \xrightarrow{\eta} \mathcal{Q}'$$

où  $\eta$  est la fonction définie par :  $\eta(y) = 1$  si et seulement si  $s_f(y) = 1$  et  $\eta(y) = p_M$  si et seulement si  $s_f(y) \neq 1$ . Il est alors facile de montrer que :

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{f} & B \\
 \downarrow ! & & \downarrow \chi_f \\
 \mathbf{1} & \xrightarrow{\top} & \Omega'
 \end{array}$$

est un produit fibré. Donc  $F^*\Omega\text{-SET}$  est un topos booléen.  $\square$

Il va sans dire que  $F^*\Omega\text{-SET}$  offre un cadre formel exempt d'ambiguïté aux notions intuitives d'existence potentielle et d'égalité partielle, mais les conditions imposées sont très contraignantes. Elles affectent non seulement les flèches mais également les objets :  $F^*\Omega\text{-SET}$  n'est pas une sous-catégorie de  $\Omega\text{-SET}$ . Pour ce qui concerne  $\Omega$ , si  $\Omega$  est une topologie sur un certain ensemble  $X$ , la condition (\*) suppose que

$$\bigcup_{A \in \Omega \setminus \{X\}} A \neq X,$$

et, par suite, que  $(X, \Omega)$  soit connexe et quasi-compact. Devoir choisir entre des conditions contraignantes (qui permettent à  $F^*\Omega\text{-SET}$  d'être un topos) et la faible pertinence du modèle mathématique fourni par  $\Omega\text{-SET}$  suggère que la structure de topos ne présente peut-être pas l'intérêt qu'on lui accorde généralement en tant que "bonne" généralisation de la catégorie  $\text{SET}$ .

### 3. Ensembles empiriques

#### 3.1 Les ensembles empiriques à la Bénabou

Le concept d'ensemble empirique fut introduit par Bénabou [2]. Soit  $I$  un ensemble d'observateurs observant un ensemble  $X$ . Pour  $x, y \in X$ , on pose :

$$\begin{aligned}
 V(x) &= \{i \in I : i \text{ voit } x\}, \\
 V(x, y) &= \{i \in I : i \text{ confond } x \text{ et } y\}.
 \end{aligned}$$

En supposant que  $i$  voit  $x$  si et seulement si  $i$  confond  $x$  et  $x$ , on a :

$$V(x) = V(x, x).$$

On suppose que l'ensemble  $I$  est muni d'une topologie  $\Theta$  et que, pour tout couple  $(x, y) \in X \times X$ ,  $V(x, y)$  est un ouvert de  $I$ . Cette hypothèse traduit l'idée que si un observateur  $i \in I$  confond  $x$  et  $y$ , alors tout observateur  $j$  suffisamment proche de  $i$  confond également  $x$  et  $y$ . On suppose, en outre, que  $V$  satisfait l'axiomatique suivante :

$$V(x, y) \subseteq V(y, x), \quad (E_1)$$

$$V(x, y) \cap V(y, z) \subseteq V(x, z), \quad (E_2)$$

c'est-à-dire que  $V$  est symétrique (si  $i$  confond  $x$  et  $y$  alors il confond  $y$  et  $x$ ) et transitive (si  $i$  confond  $x$  et  $y$  et  $y$  et  $z$ , alors  $i$  confond  $x$  et  $z$ ).

L'entité composée d'un ensemble  $X$  et d'une application  $V : X \times X \rightarrow \Theta$  satisfaisant  $(E_1)$  et  $(E_2)$  (dite ici "fonction d'observation") est appelée *ensemble empirique (observé par  $I$ )*.

Il est évident que si l'on pose, pour  $x \in X$  et  $y \in Y$ ,

$$\llbracket x = y \rrbracket = V(x, y),$$

$$\llbracket x = x \rrbracket = V(x),$$

un ensemble empirique est un  $\Theta$ -ensemble, c'est-à-dire un  $\Omega$ -ensemble avec  $\Omega = \Theta$ .

Soient  $(X, V)$  et  $(Y, W)$  deux ensembles empiriques. On appelle *fonction empirique*  $f : (X, V) \rightarrow (Y, W)$  une application  $f : X \times Y \rightarrow \Theta$ , définie par

$$f(x, y) = \{i \in I : i \text{ voit que } y = fx\},$$

$f(x, y)$  peut donc être considéré comme l'ensemble des observateurs qui "voient que  $y = fx$ ". Cette écriture informelle permet de dégager les axiomes suivants :

$$f(x, y) \cap V(x, x') \subseteq f(x', y) \quad (E_3)$$

$$W(y, y') \cap f(x, y) \subseteq f(x, y') \quad (E_4)$$

$$f(x, y) \cap f(x, y') \subseteq W(y, y') \quad (E_5)$$

$$V(x) = \bigcup \{f(x, y) : y \in Y\} \quad (E_6)$$

pour tous  $x, x' \in X$  et tous  $y, y' \in Y$ .

La première idée qui vient à l'esprit est de donner à l'écriture ci-dessus une lecture littérale (à défaut de quoi l'introduction de l'équation  $fx = y$  serait fautive) et ainsi de faire converger l'intuition sous-jacente (les observateurs voient que  $y = fx$ ) et la définition formelle de  $f(x, y)$ , c'est-à-dire de supposer que, pour toute fonction empirique :  $f : X \times Y \rightarrow \Theta$ , il existe une fonction  $\tilde{f} : X \rightarrow Y$  telle que :

$$f(x, y) = \{i \in I : \tilde{f}(x) = y\}.$$

Considérons alors, dans un premier temps, la catégorie dont les objets sont les ensembles empiriques et les flèches les fonctions empiriques ainsi définies.

Remarquons tout d'abord que :

$$f(x, y) = W(y, \tilde{f}(x)).$$

Bien que la signification de l'expression "l'observateur  $i$  voit que  $\tilde{f}(x) = y$ " – laquelle intervient dans la définition de  $f(x, y)$  – ne soit pas exempte d'ambiguïté, nous avons en effet :

(1) Si  $i \in f(x, y)$  alors  $i$  voit que  $\tilde{f}(x) = y$ . Supposons que  $i \notin W(y, \tilde{f}(x))$ . Alors  $i$  ne confond pas  $y$  et  $\tilde{f}(x)$ . Donc  $i$  voit que  $\tilde{f}(x) \neq y$ . Donc  $i \notin f(x, y)$ , ce qui est impossible.

(2) Réciproquement, si  $i \in W(y, \tilde{f}(x))$  alors  $i$  confond  $\tilde{f}(x)$  et  $y$ . Supposons que  $i$  n'est pas élément de  $f(x, y)$ . Alors  $i$  ne voit pas que  $\tilde{f}(x) = y$ . Donc  $i$  ne confond pas  $\tilde{f}(x)$  et  $y$  c'est-à-dire  $i \notin W(y, \tilde{f}(x))$ , ce qui est impossible.

Enfin, une flèche  $f : (X, V) \rightarrow (Y, W)$ , c'est-à-dire une fonction empirique, est définie par :

$$f(x, y) = W(y, \tilde{f}(x)) = \llbracket y = \tilde{f}(x) \rrbracket.$$

La catégorie ainsi construite coïncide avec la catégorie notée  $F\Theta$ -SET, c'est-à-dire avec  $F\Omega$ -SET pour  $\Omega = \Theta$ .

On pourrait définir une fonction empirique en posant :

$$f(x, y) = W(y, \tilde{f}(x)) \cap V(x),$$

définition suggérée dans certains passages de [2], bien que contradictoire avec la définition de  $f(x, y)$  ci-dessus. Cette flèche satisfait  $(F\Omega_3)$ - $(F\Omega_5)$  mais ne vérifie pas  $(F\Omega_6)$ , c'est-à-dire, dans la notation des ensembles empiriques :

$$V(x) = \bigcup_{y \in Y} W(y, \tilde{f}(x)),$$

mais elle vérifie seulement :

$$V(x) = \bigcup_{y \in Y} f(x, y),$$

c'est-à-dire l'équivalent de  $(\Omega_6)$ . La catégorie correspondante est notée  $SF\Theta$ -SET puisqu'elle coïncide avec  $SF\Omega$ -SET pour  $\Omega = \Theta$ .

En tout état de cause, que les flèches (c'est-à-dire les fonctions empiriques) soient définies par :

$$f(x, y) = W(y, \tilde{f}(x))$$

ou par :

$$f(x, y) = W(y, \tilde{f}(x)) \cap V(x),$$

les catégories correspondantes  $F\Theta$ -SET et  $SF\Theta$ -SET *ne sont pas des topos*.

Comme montré en 2.2, les objets de la catégorie  $F\Theta$ -SET doivent, pour former un topos, satisfaire la condition :

$$\bigcup_{x \in X \setminus \{x\}} V(x, x') \subsetneq V(x). \quad (*)$$

La catégorie correspondante est notée  $F^*\Theta$ -SET puisqu'elle coïncide avec  $F^*\Omega$ -SET pour  $\Omega = \Theta$ . À la différence de  $F\Theta$ -SET et de  $SF\Theta$ -SET,  $F^*\Theta$ -SET est un topos. Mais il s'agit d'un topos booléen. Cette catégorie est donc soumise à des conditions contraignantes dont l'une des conséquences, outre celles déjà mentionnées dans le cas général c'est-à-dire pour  $F^*\Omega$ -SET (dont le fait que le topos est booléen) est que  $F^*\Theta$ -SET n'est pas équivalente à la catégorie des faisceaux sur  $I$ .

### 3.2 Espace des observations

A contrario, si l'on souhaite lever la contrainte (\*), il faut modifier la définition des flèches c'est-à-dire abandonner l'hypothèse que toute flèche  $f : A \rightarrow B$  est définie par une application  $\tilde{f} : A \rightarrow B$ .

Le fait que la catégorie  $F\Theta\text{-SET}$  ne soit pas un topos (et ne soit donc pas équivalente à la catégorie des faisceaux sur  $I$ ) vient, en effet, de ce que toute flèche  $f : (X, V) \rightarrow (Y, W)$  est définie par

$$f(x, y) = \{i \in I : i \text{ voit que } y = \tilde{f}(x)\},$$

définition qui, de plus, est ambiguë et peu compréhensible, dans la mesure où elle laisse entendre qu'il y aurait une fonction  $\tilde{f}$  à "voir".

Dès lors, nous considérons la catégorie dont les objets sont les ensembles empiriques satisfaisant  $(E_1) - (E_2)$  et les flèches  $f : (X, V) \rightarrow (Y, W)$  sont les applications  $f : X \times Y \rightarrow \Theta$  satisfaisant  $(E_3) - (E_6)$ , ces dernières n'étant pas, en général, définies par des fonctions  $\tilde{f} : X \rightarrow Y$ .

La catégorie est notée par  $\Theta\text{-SET}$ , puisqu'elle coïncide avec  $\Omega\text{-SET}$  pour  $\Omega = \Theta$ . Ainsi l'écriture (de Bénabou) :

$$f(x, y) = \{i \in I : i \text{ voit que } fx = y\},$$

doit-elle être éliminée car fautive. Dès lors, l'interprétation des flèches de  $\Theta\text{-SET}$  est problématique : comment interpréter l'ensemble d'observateurs image de  $(x, y)$  par  $f$ , sachant que  $f(x, y)$  est un "bloc" qui ne permet pas de donner un sens à "être l'image de", ni même à la "notion d'image" ? Que dire de ce que "voient" ces observateurs ?

Il est évident que  $\Theta\text{-SET}$  comme cas particulier de  $\Omega\text{-SET}$  est équivalente à la catégorie des faisceaux sur  $I$  (et est donc un topos). Mais une démonstration directe, spécifique aux ensembles empiriques est nécessaire, notamment en ce qu'elle met en évidence la structure de l'espace des observations.

Soit donc  $(X, V)$  un ensemble empirique sur l'espace  $(I, \Theta)$  des observateurs. On définit l'espace des observations de  $(X, V)$ , noté  $\text{Obs}(X, V)$  comme étant l'espace topologique obtenu via la construction suivante :  $I \times X$  étant muni de la topologie produit de  $\Theta$  et de la topologie discrète sur  $X$ ,  $\text{Obs}(X, V)$  est l'espace quotient de :

$$\{\langle i, x \rangle \in I \times X : i \in V(x, x)\}$$

muni de la topologie induite, par l'équivalence :

$$\langle i, x \rangle \sim_V \langle i, y \rangle \quad \text{si et seulement si} \quad i \in V(x, y),$$

dont un élément générique, c'est-à-dire une classe d'équivalence, notée par  $[\langle i, x \rangle]_V$ , peut être interprété comme l'observation de  $x \in X$  par l'observateur  $i \in I$  : si  $i$  confond  $x$  et  $y$ , alors  $x$  et  $y$  donnent lieu à la même observation.

L'application :

$$p : \text{Obs}(X, V) \rightarrow I, \quad [\langle i, x \rangle]_V \mapsto i$$

est un homéomorphisme local et ainsi  $\text{Obs}(X, V)$  est un faisceau sur  $I$ . Pour le démontrer, il suffit de remarquer que, pour tout  $[\langle i, x \rangle]_V \in \text{Obs}(X, V)$ , la famille des ensembles de la forme :  $\{[\langle j, x \rangle]_V : j \in U\}$  où  $U$  est un voisinage de  $i$  dans  $I$ , est une base de voisinages de  $[\langle i, x \rangle]_V$ .

Soit donc  $\mathbf{Obs}(X, V)$  l'objet de la catégorie des faisceaux sur  $I$  constitué de l'espace  $\text{Obs}(X, V)$  des observations et de la projection :

$$p : \text{Obs}(X, V) \rightarrow I, \quad [\langle i, x \rangle]_V \mapsto i$$

qui à toute observation  $[\langle i, x \rangle]_V$  associe l'observateur dont elle est le fait.

Considérons alors le foncteur  $T$  qui :

(i) à tout ensemble empirique  $(X, V)$  associe l'espace des observations  $\mathbf{Obs}(X, V)$ ,

(ii) à toute flèche  $f : (X, V) \rightarrow (Y, W)$  associe la flèche  $T(f) = F$ , où  $F : \mathbf{Obs}(X, V) \rightarrow \mathbf{Obs}(Y, W)$ , est définie pour tout  $[\langle i, x \rangle]_V \in \text{Obs}(X, V)$  par :

$$F([\langle i, x \rangle]_V) = [\langle i, y \rangle]_W, \quad \text{où } y \text{ est tel que } i \in f(x, y).$$

En vertu de  $(E_3)$  -  $(E_6)$ ,  $F$  est bien définie. Elle est fibre à fibre, induisant l'identité sur  $I$ . On vérifie immédiatement que  $F$  est continue (en utilisant les voisinages de base des points de  $\text{Obs}(X, V)$  et de  $\text{Obs}(Y, W)$ ).  $F$  est donc bien une flèche de la catégorie des faisceaux sur  $I$ .

On vérifie ensuite que, pour deux flèches  $f$  et  $g$  de la catégorie des ensembles empiriques,  $T(g \circ f) = T(g) \circ T(f)$  et que, pour tout ensemble

empirique  $(X, V)$ , la fonction d'observation  $V : X \times X \rightarrow \Theta$ , flèche identité de la catégorie, vérifie  $T(V) = id_{\text{Obs}(X, V)}$ . Donc  $T$  est bien un foncteur de la catégorie des ensembles empiriques dans celle des faisceaux sur  $I$ . De plus, on montre aisément que, pour toute flèche  $f$ , la correspondance  $f \mapsto T(f)$  est bijective, c'est-à-dire que  $T$  est pleinement fidèle.

La question de l'équivalence entre la catégorie des ensembles empiriques et celle des faisceaux sur  $I$  est alors celle de la représentativité de  $T$ , c'est-à-dire de l'existence, pour tout faisceau  $(E, p_E)$  sur  $I$ , d'un ensemble empirique  $(X, V)$  dont l'espace des observations  $\mathbf{Obs}(X, V)$  soit isomorphe à  $(E, p_E)$ .

Soit, pour tout ensemble empirique  $(X, V)$  et pour tout  $x \in X$ , l'application :

$$\begin{aligned} \check{x} : V(x, x) &\rightarrow \text{Obs}(X, V), \\ i &\mapsto [ \langle i, x \rangle ]_V, \end{aligned}$$

qui est une section locale de  $\text{Obs}(X, V)$ .

Alors, pour tous  $x, x' \in X$ , comme l'on a  $i \in V(x, x')$  si et seulement si  $[ \langle i, x \rangle ] = [ \langle i, x' \rangle ]$ , soit encore, si et seulement si  $\check{x}(i) = \check{x}'(i)$ , on a donc :

$$V(x, x') = \{i \in I : \check{x}(i) = \check{x}'(i)\}.$$

Ainsi, du point de vue des observateurs, un point de l'ensemble empirique  $(X, V)$  peut être considéré comme une section de  $\text{Obs}(X, V)$  (ou, si l'on veut, comme un champ d'observations), si bien qu'un ensemble empirique  $(X, V)$  est un ensemble de sections locales de l'espace des observations  $\text{Obs}(X, V)$ , ensemble tel que, pour tout  $\xi \in \text{Obs}(X, V)$ , c'est-à-dire pour toute observation, si  $p(\xi) = i$ , alors il existe une section appartenant à cet ensemble dont la valeur en  $i$  est  $\xi$  : toute observation est l'observation d'un point de  $X$ .

Pour un faisceau quelconque  $(E, p_E)$  sur  $I$ , soit  $\mathcal{S}(E)$  l'ensemble des sections locales de  $p_E : E \rightarrow I$  et soit  $\mathcal{V}$  l'application :

$$\mathcal{V} : \mathcal{S}(E) \times \mathcal{S}(E) \rightarrow \Theta$$

telle que, pour tous  $s, t \in \mathcal{S}(E)$  :

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(s, s) &= U_s, \text{ ouvert de définition de } s, \\ \mathcal{V}(s, t) &= \{i \in I : s(i) = t(i)\}. \end{aligned}$$

Pour tous  $s, t \in \mathcal{S}(E)$ ,  $\mathcal{V}(s, t)$  est un ouvert de  $I$  vérifiant :

$$\begin{aligned}\mathcal{V}(s, t) &\subseteq \mathcal{V}(s, s) \cap \mathcal{V}(t, t), \\ \mathcal{V}(s, t) &= \mathcal{V}(t, s), \\ \mathcal{V}(s, t) \cap \mathcal{V}(r, s) &\subseteq \mathcal{V}(r, t), \text{ pour tout } r \in \mathcal{S}(E).\end{aligned}$$

$\mathcal{V}$  est donc une fonction d'observation de  $\mathcal{S}(E)$  et  $(\mathcal{S}(E), \mathcal{V})$  est un ensemble empirique (observé par  $I$ ).

Le foncteur  $T$  associe, par définition, à  $(\mathcal{S}(E), \mathcal{V})$  son espace des observations  $\mathbf{Obs}(\mathcal{S}(E), \mathcal{V})$ , où  $\mathbf{Obs}(\mathcal{S}(E), \mathcal{V})$  est l'espace topologique quotient du sous-espace :

$$\{ \langle i, s \rangle : s \text{ est définie en } i \} \subseteq I \times \mathcal{S}(E)$$

$(I \times \mathcal{S}(E))$  étant muni de la topologie produit de  $\Theta$  et de la topologie discrète sur  $\mathcal{S}(E)$  par la relation d'équivalence :

$$\langle i, s \rangle \sim_{\mathcal{V}} \langle i, t \rangle \text{ si et seulement si } s(i) = t(i).$$

Pour démontrer que  $T$  est représentatif, on considère l'application  $\Phi_E$  suivante :

$$\begin{aligned}\Phi_E : \mathbf{Obs}(\mathcal{S}(E), \mathcal{V}) &\rightarrow E \\ [\langle i, s \rangle]_{\mathcal{V}} &\mapsto s(i)\end{aligned}$$

qui à toute observation de la section  $s \in \mathcal{S}(E)$  (par l'observateur  $i$ ), associe l'évaluation de  $s$  en  $i$ , soit  $s(i) \in E$ , résultat de cette observation  $[\langle i, s \rangle]_{\mathcal{V}}$  faite par  $i$ , qui fait de  $E$  un espace de "résultats d'observations" de ses sections.

**Théorème :** *L'application  $\Phi_E$  est une identification de la catégorie des faisceaux de  $\mathbf{Obs}(\mathcal{S}(E), \mathcal{V})$  avec  $(E, p_E)$ . Le foncteur  $T$  est donc représentatif et la catégorie  $\Theta\text{-SET}$  est équivalente à la catégorie des faisceaux sur  $I$ .*

**Preuve :** (i)  $\Phi_E$  est clairement fibre à fibre et induit l'identité sur  $I$ .

(ii)  $\Phi_E$  est bijective. En effet, si  $[\langle i, s \rangle]_{\mathcal{V}}$  et  $[\langle j, t \rangle]_{\mathcal{V}}$  sont tels que  $\Phi_E([\langle i, s \rangle]_{\mathcal{V}}) = \Phi_E([\langle j, t \rangle]_{\mathcal{V}})$ , alors, d'une part  $i = j$  et, d'autre

part,  $s(i) = t(j)$ . Donc  $i \in \mathcal{V}(s, t)$  c'est-à-dire  $[< i, s >]_{\mathcal{V}} = [< j, t >]_{\mathcal{V}}$ . Donc  $\Phi_E$  est injective. Par ailleurs, soit  $\xi \in E$  tel que  $i = p_E(\xi)$ . Alors, il existe une section locale  $s_\xi$  définie dans un voisinage ouvert de  $i$  telle que  $s_\xi(i) = \xi$ . Ainsi, pour tout  $\xi \in E$ , il existe une section  $s \in \mathcal{S}(E)$  telle que  $\Phi_E([< p_E(\xi), s >]_{\mathcal{V}}) = \xi$ . Donc  $\Phi_E$  est surjective.

(iii)  $\Phi_E$  est continue. En effet, soit  $[< i, s >]_{\mathcal{V}} \in \text{Obs}(\mathcal{S}(E), \mathcal{V})$  et soit  $W$  un voisinage de  $\Phi_E([< i, s >]_{\mathcal{V}}) = s(i) = \xi \in E$ . Alors il existe un voisinage ouvert  $W'$  de  $s(i)$ , inclus dans  $W$  et tel que  $p_{E|_{W'}}$  est un homéomorphisme  $W' \rightarrow p_E(W') = U'$ ,  $U'$  étant donc un ouvert de  $I$ . Soit alors la section :

$$s_\xi : U' \rightarrow E, s_\xi = (p_{E|_{W'}})^{-1}.$$

On a :  $s_\xi(i) = \xi = s(i)$  c'est-à-dire que  $s$  et  $s_\xi$  coïncident sur un voisinage  $U$  de  $i$ ,  $U \subseteq U' \cap \mathcal{V}(s, s)$ . Considérons alors  $\{[< j, s >]_{\mathcal{V}} : j \in U\}$ . C'est un voisinage de  $[< i, s >]_{\mathcal{V}}$  dans  $\text{Obs}(\mathcal{S}(E), \mathcal{V})$  et l'on a :

$$\Phi_E(\{[< j, s >]_{\mathcal{V}} : j \in U\}) = s(U) = s_\xi(U) \subseteq W' \subseteq W.$$

Ainsi, pour tout voisinage  $W$  de  $s(i) = \Phi_E([< i, s >]_{\mathcal{V}})$  dans  $E$ , il existe un voisinage  $U$  de  $[< i, s >]_{\mathcal{V}}$  dans  $\text{Obs}(\mathcal{S}(E), \mathcal{V})$  tel que  $\Phi_E(U) \subseteq W$ . Donc  $\Phi_E$  est continue.

(iv)  $\Phi_E$ , étant continue et fibre à fibre, est un homéomorphisme local de  $\text{Obs}(\mathcal{S}(E), \mathcal{V})$  dans  $E$ . Comme  $\Phi_E$  est bijective, c'est un homéomorphisme. Donc  $\Phi_E$  est un isomorphisme

$$\mathbf{Obs}(\mathcal{S}(E), \mathcal{V}) \rightarrow (E, p_E).$$

Le foncteur  $T$  est donc représentatif et établit une équivalence entre la catégorie des ensembles empiriques observés par  $I$  et la catégorie des faisceaux sur  $I$ .  $\square$

Tout faisceau  $(E, p_E)$  est donc isomorphe à l'espace des observations d'un ensemble empirique : l'ensemble  $\mathcal{S}(E)$  de ses sections locales muni de la fonction d'observation  $\mathcal{V}$  qui à une section locale  $s \in \mathcal{S}(E)$  associe son ouvert  $\mathcal{V}(s, s)$  de définition et à deux sections locales  $s, t \in \mathcal{S}(E)$  associe l'ouvert  $\mathcal{V}(s, t)$  sur lequel ces sections sont égales. Via cet isomorphisme,  $E$  apparaît comme l'espace des (résultats des) observations de ses sections.

Toutefois, comme nous le verrons ci-dessous, cette équivalence, du point de vue des observateurs, n'est pas sans susciter un certain nombre d'interrogations pouvant aller jusqu'à la remise en cause du concept même d'ensemble empirique, interrogations qui font écho à celles du paragraphe 2.2 sur la pertinence du concept de topos.

## 4. Une équivalence malheureuse ?

### 4.1 Restrictions et recollements

Soit  $(X, V)$  un ensemble empirique sur  $I$  et  $\text{Obs}(X, V)$  son espace des observations.  $\text{Obs}(X, V)$  étant un faisceau sur  $I$ , on peut lui appliquer la construction précédente.

Ainsi, si l'on note  $\mathcal{X}$  l'ensemble  $\mathcal{S}(\text{Obs}(X, V))$  des sections locales de  $\text{Obs}(X, V)$  et si l'on considère la fonction d'observation  $\mathcal{V} : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \rightarrow \Theta$  définie, comme ci-dessus, pour l'ensemble des sections d'un faisceau  $(E, p_E)$  quelconque sur  $I$ , nous avons :

$$\begin{aligned}\mathbf{Obs}(\mathcal{X}, \mathcal{V}) &= T((\mathcal{X}, \mathcal{V})), \\ \mathbf{Obs}(X, V) &= T((X, V)).\end{aligned}$$

Il s'ensuit que  $\mathbf{Obs}(\mathcal{X}, \mathcal{V})$  et  $\mathbf{Obs}(X, V)$  sont isomorphes dans la catégorie des faisceaux et, partant, les ensembles empiriques  $(\mathcal{X}, \mathcal{V})$  et  $(X, V)$  sont isomorphes.

Tout point  $x \in X$  définit une section locale  $\check{x}$  de  $\text{Obs}(X, V)$  et l'on peut considérer que l'application  $x \mapsto \check{x}$  de  $X$  dans  $\mathcal{X}$  est injective sans réelle perte de généralité (puisque, si deux points  $x$  et  $x'$  de  $X$  définissent la même section locale de  $\text{Obs}(X, V)$ , on a alors  $V(x, x) = V(x', x') = V(x, x')$ ). Mais toute section de  $\text{Obs}(X, V)$  ne correspond pas, loin s'en faut, à un point de  $X$  : celles qui correspondent à un point de  $X$  (de la forme  $\check{x}$ ,  $x \in X$ ) n'ont aucune propriété distinctive ; leur seule propriété est de former collectivement une famille de sections locales que l'on peut qualifier de "génératrice" en ce sens que, pour tout  $i \in I$  et pour toute section locale  $s$  de  $\text{Obs}(X, V)$ , il existe une section de cette famille qui prend la même valeur que  $s$  au point  $i$  et, donc, sur tout un voisinage de  $i$ .

Ainsi, on peut seulement dire, d'une manière générale, que toute section de  $\text{Obs}(X, V)$  est "construite à partir des points de  $X$ " (en l'occurrence à partir d'observations de ces points) puisque son ouvert de définition peut toujours être recouvert par une famille de petits ouverts de  $I$  dans chacun desquels elle coïncide avec une des sections de la forme  $\check{x}, x \in X$ . En d'autres termes, toute section locale  $s$  de  $\text{Obs}(X, V)$  s'obtient à partir des sections correspondant aux points de  $X$  de l'une des deux façons suivantes :

(i) par "restriction" : si  $U$  est l'ouvert de définition de  $s$ , il existe  $x \in X$  tel que  $s = \check{x}|_U$  i.e., pour tout  $i \in U$ ,  $s(i) = [\langle i, x \rangle]_V$ .

(ii) par "recollement" : pour tout  $i \in U$ , il existe un voisinage  $U'$  de  $i$  et  $x \in X$  tels que, pour tout  $j \in U'$ ,  $s(j) = [\langle j, x \rangle]_V$  i.e.  $s|_{U'} = \check{x}|_{U'}$ .

**Remarque :** Le fait que  $(X, V)$  et  $(\mathcal{X}, \mathcal{V})$  donnent lieu au même espace d'observations peut s'interpréter, du point de vue des observateurs, de la façon suivante : si l'on admet qu'un point "observé" est obtenu comme un "champ (local et continu) d'observations", on obtient alors indifféremment les points de  $X$  et ceux de  $\mathcal{X}$  en récoltant des observations provenant de différents petits ouverts d'observateurs de telle sorte que les observations provenant d'un même petit ouvert soient des observations d'un même point de  $X$  par les différents observateurs de cet ouvert. On obtient ainsi tout autant les points de  $x$  (les sections  $\check{x}, x \in X$ ) que leurs restrictions  $\check{x}|_U$  (correspondant à des "vues partielles", émanant d'un ouvert  $U$  d'observateurs, sur ces points  $x$  de  $X$ ) et des "points artificiels", en quelque sorte "imaginés" par une famille d'ouverts d'observateurs qui "recombinent" leurs observations.

Quel est le statut des sections de  $\text{Obs}(X, V)$ , "restrictions" de points de  $X$ , c'est-à-dire de la forme  $\check{x}|_U, x \in X, U$  ouvert de  $I$ ? Il n'est pas a priori absurde, du point de vue des observateurs, de prendre en considération ces sections : elles correspondent, en effet, à des "vues partielles" sur les points de  $X$  et peuvent posséder certaines propriétés que n'ont pas les sections  $\check{x}, x \in X$ . Doit-on pour autant, comme c'est le cas avec  $(\mathcal{X}, \mathcal{V})$  leur donner le même statut que les points de  $X$  et ainsi considérer, par exemple, un point de  $x$  (i.e. la section  $\check{x}$ ) et sa restriction  $\check{x}|_U$  comme deux points différents au même titre que deux points  $x$  et  $x'$  de  $X$  (i.e.  $\check{x}$  et  $\check{x}'$ ) ?

De façon un peu plus précise, pour tous les observateurs appartenant à l'ouvert  $U$  de la restriction  $\check{x}|_U$  du point  $\check{x}$ ,  $\check{x}$  et  $\check{x}|_U$  procèdent de la même observation. Dès lors, que signifie que ces observateurs, qui sont les seuls à "voir"  $\check{x}|_U$ , voient  $\check{x}$  et  $\check{x}|_U$ ? A fortiori, pour  $x \in X$  et  $i \in V(x, x)$ , est-il raisonnable de considérer (comme c'est le cas avec  $(\mathcal{X}, \mathcal{V})$ ) que cet observateur  $i$  voit effectivement tous les points  $\check{x}|_W$  de  $\mathcal{X}$  où  $W$  est un voisinage ouvert de  $i$  inclus dans  $V(x, x)$ , et ce à partir de la seule observation  $[\langle i, x \rangle]_V$ ? Ainsi, considérer des restrictions comme des points à part entière conduit à obtenir, à partir d'espaces d'observations identiques, des ensembles empiriques très différents, pouvant être, comme  $\mathcal{X}$ , fort éloignés des ensembles observés par les observateurs individuellement, i.e. les fibres de  $\text{Obs}(X, V)$  ou de  $\text{Obs}(\mathcal{X}, \mathcal{V})$ . Cela conduit, en quelque sorte, à ce que les observateurs, à partir de leurs observations individuelles d'un ensemble empirique donné n'observent en fait - collectivement et localement - que... leur propre topologie!

Ainsi, que  $(X, V)$  soit isomorphe, donc identifiable, à  $(\mathcal{X}, \mathcal{V})$ , lequel contient les sections  $\check{x}$ ,  $x \in X$ , toutes leurs restrictions (et d'autres choses...), conduit à des "identifications" entre ensembles empiriques qui semblent pour le moins abusives, en ce qu'elles permettent d'obtenir des ensembles empiriques sans lien réel avec des observations individuelles.

La question qui se trouve ainsi posée est donc celle de la signification du mot "voir", plus précisément de l'expression " $i$  voit  $x$ ".

**Remarques :** (i) Dans  $F^*\Theta\text{-SET}$  la condition (\*) sur la fonction d'observation fait que, dans un ensemble empirique  $(X, V)$ , on ne peut avoir de points de  $X$  qui soient des restrictions d'autres points (pas plus, d'ailleurs que des recollements). Les ensembles empiriques de  $F^*\Theta\text{-SET}$  sont donc plus "proches" des ensembles observés individuellement par les observateurs. Ainsi la définition de "voir" que cette catégorie autorise est-elle plus intuitivement satisfaisante. En effet, un point de  $X$  est "vu" par les observateurs de  $I$  s'il existe un observateur de  $I$  qui ne confond ce point avec aucun autre. En outre, la condition (\*) implique que tout point est vu par au moins un observateur.

(ii) En contrepoint de l'analyse critique ci-dessus, la considération des restrictions comme des points à part entière n'est pas sans justification, par exemple lorsque les observateurs représentent des ordres de grandeur, comme

les indices des nombres elliptiques de Levi-Civita [8]. En prenant les indices comme observateurs et la topologie discrète, par exemple, sur leur ensemble, la troncature d'un nombre elliptique à un certain indice est bien une "restriction" de ce nombre mais peut être également considérée comme un nombre elliptique à part entière.

L'ensemble  $\mathcal{X} = \mathcal{S}(\text{Obs}(X, V))$  contient, outre les sections  $\check{x}$  correspondant aux points  $x \in X$  et leurs restrictions, toutes les autres sections obtenues en "recollant" des restrictions de sections de la forme  $\check{x}$ ,  $x \in X$ . Mais, dès lors, l'isomorphisme entre  $(X, V)$  et  $(\mathcal{X}, \mathcal{V})$  identifie l'ensemble  $(X, V)$  des points "objectifs" (ensemble qui fournit la "matière des observations") à l'ensemble  $(\mathcal{X}, \mathcal{V})$  de toutes les recombinaisons que peuvent faire les observateurs en "recollant" des observations partielles de "points objectifs" - recombinaisons qui, de plus, sont considérés comme des "points objectifs" de  $(\mathcal{X}, \mathcal{V})$ .

Afin de mieux appréhender, au niveau des ensembles empiriques, la "distorsion" créée par cet isomorphisme entre  $(X, V)$  et  $(\mathcal{X}, \mathcal{V})$ , il convient de montrer à quoi correspondent ces "recombinaisons" relativement à l'ensemble empirique  $(X, V)$ , c'est-à-dire d'exprimer les sections locales du faisceau  $\text{Obs}(X, V)$  en termes de notions relatives à  $(X, V)$ .

**Proposition :** *À toute section locale  $s$  de  $\text{Obs}(X, V)$  correspond une et une seule flèche  $F_s : (\{I\}, V_U) \rightarrow (X, V)$  où  $U$  est un ouvert de  $I$ , c'est-à-dire une flèche d'un sous-objet de l'objet terminal dans  $(X, V)$ . Inversement à toute flèche  $F : (\{I\}, V_U) \rightarrow (X, V)$ , modulo l'identification de  $\{I\} \times X$  à  $X$ , correspond une et une seule section locale de  $\text{Obs}(X, V)$ .*

**Preuve :** Tout d'abord, rappelons qu'un sous-objet quelconque de l'objet terminal  $(I, id_I)$  est un mono  $inj_U : U \rightarrow I$  où  $U$  est un ouvert de  $I$ , sous-objet que nous noterons  $(U, inj_U)$ . Puisque, par ailleurs, dans la catégorie des faisceaux sur  $I$ , une section locale d'un faisceau  $(E, p_E)$  sur  $I$  peut être définie comme une flèche  $s : U \rightarrow E$

$$\begin{array}{ccc}
U & \xrightarrow{s} & E \\
inj_U \downarrow & & \downarrow p_E \\
I & \xrightarrow{id} & I
\end{array}$$

où  $U$  est l'ouvert de définition de  $s$ , toute section locale de  $(E, p_E)$  peut être définie, moyennant le même abus de notation, comme une flèche d'un sous-objet  $(U, inj_U)$  de l'objet terminal dans  $(E, p_E)$ .

Soit donc  $U$  un ouvert de  $I$  et soit  $(\{I\}, V_U)$  l'ensemble empirique correspondant. Son espace d'observations  $Obs(\{I\}, V_U)$  s'identifie clairement à  $(U, inj_U)$ . Ainsi, à toute flèche  $F : (\{I\}, V_U) \rightarrow (X, V)$  correspond, via le foncteur  $T$ , une flèche  $f : (U, inj_U) \rightarrow \mathbf{Obs}(X, V)$ , c'est-à-dire une section locale de  $Obs(X, V)$  définie sur  $U$ . Du fait des propriétés de  $T$ , les flèches de  $(\{I\}, V_U)$  dans  $(X, V)$  sont en bijection avec les sections locales de  $Obs(X, V)$  définies sur  $U$ . Cette propriété est vraie pour tout ouvert  $U$  de  $I$ . Donc, à toute section locale  $s$  de  $Obs(X, V)$  dont l'ouvert de définition est  $U$ , il correspond une et une seule flèche  $F_s : (\{I\}, V_U) \rightarrow (X, V)$ .  $\square$

**Remarque :** Définir, comme ci-dessus, une section locale d'un faisceau  $(E, p_E)$  comme une flèche d'un sous-objet  $(U, inj_U)$  de l'objet terminal dans  $(E, p_E)$  évoque la définition d'un élément d'un sous-objet d'un objet donné [3]. Une section locale de  $(E, p_E)$  apparaît ainsi comme un "sous-élément" de  $(E, p_E)$  ou, plus exactement, du sous-objet  $id_E$  (un élément de  $id_E$  n'étant autre qu'une section globale de  $(E, p_E)$ ).

**Proposition :** *Les sections locales de  $Obs(X, V)$  sont en bijection avec les singletons de l'ensemble empirique  $(X, V)$ .*

**Preuve :** Un singleton d'un ensemble empirique  $(X, V)$  est une application  $\alpha : X \rightarrow \Theta$  vérifiant :

- (i)  $\alpha(x) \subseteq V(x, x)$ , pour tout  $x \in X$ ,
- (ii)  $\alpha(x) \cap V(x, x') \subseteq \alpha(x')$ , pour tous  $x, x' \in X$ ,
- (iii)  $\alpha(x) \cap \alpha(x') \subseteq V(x, x')$ , pour tous  $x, x' \in X$ .

Soit donc  $F$  une flèche de  $(\{I\}, V_U)$  dans  $(X, V)$ . Considérons l'application :

$$\alpha_F : X \rightarrow \Theta, \quad x \mapsto F(I, x).$$

Elle vérifie clairement (i), et, en application de  $(E_3)$ , on a :

$$F(I, x) \cap V(x, x') \subseteq F(I, x'),$$

c'est-à-dire que  $\alpha_F$  vérifie (ii). De même, en application de  $(E_4)$ ,  $\alpha_F$  vérifie (iii).  $\alpha_F$  est donc un singleton de  $(X, V)$ .

Réciproquement, soit  $\alpha$  un singleton de  $(X, V)$ . Considérons alors l'ouvert

$$U_\alpha = \bigcup_{x \in X} \alpha(x),$$

le sous-objet  $(\{I\}, V_{U_\alpha})$  de l'objet terminal et l'application  $F_\alpha : \{I\} \times X \rightarrow \Theta$ ,  $(I, x) \mapsto \alpha(x)$ . Alors  $F_\alpha$  vérifie évidemment  $(E_3)$ . Comme  $\alpha$  vérifie (ii),  $F_\alpha$  vérifie  $(E_5)$ . Enfin, puisque par définition de  $F_\alpha$  et  $U_\alpha$ ,

$$\begin{aligned} \bigcup_{x \in X} F_\alpha(I, x) &= U_\alpha, \\ V_{U_\alpha}(I, I) &= U_\alpha, \end{aligned}$$

$F_\alpha$  vérifie  $(E_6)$ . Il est clair, d'après les définitions, que, pour tout singleton  $\alpha$  de  $(X, V)$ , on a  $\alpha_{F_\alpha} = \alpha$  et que, pour tout  $U \in \Theta$  et toute flèche  $F : (\{I\}, V_U) \rightarrow (X, V)$ , on a  $F_{\alpha_F} = F$ .  $\square$

**Remarque :** Pour tout singleton  $\alpha$  de  $(X, V)$ , la section locale de  $\text{Obs}(X, V)$  qui correspond à  $\alpha$  est la section  $s_\alpha$  définie sur  $U_\alpha = \bigcup_{x \in X} \alpha(x)$  par :

$$\text{pour tout } i \in U_\alpha, \quad s_\alpha(i) = [ \langle i, x \rangle ]_V, \quad \text{où } x \text{ est tel que } i \in \alpha(x).$$

Ainsi, pour tout ensemble empirique  $(X, V)$  sur  $I$ , les points de l'ensemble empirique  $(\mathcal{X}, \mathcal{V})$ , où  $\mathcal{X} = \mathcal{S}(\text{Obs}(X, V))$ , sont les singletons de  $(X, V)$ . De plus,  $(\mathcal{X}, \mathcal{V})$  est "complet" au sens suivant : tout singleton de  $(\mathcal{X}, \mathcal{V})$  correspond à un point de  $\mathcal{X}$  (toute section locale de  $\text{Obs}(\mathcal{X}, \mathcal{V})$  est de la forme  $\check{x}$  pour un certain  $x \in \mathcal{X}$ ). En effet un singleton de  $(\mathcal{X}, \mathcal{V})$

est défini par une flèche  $F : (\{I\}, V_U) \rightarrow (\mathcal{X}, \mathcal{V})$ . Pour une telle flèche, soit l'application  $\sigma_F : U \rightarrow \text{Obs}(X, V)$  définie par

$$\sigma_F(i) = s(i) \in \text{Obs}(X, V),$$

où  $s \in \mathcal{X}$  est telle que  $i \in F(I, s)$ .

L'application  $\sigma_F$  est bien définie sur  $U$  puisque, si  $i \in F(I, s) \cap F(I, s')$ , alors  $i \in \mathcal{V}(s, s')$ , c'est-à-dire  $s(i) = s'(i)$ .  $\sigma_F$  est fibre à fibre et continue. En effet, si  $i \in U$  et si  $s \in \mathcal{X}$  sont tels que  $\sigma_F(i) = s(i)$ , alors  $i \in F(I, s)$ , ouvert, et l'on a  $\sigma_F(j) = s(j)$  pour tout  $j \in F(I, s)$ . Ainsi  $\sigma_F$  coïncide avec  $s$  sur un voisinage de  $i$  et est donc continue en  $i$ . Cette propriété valant pour tout  $i \in U$ ,  $\sigma_F$  est continue et est donc une section locale de  $\text{Obs}(X, V)$ , i.e.  $\sigma_F \in \mathcal{X}$ . Il est donc clair que, pour tout  $s \in \mathcal{X}$ ,

$$F(I, s) = \mathcal{V}(\sigma_F, s) = \{i \in I : \sigma_F(i) = s(i)\}$$

et

$$\bigcup_{s \in \mathcal{X}} F(I, s) = U = \mathcal{V}(\sigma_F, \sigma_F).$$

Donc, tout singleton de  $(\mathcal{X}, \mathcal{V})$  est de la forme  $s \in \mathcal{X} \mapsto \mathcal{V}(\sigma, s)$  pour un certain  $\sigma \in \mathcal{X}$ . Donc  $(\mathcal{X}, \mathcal{V})$  est complet au sens ci-dessus.

$(\mathcal{X}, \mathcal{V})$  peut être défini comme le "complété" de  $(X, V)$  dans le sens suivant :  $(\mathcal{X}, \mathcal{V})$  est l'ensemble empirique dont les points sont les singletons de  $(X, V)$  et la fonction d'observation la fonction qui à deux singletons  $\alpha$  et  $\alpha'$  de  $(X, V)$  associe l'ouvert de  $I$  suivant :

$$\bigcup_{x \in X} [\alpha(x) \cap \alpha'(x)]$$

(fonction obtenue en "traduisant" la fonction d'observation  $\mathcal{V}$  de  $(\mathcal{X}, \mathcal{V})$  en terme de singletons de  $(X, V)$ ). Lorsque  $\alpha$  et  $\alpha'$  sont de la forme  $x'' \mapsto V(x, x'')$  et  $x'' \mapsto V(x', x'')$  où  $x, x' \in X$ , cette fonction d'observation associe à  $\alpha$  et  $\alpha'$  l'ouvert  $V(x, x')$ .

Ainsi, les recombinaisons d'observations partielles de points objectifs font que les observateurs n'obtiennent que les singletons de  $(X, V)$ . Mais, ces points "artificiels" de  $(X, V)$  étant les points "objectifs" de  $(\mathcal{X}, \mathcal{V})$ , dès lors que  $(X, V)$  et  $(\mathcal{X}, \mathcal{V})$  sont isomorphes, la distinction entre points "objectifs" et points "artificiels" de  $(X, V)$  tient-elle vraiment ? Peut-on dire que ce sont

les points de  $X$  qui sont les points "objectifs" de  $(X, V)$ , c'est-à-dire ceux qui fournissent matière à observation? En effet, pour toute famille génératrice  $X'$  de sections locales de  $\text{Obs}(X, V)$ , en posant, pour tout  $s \in X'$  :

$$V'(s, s) = U_s, \text{ ouvert de définition de } s,$$

et, pour tous  $s, t \in X'$  :

$$V'(s, t) = \{i \in U_s \cap U_t : s(i) = t(i)\},$$

l'ensemble empirique  $(X', V')$  est, lui aussi, isomorphe à  $(X, V)$  et peut ne contenir aucun point "objectif" de  $(X, V)$ , c'est-à-dire qu'aucune des sections  $\check{x}$ , pour  $x \in X$ , n'appartient à  $X'$ .

Une question cruciale se pose alors : *qu'est-ce qui est réellement observé?* De quels objets (points "objectifs") les observateurs de  $I$  font-ils l'observation? L'équivalence entre la catégorie des faisceaux sur  $I$  et la catégorie  $\mathcal{O}$ -SET fait que, dans le cadre de cette dernière, nous n'avons (pas plus que les observateurs) le moyen de déterminer en quoi consistent les points "objectifs" d'un ensemble empirique  $(X, V)$  donné. En effet, si les points "artificiels" de  $(X, V)$  trouvent leur expression sous la forme de singletons, de  $(X, V)$ , aucune notion ne correspond aux points "objectifs".

Aussi la notion même d'ensemble empirique se dissout-elle dans cette équivalence. Pour ce qui est des observations, de quoi sont-elles les observations?

## 4.2 Retour sur la question des flèches

Tout comme avec la catégorie  $\Omega$ -SET, les problèmes rencontrés avec la catégorie  $\mathcal{O}$ -SET - problèmes liés à ces isomorphismes où se trouve engloutie la notion de "point objectif", et ainsi d'"objet observé" - amènent à remettre en cause l'usage de cette catégorie, équivalente à la catégorie des faisceaux sur  $I$ , pour représenter la notion intuitive d'ensemble empirique, et cela en raison de la définition de ses flèches.

Dans le cas général de  $\Omega$ -SET, l'(in)aptitude de cette catégorie à rendre compte (en raison de la définition de ses flèches) des notions dont elle est censée fournir une représentation formelle à déjà été mise en cause (voir

§ 2), ce qui nous a conduit à introduire la catégorie  $F^*\Omega\text{-SET}$ . Notons, dès à présent, que dans la catégorie  $F^*\Theta\text{-SET}$  aucune des difficultés auxquelles nous sommes confrontés dans  $\Theta\text{-SET}$ , c'est-à-dire dans le cas général des ensembles empiriques  $(X, V)$  quelconques, ne se présente plus. Ainsi, par exemple, les seuls singletons de  $(X, V)$  qui sont des éléments de  $(X, V)$  sont ceux qui correspondent aux points de  $X$ .

Aussi se bornera-t-on à ne considérer que les problèmes posés par la définition des flèches de la catégorie  $\Theta\text{-SET}$ , problèmes spécifiques à la situation qui nous occupe et qui échappent à la discussion générale sur  $\Omega\text{-SET}$ , parce que liés aux observateurs.

Le problème central est de comprendre comment la définition de cette catégorie (de ses flèches) conduit à rendre isomorphes des ensembles empiriques comme  $(X, V)$  et  $(\mathcal{X}, \mathcal{V})$  et, par suite, des ensembles empiriques, comme  $(X, V)$  et  $(X', V')$  dans l'exemple ci-dessus, qui ne partagent aucun "point objectif".

Remarquons d'abord que la définition des flèches de  $\Omega\text{-SET}$ , c'est-à-dire des "fonctions empiriques" dans la terminologie introduite par Bénabou [2], n'exige d'elles aucun fondement "objectif". Ainsi, du point de vue des rapports des ensembles et des fonctions empiriques aux entités "objectives" correspondantes, cette catégorie présente une forte dissymétrie entre le statut de ses objets et celui de ses flèches :

- la définition d'un ensemble empirique  $(X, V)$  comprend la donnée d'un ensemble  $X$  de points "objectifs" à observer,
- la définition d'une fonction empirique entre  $(X, V)$  et  $(Y, W)$  ne fait intervenir aucune donnée "objective".

Une catégorie tient surtout par ses flèches et il semble que la perte d'objectivité des points (de la notion de "point objectif") dans la catégorie  $\Theta\text{-SET}$  soit effectivement due à cette absence d'exigence d'un fondement objectif dans la définition de ses flèches. On peut s'en convaincre à la lumière du résultat suivant.

Soient  $(X, V)$  et  $(Y, W)$  deux ensembles empiriques. Considérons les ensembles empiriques  $(\mathcal{X}, \mathcal{V})$  et  $(\mathcal{Y}, \mathcal{W})$  tels que  $\mathcal{X} = \mathcal{S}(\text{Obs}(X, V))$  et  $\mathcal{Y} = \mathcal{S}(\text{Obs}(Y, W))$  et où  $\mathcal{V}$  et  $\mathcal{W}$  sont les fonctions d'observation définies comme en 4.1. Soit  $F$  une flèche  $(X, V) \rightarrow (Y, W)$ . Alors il existe une fonction (et une seule)  $\tilde{f} : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$  qui fait commuter le diagramme :

$$\begin{array}{ccc}
 (X, V) & \xrightarrow{F} & (Y, W) \\
 \begin{array}{c} \uparrow \\ H_X \\ \downarrow \end{array} & & \begin{array}{c} \uparrow \\ H_Y^{-1} \\ \downarrow \end{array} \\
 & & \\
 (\mathcal{X}, \mathcal{V}) & \xrightarrow{\mathcal{F}} & (\mathcal{Y}, \mathcal{W})
 \end{array}$$

où l'application  $\mathcal{F} : \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{O}$ ,  $\mathcal{F}(s, t) = \mathcal{W}(\tilde{f}(s), t)$  est une flèche  $(\mathcal{X}, \mathcal{V}) \rightarrow (\mathcal{Y}, \mathcal{W})$  et  $F = H_Y^{-1} \circ \mathcal{F} \circ H_X$ , où  $H_X$  et  $H_Y$  sont respectivement les isomorphismes  $(X, V) \rightarrow (\mathcal{X}, \mathcal{V})$  et  $(Y, W) \rightarrow (\mathcal{Y}, \mathcal{W})$ . Ainsi à toute fonction empirique  $(X, V) \rightarrow (Y, W)$  correspond une fonction objective entre  $\mathcal{X}$  et  $\mathcal{Y}$ , ensembles constitués des points "artificiels" reconstruits par les observateurs à partir d'observations partielles des points de  $X$  et  $Y$ . Ainsi, pour retrouver, à partir des fonctions empiriques entre points objectifs, les fonctions objectives, il faut considérer les points "artificiels" !

Cette situation est entièrement imputable à l'équivalence entre  $\mathcal{O}$ -SET et la catégorie des faisceaux sur  $I$ . Que ces isomorphismes ( $H_X$  et  $H_Y$ ) qui posent problème s'obtiennent via cette équivalence peut conduire à remettre en cause cette dernière. Il semble, néanmoins, que la question primordiale est moins celle de cette équivalence que celle de la raison pour laquelle elle conduit à ces isomorphismes.

En effet, est-il légitime que les ensembles empiriques  $(X, V)$  et  $(\mathcal{X}, \mathcal{V})$  donnent lieu au même espace d'observations ? Cela nous conduit à examiner à quoi correspondent, en termes d'observateurs, les flèches de la catégorie des faisceaux.

Une flèche entre deux espaces d'observation  $\text{Obs}(X, V)$  et  $\text{Obs}(Y, W)$  est, comme on le sait, une application  $f : \text{Obs}(X, V) \rightarrow \text{Obs}(Y, W)$ , continue et fibre à fibre. Elle définit donc, pour tout  $i \in \bigcup_{x \in X} V(x, x)$ , une fonction entre les fibres au-dessus de  $i$  de  $\text{Obs}(X, V)$  et de  $\text{Obs}(Y, W)$  : chaque observateur  $i$  établit une correspondance  $f_i$  entre les observations qu'il fait de  $X$  et celles qu'il fait de  $Y$ . La flèche  $f$  apparaît ainsi comme une collection de telles  $f_i$ , pour  $i \in \bigcup_{x \in X} V(x, x)$ .

Dans le cas général, une telle collection ne peut se comprendre comme une observation de fonction (entre  $X$  et  $Y$ ). Mais  $f$  étant continue, on pourrait espérer de cette utilisation de la topologie de  $I$  que la collection

$$\{f_i : i \in \bigcup_{x \in X} V(x, x)\}$$

qui la constitue présente une cohérence suffisante pour que l'on puisse considérer  $f$  comme une fonction des observations. Or l'expression, en termes d'observateurs, de la continuité de  $f$ , montre qu'il n'en est rien : la topologie sur  $I$  est utilisée *a minima*, la continuité de  $f$  demandant uniquement, au niveau des  $f_i$ , que l'on ait :

( $P$ ) : Pour tout  $i \in \bigcup_{x \in X} V(x, x)$  si  $x \in X$  et  $y \in Y$  sont tels que :

$$f_i([\langle i, x \rangle]_V) = [\langle i, y \rangle]_W,$$

alors il existe un voisinage  $U$  de  $i$  tel que pour tout  $j \in U$ ,

$$f_j([\langle j, x \rangle]_V) = [\langle j, y \rangle]_W.$$

ce qui signifie que, pour constituer une telle flèche  $f$ , les fonctions  $f_i$  sont seulement contraintes à se "recoller" point par point.

Or, la topologie sur  $I$  nous permettrait d'imposer des conditions de cohérence plus fortes sur la collection des  $f_i$  que la simple condition ( $P$ ). On pourrait imposer, par exemple :

( $P'$ ) : Pour tout  $i \in \bigcup_{x \in X} V(x, x)$ , il existe un voisinage  $U$  de  $i$  tel que, pour tout  $x \in X$ , si  $f_i([\langle i, x \rangle]_V) = [\langle i, y \rangle]_W$ , alors, pour tout  $j \in U \cap V(x, x)$ , il existe  $y' \in Y$  tel que :

$$[\langle i, y' \rangle]_W = [\langle i, y \rangle]_W$$

et :

$$f_j([\langle j, x \rangle]_V) = [\langle j, y' \rangle]_W.$$

voire la condition suivante, encore un peu plus exigeante :

( $P''$ ) : Pour tout  $i \in \bigcup_{x \in X} V(x, x)$  il existe un voisinage  $U$  de  $i$  tel que : pour tout  $x \in X$  tel que  $V(x, x) \cap U \neq \emptyset$ , il existe  $y \in Y$  tel que, pour tout  $j \in V(x, x) \cap U$ , on a :

$$f_j([\langle j, x \rangle]_V) = [\langle j, y \rangle]_W.$$

La vérification d'une de ces conditions (en particulier  $(P'')$ ) permettrait de comprendre la fonction  $f : \text{Obs}(X, V) \rightarrow \text{Obs}(Y, W)$ , formée par la collection des  $f_i$ , comme une fonction des observations. Avec la condition  $(P'')$ , il s'agit d'un recollement d'observations de fonctions "objectives" puisque, pour tout  $i \in \bigcup_{x \in X} V(x, x)$ , on a, pour un certain voisinage  $U$  de  $i$ , une fonction :

$$\tilde{f}_U : \{x \in X : V(x, x) \cap U \neq \emptyset\} \rightarrow Y,$$

qui est telle que, pour tout observateur  $j \in U$ , on a :

$$f_j([\langle j, x \rangle]_V) = [\langle j, \tilde{f}_U(x) \rangle]_W.$$

Dans le cas où  $X$  est fini, les propriétés  $(P)$ ,  $(P')$  et  $(P'')$  sont équivalentes. Mais dans le cas général, la contrainte de "cohérence" imposée par la seule continuité (propriété  $(P)$ ) à la collection des  $f_i$  pour qu'elle constitue une flèche de la catégorie des faisceaux est extrêmement lâche : les observateurs ne peuvent plus, dès lors, faire le "tri" de leurs observations.

Or, en se plaçant du point de vue des observateurs, il est facile de sélectionner les flèches de la catégorie des faisceaux correspondant à des "observations de fonctions".

Ces résultats nous conduiront à considérer la catégorie dont les objets sont ceux de  $\Theta\text{-SET}$  (à ceci près que la topologie  $\Theta$  n'est pas supposée complète) et dont les flèches sont définies par des *fonctions observables*, c'est-à-dire des fonctions  $\tilde{f}$  de  $X$  dans  $Y$  telles que :

$$V(x, x') \subset W(\tilde{f}(x), \tilde{f}(x')),$$

pour tous  $x, x' \in X$  : tout observateur qui voit  $x$  voit  $\tilde{f}(x)$  et tout observateur qui confond  $x$  et  $x'$  confond  $\tilde{f}(x)$  et  $\tilde{f}(x')$ .

Nous serons également amenés à considérer la catégorie dont les objets sont ceux de  $F^*\Theta\text{-SET}$  et dont les flèches sont définies par des fonctions strictement observables, c'est-à-dire des fonctions  $\tilde{f}$  de  $X$  dans  $Y$  telles que :

- (i)  $\tilde{f}$  est observable,

(ii) pour tout  $x \in X$ ,  $V(x, x) = W(\tilde{f}(x), \tilde{f}(x))$ .

Les catégories ainsi définies feront l'objet d'un prochain article. Nous montrerons que la première est une catégorie cartésienne fermée mais n'est pas un topos, et que la seconde est un topos booléen.

## 5. Conclusion

La catégorie  $\Theta$ -SET, à l'instar de  $\Omega$ -SET, est un topos (un résultat connu dont le présent article fournit une nouvelle démonstration), mais le substrat intuitif ne peut être préservé que dans le cadre restreint des topoï booléens. En revanche, les catégories  $F\Theta$ -SET et  $SF\Theta$ -SET *ne forment pas des topoï* et ne revêtent donc pas l'intérêt mathématique escompté.

Ces résultats (négatifs) sur les  $\Omega$ -ensembles et les ensembles empiriques commandent, selon nous, de redéfinir à nouveaux frais ces derniers et, comme il y est fait allusion au paragraphe 2.2 ci-dessus, d'étudier plus avant l'intérêt du concept de topos dans le cadre des ensembles empiriques mais également dans un cadre plus large. Sans entrer dans le détail d'une telle étude, qui fera l'objet d'un prochain article, versons quelques éléments au dossier.

Rappelons, tout d'abord, que le terme de "topos" fut choisi, en association avec celui de topologie, par Grothendieck pour suggérer qu'il s'agit de l'"objet par excellence" auquel s'applique l'intuition topologique, un terme devant être considéré comme une sorte de généralisation du terme d'"espace" (topologique), une "extension insoupçonnée, pour mieux dire, une métamorphose de la notion d'espace" [5]. La définition des ensembles empiriques à la Bénabou procède de cette démarche et ambitionne notamment de mettre en évidence des liens entre topos et topologie.

Un point crucial dans la définition des ensembles empiriques est la transitivité de la fonction d'observation  $V$ , hypothèse<sup>1</sup> liée à celle que l'ensemble des observateurs  $I$  est structuré par la donnée d'une topologie. La topologie, par le biais du quatrième axiome de définition du concept de voisinage,

1. Cette hypothèse n'est pas aussi naturelle qu'elle peut le sembler au premier abord : ainsi, d'après Poincaré [9] : les "résultats bruts de l'expérience" nous suggèrent de regarder " $A = B$ ,  $B = C$ ,  $A < C$ " comme étant "la formule du continu physique".

introduit en effet une hypothèse de transitivité : si  $U$  est un voisinage de  $x$ , il existe un voisinage  $W$  de  $x$  tel que, pour tout  $y$  de  $W$ ,  $U$  soit un voisinage de  $y$ . Notons, en outre, que toute topologie peut être obtenue à partir d'une structure quasi-uniforme transitive. Appréhender la notion de perception d'un objet par un ensemble d'observateurs au moyen de la topologie est donc problématique.

La topologie de Grothendieck dont la définition correspond au désir de représenter la modalité "localement", apporte à cette remarque un éclairage particulier. En effet, si  $J$  est une topologie de Grothendieck sur une catégorie  $\mathcal{C}$ , un  $J$ -faisceau est un préfaisceau pour lequel le passage du local au global est possible. Par exemple, pour un crible  $\Gamma$  couvrant un ouvert  $U$ , la donnée de fonctions continues sur chaque ouvert du crible, compatibles entre elles, c'est-à-dire telles que pour  $W_1 \subset W_2$  ouverts du crible, la fonction donnée sur  $W_1$  soit la restriction de celle donnée sur  $W_2$ , détermine une unique fonction sur  $U$  tout entier. C'est exactement ce que dit la définition des faisceaux : un faisceau est un préfaisceau pour lequel, d'une certaine façon, local et global coïncident.

Dans un topos  $\mathcal{T}$ , l'objet  $\Omega$  joue le rôle d'objet des "valeurs de vérité" puisqu'un sous-objet d'un objet  $X$  est déterminé par sa flèche caractéristique de  $X$  vers  $\Omega$ . Une flèche  $j : \Omega \rightarrow \Omega$  peut donc être interprétée comme une modalité, puisqu'elle agit sur les valeurs de vérité. Toutefois, pour qu'elle ait un comportement conforme à l'idée intuitive de ce que l'on entend par "localement", on peut exiger que  $j$  satisfasse les propriétés suivantes, où la flèche  $\top : \mathbf{1} \rightarrow \Omega$  désigne la "valeur de vérité" vrai dans  $\mathcal{T}$  :

- (i)  $j \circ \top = \top$ ,
- (ii)  $j \circ j = j$ ,
- (iii)  $j \circ \wedge = \wedge \circ (j \times j)$ ,

propriétés qui se traduisent de la façon suivante : (i) : pour tout concept stable par restriction (continuité, différentiabilité, etc.), donc tout concept autorisant une notion de préfaisceau, "globalement" implique "localement" (une fonction continue est localement continue); (ii) : "localement" est idempotent ( $A$  est localement localement  $p$  si et seulement si  $A$  est localement

$p$ ); (iii) : "localement" commute avec la conjonction ( $A$  est localement  $p$  et  $q$  si et seulement si  $A$  est localement  $p$  et localement  $q$ ). Ces propriétés présentent l'avantage de "coller" à celles permettant de définir une topologie sur un ensemble au sens habituel du terme, donc de généraliser cette dernière (plus exactement de généraliser la notion de fermeture). Mais cela met également en évidence deux points problématiques.

D'une part, une condition nécessaire pour qu'une famille  $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$  d'ouverts soit un crible pour un ouvert  $U$  d'un espace topologique  $(E, \mathcal{O}(E))$  est que  $\mathcal{O}(E)$ , en tant qu'algèbre de Heyting, soit complètement distributive, donc complète. La généralisation opérée par la topologie de Grothendieck (donc par la topologie de Lawvere-Tierney) constitue également une perte de généralité.

D'autre part, l'énoncé de ces propriétés souligne la fragilité de l'hypothèse sous-tendant (ii) : l'idempotence du "localement", en particulier si on l'envisage sous l'angle de la "proximité" (ce que la topologie et, d'ailleurs, les structures uniformes ambitionnent de prendre en charge), est pour le moins discutable.

Par ailleurs, le concept de classificateur de sous-objets, outil de l'internationalisation, n'est pas sans poser de problèmes. Outre qu'il conduit à une remise en cause du primat du structurel sur le logique (qu'est-ce qu'une logique interne à une structure ?), il se trouve à l'origine d'une tension insurmontable entre point de vue "interne et point de vue "externe".

Il est clair enfin que ces problèmes sont également liés aux contraintes imposées par la définition de l'exponentiation, propriété cardinale des catégories cartésiennes fermées, donc des topoi.

En effet, la propriété d'exponentiation impose que, pour tout couple d'objets  $\langle A, B \rangle$  il existe un objet exponentiel  $B^A$  et une flèche d'évaluation  $e : B^A \times A \rightarrow A$  telle que, pour toute flèche  $g : C \times A \rightarrow B$ , il existe une flèche adjointe  $\hat{g} : C \rightarrow B^A$

$$\frac{g : C \times A \rightarrow B}{\hat{g} : C \rightarrow B^A}$$

telle que  $e \circ (\hat{g} \times id_A) = g$ , donc une bijection :

$$\text{Hom}(C \times A, B) \approx \text{Hom}(C, B^A).$$

Or, cette propriété n'est autre que la traduction catégorique de la règle (classique et intuitionniste) d'introduction de l'implication

$$\frac{\Gamma, \phi \vdash \psi}{\Gamma \vdash \phi \rightarrow \psi}$$

ou, de façon équivalente, de l'axiome du paradoxe positif :  $\vdash \psi \rightarrow (\phi \rightarrow \psi)$ , règle en vertu de laquelle, si  $\psi$  est prouvable à partir de  $\Gamma$ , alors il en est de même de  $\phi \rightarrow \psi$  *gratis prode*. Peut-on imaginer entorse plus manifeste au constructivisme censé inspirer l'intuitionnisme, partant la théorie des topoi ?

Le concept de topos n'est donc pas réellement adapté à une saisie intuitive du spatial. Aussi est-il souhaitable de mettre à l'ordre du jour l'élaboration d'une nouvelle *analysis situs* [3] qui s'affranchisse de ces problèmes et fournisse, entre autres, un cadre formel à la notion intuitive d'ensemble empirique et à la notion d'observation.

## Références

- [1] Jean Bénabou. Séminaires sur les ensembles empiriques. 1975.
- [2] Jean Bénabou. Rapports entre le fini et le continu. In (*J.-M. Salanskis et H. Sinaceur Éditeurs*) *Le labyrinthe du continu*. Paris, Springer-Verlag France, 1992.
- [3] Michel De Glas. Locology and localistic logic. Mathematical and epistemological aspects. *Journal of Logics and their Applications. Special Issue Dedicated to the Memory of Gregory Mints*, vol. 4, May 2017 : 967 – 992.
- [4] Robert Goldblatt. *Topoi. The categorical analysis of logic*. Amsterdam, London, North-Holland, 1983 ou Dover, 2006.
- [5] Alexandre Grothendieck. Sur quelques points d'algèbre homologique. *Tokohu Mathematical Journal*, 9, Number 2 (1957) : 119 – 221.
- [6] D. Higgs. Injectivity in the Topos of Complete Heyting Algebra Valued Sets. *Can. J. Math.*, XXXVI n°1, 1984 : 550 – 568.
- [7] Peter T. Johnstone. *Sketches of an Elephant : A Topos Theory Compendium*. Oxford University Press, 2002.

- [8] Tullio Levi-Civita. Sugli infiniti ed infinitesimi attuali quali elementi analitici. *Atti Istituto Veneto di sc., lett. ed arti*, s. VII, t. VI (1892-1893) : 1765 – 1815.
- [9] Henri Poincaré. La grandeur mathématique et l'expérience. In *La science et l'hypothèse*. Flammarion, 1968.

Christine Bertrand  
UFR de Mathématiques  
et Atelier de Bio-informatique, UMR 7205-ISYEB  
Faculté des Sciences et Ingénierie - Sorbonne Université  
4, rue Charles Moureu  
75013 Paris  
christine.bertrand@sorbonne-universite.fr

Michel De Glas  
SPHERE (UMR 7219)  
CNRS - Université Paris Cité  
Bâtiment Olympe de Gouges  
27, rue Jean-Antoine de Baïf  
place Paul Ricœur  
75013 Paris  
michel.deglas@gmail.com



# L'ENRICHISSEMENT ET SES DIFFÉRENTS POINTS DE VUE, I

*Jacques PENON*

**Résumé.**  $\mathbb{V}$  étant une catégorie monoïdale, il y a trois façons d'enrichir une catégorie dans  $\mathbb{V}$ . On obtient les trois concepts de 1) catégorie  $\mathbb{V}$ -enrichie (ou  $\mathbb{V}$ -catégorie - voir [3]), 2) catégorie  $\mathbb{V}$ -prétensorisée (voir [1], [5] et [4]), 3) catégorie  $\mathbb{V}$ -précotensorisées. On montre dans cette partie I comment passer des uns aux autres et les équivalences qui en résultent. Dans la partie II on introduira le concept de catégorie *mutante* sur  $\mathbb{V}$  (voir [2]) qui généralise les trois concepts précédents. On construira alors les trois plongements 2-pleinement fidèles attendus vers la 2-catégorie des catégories mutantes (sur  $\mathbb{V}$ ).

**Abstract.** Let  $\mathbb{V}$  be a monoidal category. There are three manners to enrich a general category in  $\mathbb{V}$ . We get the three following concepts :

1)  $\mathbb{V}$ -enriched category (or  $\mathbb{V}$ -category - see [3]), 2)  $\mathbb{V}$ -pretensorised category (see [1], [5] and [4]), 3)  $\mathbb{V}$ -precotensorised category. In this part I, we show how to pass from one to the other and the equivalences of 2-category which result of them. In the part II we will introduce the concept of *mutant* category on  $\mathbb{V}$  (see [2]) for generalise the three concepts come before. We will build three 2-functors full and faithfull to the 2-category of mutant categories (on  $\mathbb{V}$ ).

**Keywords.** Monoidal category. Enriched category. Bicategory. Fibred category.

**Mathematics Subject Classification (2020).** 18D20.

## Introduction aux deux parties

- Le concept de catégorie monoïdale est particulièrement central en théorie des catégories car il permet une généralisation du concept même de catégorie.

C'est ce que sont les catégories  $\mathbb{V}$ -enrichies (aussi appelées  $\mathbb{V}$ -catégories ou catégorie relative dans  $\mathbb{V}$  voir [1] et [3]). Comme leur nom l'indique ces "catégories" (généralisées) sont attachées à un  $\mathbb{V}$  qui est précisément une catégorie monoïdale. En plus de conserver la plupart des propriétés habituelles des catégories (elles ont d'ailleurs une vraie catégorie sous-jacente) elles vont hériter des particularités de  $\mathbb{V}$  qui viennent les étoffer. Elles les "enrichissent" (d'où leur terminologie). Mais, partant toujours d'une même catégorie monoïdale  $\mathbb{V}$ , il y a d'autres façon d'enrichir une catégorie comme par exemple en faisant opérer  $\mathbb{V}$  sur cette catégorie (à la façon d'un monoïde opérant sur un ensemble). Ce concept, moins connu, appelé "Action à gauche de  $\mathbb{V}$  sur une catégorie" (voir [1]), ou encore " $\mathbb{V}$ -module" (voir [5]) ou "catégorie  $\mathbb{V}$ -tensorisée" (voir [4]) n'est pas sans rapport avec les catégories  $\mathbb{V}$ -enrichies et l'on peut passer d'un concept à l'autre selon les propriétés "universelles" de ceux-ci.

Mais avant d'aborder techniquement ces questions dans les chapitres qui vont suivre il est important de préciser un peu ce que l'on veut dire.

• (*Partie I*) — Pour une catégorie enrichie  $\mathcal{C}$  dans une catégorie monoïdale  $\mathbb{V} = (\underline{V}, I, \otimes, \dots)$  deux éventualités s'offrent à elle. Elle peut être "à tenseurs" ou "à cotenseurs".

— Si on envisage la première possibilité, on constate que  $\mathbb{V}$  se met à opérer (à gauche) sur la catégorie  $\underline{\mathcal{C}}$  sous-jacente à  $\mathcal{C}$ . De façon plus précise, on a un foncteur "produit tensoriel extérieur"  $\wedge : \underline{V} \times \underline{\mathcal{C}} \rightarrow \underline{\mathcal{C}}$  et deux familles naturelles de flèches  $s_X : I \wedge X \rightarrow X$  et  $am_{A,B,X} : (A \otimes B) \wedge X \rightarrow A \wedge (B \wedge X)$  (où  $\forall X \in |\underline{\mathcal{C}}|$ ,  $s_X$  est inversible) vérifiant des axiomes de cohérence copiés sur ceux des catégories monoïdales.

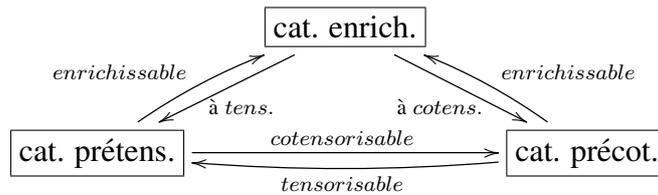
— De même, si on s'intéresse à la deuxième possibilité, c'est  $\underline{V}^{op}$  qui opère à droite sur la catégorie  $\underline{\mathcal{C}}$ . Là encore, de façon plus précise, on a un foncteur "Hom interne"  $H : \underline{\mathcal{C}} \times \underline{V}^{op} \rightarrow \underline{\mathcal{C}}$  (Notons  $X^A = H(X, A)$ ) et deux familles naturelles de flèches  $\sigma_X : X \rightarrow X^I$  et  $\alpha m_{A,B,X} : (X^B)^A \rightarrow X^{B \otimes A}$  (où  $\forall X \in |\underline{\mathcal{C}}|$ ,  $\sigma_X$  est inversible) vérifiant des axiomes de cohérence "duaux" de ceux signalés précédemment.

On a appelé catégorie  $\mathbb{V}$ -prétensorisée une catégorie quelconque  $\underline{E}$  munie d'un foncteur  $\wedge : \underline{V} \times \underline{E} \rightarrow \underline{E}$  et de deux familles de flèches  $(s_X)$  et  $(am_{A,B,X})$  comme ci-dessus, vérifiant les axiomes de cohérence signalés plus haut. De même, on a appelé catégorie  $\mathbb{V}$ -précotensorisée une catégorie

quelconque  $\underline{E}$  munie d'un foncteur  $H : \underline{E} \times \underline{V}^{op} \rightarrow \underline{E}$  et de deux familles de flèches  $(\sigma_X)$  et  $(\alpha_{m_{A,B,X}})$  comme ci-dessus, vérifiant les axiomes de cohérence comme signalés précédemment.

Mais, chose surprenante, ces deux structures, la prétensorisée et la précotensorisée, n'ont pas oublié le caractère enrichi dont elles sont issues. En effet, si pour une catégorie  $\mathbb{V}$ -prétensorisée  $\underline{E}$ , on nomme *enrichissable* celle pour laquelle, pour tout  $X$  de  $|\underline{E}|$  le foncteur  $(-) \wedge X : \underline{V} \rightarrow \underline{E}$  admet un adjoint à droite, ou si pour une catégorie  $\mathbb{V}$ -précotensorisée  $\underline{E}$ , on nomme aussi *enrichissable*, celle pour laquelle, pour tout  $X$  de  $|\underline{E}|$  le foncteur  $X^{(-)} : \underline{V}^{op} \rightarrow \underline{E}$  admet un adjoint à gauche, alors dans chaque cas on construit canoniquement une catégorie enrichie  $\mathcal{E}$  sur  $\mathbb{V}$  telle que  $\underline{\mathcal{E}} \simeq \underline{E}$ . De la même façon, les caractères précotensorisée ou prétensorisée sont aussi présent potentiellement pour les catégories  $\mathbb{V}$ -prétensorisées ou  $\mathbb{V}$ -précotensorisées. En effet,  $\mathbb{E} = (\underline{E}, \wedge, \dots)$  étant une catégorie  $\mathbb{V}$ -prétensorisée, si on convient d'appeler *cotensorisable* celle pour lequel, pour tout  $A$  de  $|\underline{V}|$  le foncteur  $A \wedge (-) : \underline{E} \rightarrow \underline{E}$  admet un adjoint à droite, on construit, dans cette situation, une structure précotensorisée canonique sur  $\underline{E}$ . De même, pour une catégorie  $\mathbb{V}$ -précotensorisée  $\mathbb{E} = (\underline{E}, H, \dots)$ , on dit qu'elle est *tensorisable* si pour tout  $A$  de  $|\underline{V}|$  le foncteur  $(-)^A : \underline{E} \rightarrow \underline{E}$  admet un adjoint à gauche. Là encore on construit, dans cette catégorie, une structure prétensorisée canonique sur  $\underline{E}$ .

On résume tout ce qui vient d'être dit avec le schéma suivant :



En observant ce schéma on ne peut que constater que les trois concepts précédents décrivent en fait une même "idée" sous différentes formes (ou présentations).

Cette impression se confirme encore en constatant qu'on peut faire des morphismes "mixtes" c'est-à-dire entre deux présentations différentes. On donne le cas particulier qui suit, qu'on a appelé une  $\mathbb{V}$ -passerelle  $P$  entre une catégorie  $\mathbb{V}$ -enrichie  $\mathcal{C}$  et une catégorie  $\mathbb{V}$ -prétensorisée  $\mathbb{E}$ . C'est la donnée

d'une application  $|P| : |\mathcal{C}| \rightarrow |\mathbb{E}|$  et d'une famille de flèches de  $\mathbb{E}$ ,

$$(\mathcal{C}(X, Y) \wedge |P|(X) \rightarrow |P|(Y))$$

qui, comme les foncteurs que ces donnés généralisent, préservent l'identité et commutent avec la composition (voir I, section 5).

• (*Partie II*) — À ce stade de réflexion sur cette "idée d'enrichissement" commune aux trois concepts précédemment étudiés il était impératif de lui donner un sens mathématique. Un nouveau concept s'impose. Nous lui avons donné le nom de *catégorie mutante* (sur  $\mathbb{V}$ ) (René Guitart l'avait appelé *bicatégorie  $\mathbb{V}$ -graduée* voir [2]). En voici une définition précise :

C'est la donnée  $\mathcal{B}$  :

— d'une bicatégorie  $\mathbb{B}$ ,

— d'un morphisme strict de bicatégorie  $U : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{V}$  (où la catégorie monoïdale  $\mathbb{V}$  est vue comme une bicatégorie à un objet  $\star$ , ses flèches (resp. 2-cellules) sont les objets (resp. flèches) de la catégorie monoïdale).

Ces deux données sont astreintes à vérifier l'axiome suivant : Pour tout  $X, Y \in |\mathbb{B}|$ , le foncteur  $U_{XY} : \mathbb{B}(X, Y) \rightarrow \mathbb{V}(UX, UY) = \mathbb{V}(\star, \star) = \underline{V}$  est une fibration discrète.

Comme on l'espérait, les catégories  $\mathbb{V}$ -enrichies, les catégories  $\mathbb{V}$ -prétensorisées et les catégories  $\mathbb{V}$ -précotensorisées forment des classes d'exemples de catégories mutantes. On dit de celles-ci que ce sont des exemples de base de catégories mutantes. Mais chose étonnante, on montre que toute catégorie fibrée  $\mathbb{E}$  sur une catégorie de base  $\underline{B}$  à produits fibrés donne à chacune de ses fibres  $\mathbb{E}_B$  une structure de catégorie mutante sur la catégorie cartésienne (donc monoïdale)  $\underline{B}/B$ .

L'étude des catégories mutantes apporte aussi son lot de surprises. On construit ainsi sur chacune d'elle une composition (dite) stricte entre les flèches de  $\underline{B}$  (ce sont les flèches de  $\mathbb{B}$  qui s'envoient sur  $I$  par  $U$ ) avec les autres flèches de  $\mathbb{B}$  (composition à droite ou à gauche). En effet cette composition est strictement associative et a strictement une unité à droite et à gauche. En particulier  $\underline{B}$  forme une catégorie qu'on appelle la catégorie sous-jacente à  $\mathcal{B}$ . Puis on construit canoniquement un foncteur  $Tri : \underline{V}^{op} \times \underline{B}^{op} \times \underline{B} \rightarrow \mathbb{E}ns$ . Ce foncteur  $Tri$  va permettre de définir trois spécificités possibles pour une catégorie mutante (on les appelle des "saveurs" en prenant exemple sur la physique des particules). Ces trois saveurs sont l'*enrichie*, la *tensorisée* et

la *cotensorisée*. Évidemment, les trois exemples de base de catégories mutantes ont des saveurs homonymes. De façon précise. Après avoir remarqué que les catégories  $\mathbb{V}$ -enrichies, les  $\mathbb{V}$ -tensorisées, les  $\mathbb{V}$ -cotensorisées et les mutantes sur  $\mathbb{V}$ , forment chacune d'elles une 2-catégorie notée respectivement  $\mathbb{V}\text{-Cat}$ ,  $\mathbb{V}\text{-Pretens}$ ,  $\mathbb{V}\text{-Precot}$  et  $\text{Cat}\mu(\mathbb{V})$ , on construit des plongements 2-pleinement fidèles  $\mu_e : \mathbb{V}\text{-Cat} \rightarrow \text{Cat}\mu(\mathbb{V})$ ,  $\mu_t : \mathbb{V}\text{-Pretens} \rightarrow \text{Cat}\mu(\mathbb{V})$  et  $\mu_c : \mathbb{V}\text{-Precot} \rightarrow \text{Cat}\mu(\mathbb{V})$ . On plonge aussi les  $\mathbb{V}$ -passerelles dans  $\text{Cat}\mu(\mathbb{V})$ . Remarquons enfin que, pour une catégorie fibrée  $\mathbb{E}$  sur une catégorie  $\underline{B}$  à produits fibrés, alors  $\mathbb{E}$  est localement petite ssi pour tout  $B \in |\underline{B}|$ ,  $\mathbb{E}_B$ , en tant que catégorie mutante sur  $\underline{B}/B$ , est de saveur enrichie.

### Remerciements

Je voudrais remercier l'université catholique de Louvain la Neuve de m'avoir permis d'exposer pour la première fois, en mars 2019, les grandes lignes de ce travail.

Je tiens aussi à remercier E. Dubuc qui, après m'avoir fait découvrir l'article de X.Rochard, m'a signalé sa définition des  $\mathbb{V}$ -modules à *Hom* internes. En réalisant que ceux-ci ne correspondaient pas avec les catégories  $\mathbb{V}$ -tensorisées enrichissables cela m'a incité à développer la théorie des catégories  $\mathbb{V}$ -tensorisées pour aboutir au travail présenté ici.

## PARTIE I

### VUE D'ENSEMBLE DE L'ENRICHISSEMENT

#### Sommaire

1. Catégories enrichies à tenseurs
2. Les catégories  $\mathbb{V}$ -prétensorisées
3. Les catégories  $\mathbb{V}$ -précotensorisées
4. Réduction des catégories  $\mathbb{V}$ -précotensorisées
5. Les passerelles

#### 1. Catégories enrichies à tenseurs

Fixons au départ une catégorie monoïdale  $\mathbb{V} = (\underline{V}, I, \otimes, u_g, u_d, ass)$  et donnons nous, pour commencer, une catégorie enrichie  $\mathcal{C}$  dans  $\mathbb{V}$ . Notons  $\underline{\mathcal{C}}$  la catégorie sous-jacente à  $\mathcal{C}$  et :

Pour chaque  $X \in |\mathcal{C}|$ ,  $\underline{y}^X : \underline{\mathcal{C}} \rightarrow \underline{V}$  et  $\underline{y}_X : \underline{\mathcal{C}}^{op} \rightarrow \underline{V}$  les foncteurs définis...  
 - sur un objet  $Y \in |\underline{\mathcal{C}}|$ , par  $\underline{y}^X(Y) = \mathcal{C}(X, Y)$  et  $\underline{y}_X(Y) = \mathcal{C}(Y, X)$ .  
 - sur une flèche  $f : Y \rightarrow Y'$  de  $\mathcal{C}$  (soit une flèche  $f : I \rightarrow \mathcal{C}(Y, Y')$  de  $\mathbb{V}$ ),  
 $\underline{y}^X(f)$  est le composé suivant :

$$\mathcal{C}(X, Y) \xrightarrow{u_g} I \otimes \mathcal{C}(X, Y) \xrightarrow{f \otimes Id} \mathcal{C}(Y, Y') \otimes \mathcal{C}(X, Y) \xrightarrow{comp} \mathcal{C}(X, Y').$$

Similairement  $\underline{y}_X(f)$  est le composé suivant :

$$\mathcal{C}(Y', X) \xrightarrow{u_d} \mathcal{C}(Y', X) \otimes I \xrightarrow{Id \otimes f} \mathcal{C}(Y', X) \otimes \mathcal{C}(Y, Y') \xrightarrow{comp} \mathcal{C}(Y, X).$$

Rappelons maintenant les définitions suivantes :

**Définition 1.1.** : 1) On dit que  $\mathcal{C}$  est à *tenseurs* si pour tout  $X \in |\mathcal{C}|$  le foncteur  $\underline{y}^X : \underline{\mathcal{C}} \rightarrow \underline{V}$  admet un adjoint à gauche (On fixe  $(-) \wedge X : \underline{V} \rightarrow \underline{\mathcal{C}}$  un adjoint à gauche et  $\eta^X : Id_{\underline{V}} \rightarrow \underline{y}^X(- \wedge X)$  une unité de l'adjonction).  
 2) On dit que  $\mathcal{C}$  est à *cotenseurs* si pour tout  $X \in |\mathcal{C}|$  le foncteur  $\underline{y}_X : \underline{\mathcal{C}}^{op} \rightarrow \underline{V}$  admet un adjoint à gauche (On fixe  $X^{(-)} : \underline{V} \rightarrow \underline{\mathcal{C}}^{op}$  un adjoint à gauche et  $\varepsilon^X : Id_{\underline{V}} \rightarrow \underline{y}_X(X^{(-)})$  une unité de l'adjonction).

**Proposition 1.2.** : On suppose  $\mathcal{C}$  à tenseurs. Alors on peut munir  $\underline{\mathcal{C}}$  des données suivantes:

- 1) Un foncteur  $\wedge : \underline{V} \times \underline{\mathcal{C}} \rightarrow \underline{\mathcal{C}}$ ,
- 2) Deux familles naturelles de flèches  $(I \wedge X \xrightarrow{s_X} X)_{X \in |\mathcal{C}|}$  et  $((A \otimes B) \wedge X \xrightarrow{am_{A,B,X}} A \wedge (B \wedge X))_{(A,B,X) \in |\underline{V} \times \underline{V} \times \underline{\mathcal{C}}|}$ .

Ces données satisfont les propriétés suivantes :

- a) Les flèches  $s_X$  sont inversibles.
- b) Pour tout  $A \in |\underline{V}|$  et  $X \in |\mathcal{C}|$  les deux triangles suivants commutent:

$$\begin{array}{ccc} (I \otimes A) \wedge X & \xrightarrow{am} & I \wedge (A \wedge X) \\ & \searrow u_g \wedge Id & \swarrow s \\ & A \wedge X & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} (A \otimes I) \wedge X & \xrightarrow{am} & A \wedge (I \wedge X) \\ & \searrow u_d \wedge Id & \swarrow Id \wedge s \\ & A \wedge X & \end{array}$$

c) Pour tout  $A, B, C \in |\underline{V}|$  et  $X \in |\underline{C}|$  le diagramme suivant commute:

$$\begin{array}{ccc}
 ((A \otimes B) \otimes C) \wedge X & \xrightarrow{\text{ass} \wedge Id} & (A \otimes (B \otimes C)) \wedge X \\
 \downarrow am & & \downarrow am \\
 (A \otimes B) \wedge (C \wedge X) & & A \wedge ((B \otimes C) \wedge X) \\
 \searrow am & & \swarrow Id \wedge am \\
 & A \wedge (B \wedge (C \wedge X)) &
 \end{array}$$

*Preuve* : - Commençons par construire le foncteur  $\wedge : \underline{V} \times \underline{C} \rightarrow \underline{C}$ . On connaît déjà pour chaque  $X \in |\underline{C}|$ ,  $(-) \wedge X : \underline{V} \rightarrow \underline{C}$ . Définissons maintenant, pour chaque  $A \in |\underline{V}|$ ,  $A \wedge (-) : \underline{C} \rightarrow \underline{C}$ . Sur une flèche  $x : X \rightarrow X'$  de  $\underline{C}$ ,  $Id \wedge x : A \wedge X \rightarrow A \wedge X'$  est l'unique flèche de  $\underline{C}$  qui rend le carré suivant commutatif dans  $\underline{V}$ :

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{\eta_A^{X'}} & \mathcal{C}(X', A \wedge X') \\
 \eta_A^X \downarrow & & \downarrow \underline{y}_{A \wedge X'}(x) \\
 \mathcal{C}(X, A \wedge X) & \xrightarrow{\underline{y}^X(Id \wedge x)} & \mathcal{C}(X, A \wedge X')
 \end{array}$$

$\wedge$  se définit alors sur une flèche quelconque  $(a, x) : (A, X) \rightarrow (A', X')$  en posant

$$\begin{aligned}
 A \wedge X & \xrightarrow{a \wedge x} A' \wedge X' = A \wedge X \xrightarrow{a \wedge Id} A' \wedge X \xrightarrow{Id \wedge x} A' \wedge X' = \\
 A \wedge X & \xrightarrow{Id \wedge x} A \wedge X' \xrightarrow{a \wedge Id} A' \wedge X'
 \end{aligned}$$

Cette dernière identité résulte des identités suivantes :

$\underline{y}^X(Id \wedge x) \cdot \underline{y}^X(a \wedge Id) \cdot \eta_A^X = \underline{y}_{A' \wedge X'}(x) \cdot \eta_{A'}^{X'} \cdot a = \underline{y}^X(a \wedge Id) \cdot \underline{y}^X(Id \wedge x) \cdot \eta_A^X$   
où la seconde identité résulte de cette autre identité dénotée (I1) : pour tout  $(x, y) : (X, Y) \rightarrow (X', Y')$  de  $\underline{C} \times \underline{C}$  :

$$\underline{y}_{Y'}(x) \cdot \underline{y}^{X'}(y) \stackrel{I1}{=} \underline{y}^X(y) \cdot \underline{y}_Y(x)$$

La functorialité de  $\wedge$  résulte de celles de  $(-) \wedge X$  et  $A \wedge (-)$  (La functorialité de  $A \wedge (-)$  résulte aussi de l'identité (I1) ci-dessus).

- Pour construire  $s_X$ , pour chaque  $X \in |\underline{C}|$ , et montrer que c'est un isomorphisme, il suffit de montrer que  $(X, id_X : I \rightarrow \mathcal{C}(X, X))$  est un objet libre

associé à  $I$ , pour le foncteur  $\underline{y}^X$ .  $s_X : I \wedge X \rightarrow X$  est alors l'unique flèche de  $\underline{\mathcal{C}}$  qui vérifie l'identité  $\underline{y}^X(s_X) \cdot \eta_I^X = id_X$ . La naturalité de  $s_X$  en  $X$  se montre sans difficulté.

- Pour chaque  $(A, B, X) \in |\underline{V} \times \underline{V} \times \underline{\mathcal{C}}|$ ,

$am_{A,B,X} : (A \otimes B) \wedge X \rightarrow A \wedge (B \wedge X)$  est l'unique flèche de  $\underline{\mathcal{C}}$  qui fait commuter le carré suivant dans  $\underline{V}$  :

$$\begin{array}{ccc} A \otimes B & \xrightarrow{\eta_A^{B \wedge X} \otimes \eta_B^X} & \mathcal{C}(B \wedge X, A \wedge (B \wedge X)) \otimes \mathcal{C}(X, B \wedge X) \\ \eta_{A \otimes B}^X \downarrow & & \downarrow \text{comp} \\ \mathcal{C}(X, (A \otimes B) \wedge X) & \xrightarrow{\underline{y}^X(am_{A,B,X})} & \mathcal{C}(X, A \wedge (B \wedge X)) \end{array}$$

- La naturalité de  $am$  se montre sur les trois types de flèche suivants :

$(a, Id, Id)$ ,  $(Id, b, Id)$ ,  $(Id, Id, x)$  où  $a, b$  sont dans  $\underline{V}$  et  $x$  est dans  $\underline{\mathcal{C}}$ . On utilise pour chacun d'eux les identités suivantes (I2), (I3) et (I4), où

$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} T$  sont des flèches de  $\underline{\mathcal{C}}$  :

$$comp_{X,Y,T}(\underline{y}^Y(h) \otimes Id_{\mathcal{C}(X,Y)}) \stackrel{I2}{=} \underline{y}^X(h) \cdot comp_{X,Y,Z}$$

$$comp_{X,Z,T}(Id_{\mathcal{C}(Z,T)} \otimes \underline{y}^X(g)) \stackrel{I3}{=} comp_{X,Y,T}(\underline{y}_T(g) \otimes Id_{\mathcal{C}(X,Y)})$$

$$comp_{X,Z,T}(Id_{\mathcal{C}(Z,T)} \otimes \underline{y}_Z(f)) \stackrel{I4}{=} \underline{y}_T(f) \cdot comp_{Y,Z,T}$$

.. Pour le premier type de flèche, cela résulte des identités suivantes :

$$\underline{y}^X(am) \cdot \underline{y}^X((a \otimes Id) \wedge Id) \cdot \eta_{A \otimes B}^X = comp \cdot (\eta_A^{B \wedge X} \otimes \eta_B^X) \cdot (a \otimes Id) = \underline{y}^X(a \wedge (Id \wedge Id)) \cdot \underline{y}^X(am) \cdot \eta_{A \otimes B}^X \text{ où la seconde identité résulte de (I2).}$$

.. Pour le second type de flèche, cela résulte de :

$$\underline{y}^X(am) \cdot \underline{y}^X((Id \otimes b) \wedge Id) \cdot \eta_{A \otimes B}^X = comp \cdot (\eta_A^{B' \wedge X} \otimes \eta_{B'}^X) \cdot (Id \otimes b) = \underline{y}^X(Id \wedge (b \wedge Id)) \cdot \underline{y}^X(am) \cdot \eta_{A \otimes B}^X \text{ où la seconde identité résulte de (I2) et (I3).}$$

.. Pour le troisième type de flèche, cela résulte de :

$$\underline{y}^X(am) \cdot \underline{y}^X(Id \wedge x) \cdot \eta_{A \otimes B}^X = \underline{y}_{A \wedge (B \wedge X')}^X(x) \cdot comp \cdot (\eta_A^{B \wedge X'} \otimes \eta_B^{X'}) = \underline{y}^X(Id \wedge (Id \wedge x)) \cdot \underline{y}^X(am) \cdot \eta_{A \otimes B}^X \text{ où la première identité résulte de (I1) et la seconde identité résulte de (I2), (I3) et (I4).}$$

- La commutation des triangles du (b):

.. Pour le premier triangle, cela résulte des identités suivantes :

$\underline{y}^X(u_g \wedge Id) \cdot \eta_{I \otimes A}^X = \eta_A^X \cdot u_g = \underline{y}^X(s) \cdot \underline{y}^X(am) \cdot \eta_{I \otimes A}^X$  où la seconde identité résulte de (I2).

.. Pour le deuxième triangle, cela résulte des identités suivantes :

$\underline{y}^X(u_d \wedge Id) \cdot \eta_{A \otimes I}^X = \eta_A^X \cdot u_d = \underline{y}^X(Id \wedge s) \cdot \underline{y}^X(am) \cdot \eta_{A \otimes I}^X$  où la seconde identité résulte de (I2).

- Pour montrer la commutation du pentagone du (c). Notons  $f_g$  (resp.  $f_d$ ) la flèche composée de gauche (resp. droite) provenant du pentagone. L'identité  $f_g = f_d$  va résulter des identités successives suivantes, avec  $T = C \wedge X$ , et  $U = B \wedge (C \wedge X)$ ,  $V = A \wedge (B \wedge (C \wedge X))$ ,  $W = (B \otimes C) \wedge X$  :

$\underline{y}^X(f_d) \cdot \eta_{(A \otimes B) \otimes C}^X =$   
 $comp_{X,U,V} \cdot (Id_{C(U,V)} \otimes \underline{y}^X(am_{B,C,X})) \cdot (\eta_A^U \otimes \eta_{B \otimes C}^X) \cdot ass_{A,B,C} =$   
 $comp_{X,T,V} \cdot (comp_{T,U,V} \otimes Id_{C(X,T)}) \cdot ((\eta_A^U \otimes \eta_B^T) \otimes \eta_C^X) = \underline{y}^X(f_g) \cdot \eta_{(A \otimes B) \otimes C}^X$   
 où la première identité résulte de (I2) et (I3) et la troisième identité résulte de (I2).

**Proposition 1.3.** : Soient  $\mathcal{C}, \mathcal{C}' \in |\mathbb{V}\text{-Cat}|$ . On suppose  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{C}'$  à tenseurs.

- 1) On se donne en plus un foncteur enrichi  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ . Notons  $\underline{F} : \underline{\mathcal{C}} \rightarrow \underline{\mathcal{C}'}$  son foncteur sous-jacent (on utilise aussi les données  $\wedge, s$  et  $am$  construites à la proposition précédente).  $\underline{F}$  est alors muni d'une famille naturelle  $(\phi_{A,X} : A \wedge F(X) \rightarrow F(A \wedge X))_{(A,X) \in |\underline{\mathcal{V}} \times \underline{\mathcal{C}}|}$  satisfaisant les conditions :
- (Ms) Pour tout  $X \in |\mathcal{C}|$  le triangle suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} I \wedge F(X) & \xrightarrow{\phi_{I,X}} & F(I \wedge X) \\ & \searrow s_{FX} & \swarrow F(s_X) \\ & FX & \end{array}$$

- (Mam) Pour tout  $A, B \in |\underline{\mathcal{V}}|$  et  $X \in |\mathcal{C}|$ , le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} (A \otimes B) \wedge FX & \xrightarrow{am} & A \wedge (B \wedge FX) \\ \phi \downarrow & & \downarrow Id \wedge \phi \\ F((A \otimes B) \wedge X) & & A \wedge F(B \wedge X) \\ & \searrow \underline{F}(am) & \swarrow \phi \\ & F(A \wedge (B \wedge X)) & \end{array}$$

2) On se donne cette fois, une transformation naturelle enrichie  $t : F \rightarrow F' : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ . Alors, la transformation naturelle sous-jacente vérifie la condition suivante :

(C $\phi$ ) Pour tout  $A \in |\underline{V}|$  et  $X \in |\mathcal{C}|$ , le carré suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} A \wedge FX & \xrightarrow{Id \wedge t_X} & A \wedge F'X \\ \phi \downarrow & & \downarrow \phi' \\ F(A \wedge X) & \xrightarrow{t_{A \wedge X}} & F'(A \wedge X) \end{array}$$

Preuve : 1) Soient  $A \in |\underline{V}|$  et  $X \in |\mathcal{C}|$ . On définit  $\phi_{A,X}$  comme l'unique flèche  $A \wedge F(X) \rightarrow F(A \wedge X)$  dans  $\underline{\mathcal{C}'}$  qui rend commutatif le carré suivant dans  $\mathbb{V}$  :

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\eta_A^X} & \mathcal{C}(X, A \wedge X) \\ \eta_A^{FX} \downarrow & & \downarrow F_{X, A \wedge X} \\ \mathcal{C}'(FX, A \wedge FX) & \xrightarrow{\underline{y}^{FX}(\phi_{A,X})} & \mathcal{C}'(FX, F(A \wedge X)) \end{array}$$

- La naturalité de  $\phi$  se montre sur les deux types de flèche suivants :  $(a, Id)$  et  $(Id, x)$  où  $a$  est dans  $\underline{V}$  et  $x$  est dans  $\underline{\mathcal{C}}$ . On utilise pour chacun d'eux les identités suivantes, (J1) et (J2), où  $X \xrightarrow{x} Y \xrightarrow{y} Z$  sont dans  $\mathcal{C}$  :

$$F_{X,Z} \cdot \underline{y}^X(y) \stackrel{J1}{=} \underline{y}^{FX}(Fy) \cdot F_{X,Y}$$

$$F_{X,Z} \cdot \underline{y}_Z(x) \stackrel{J2}{=} \underline{y}_{FZ}(Fx) \cdot F_{Y,Z}$$

Plus précisément,

.. Pour le premier type de flèche, cela résulte des identités suivantes :

$$\underline{y}^{FX}(F(a \wedge Id)) \cdot \underline{y}^{FX}(\phi) \cdot \eta_A^{FX} = F_{X, A \wedge X} \cdot \eta_A^X \cdot a = \underline{y}^{FX}(\phi) \cdot \underline{y}^{FX}(a \wedge Id) \cdot \eta_A^{FX}$$

où la première identité résulte de (J1).

.. Pour le second type de flèche, cela résulte de :

$$\underline{y}^{FX}(F(Id \wedge x)) \cdot \underline{y}^{FX}(\phi) \cdot \eta_A^{FX} = F_{X, A \wedge X'} \cdot \underline{y}_{A \wedge X'}(x) \cdot \eta_A^{X'} = \underline{y}^{FX}(\phi) \cdot \underline{y}^{FX}(Id \wedge F(x)) \cdot \eta_A^{FX}$$

où la première identité résulte de (J1) et la seconde identité résulte de (I1) et (J2).

- La propriété (Ms) résulte des l'identités suivantes :

$\underline{y}^{FX}(\underline{F}(s_X)).\underline{y}^{FX}(\phi_{I,X}).\eta_I^{FX} = id_{FX} = \underline{y}^{FX}(s_{FX}).\eta_I^{FX}$ , où la première identité résulte de (J1).

- La propriété (Mam) résulte des identités suivantes :

$\underline{y}^{FX}(\underline{F}(am)).\underline{y}^{FX}(\phi).\eta_{A \otimes B}^{FX} =$   
 $comp.(\underline{y}^{F(B \wedge X)}(\phi) \otimes \underline{y}^{FX}(\phi)).(\eta_A^{F(B \wedge X)} \otimes \eta_B^{FX}) =$   
 $\underline{y}^{FX}(\phi).\underline{y}^{FX}(Id \wedge \phi).\underline{y}^{FX}(am).\eta_{A \otimes B}^{FX}$ , où la première identité résulte de (J1) et la seconde identité résulte de (I1), (I2), (I3).

2) La commutation de (Cφ) résulte des l'identités suivantes.

$\underline{y}^{FX}(t_{A \wedge X}).\underline{y}^{FX}(\phi).\eta_A^{FX} = \underline{y}_{F'(A \wedge X)}^{F'X}(t_X).\underline{y}^{F'X}(\phi').\eta_A^{F'X} =$   
 $\underline{y}^{F'X}(\phi').\underline{y}^{F'X}(Id \wedge t_X).\eta_A^{F'X}$  où la seconde identité résulte de (I1).

• Ces deux propositions nous conduisent à donner les définitions suivantes :

**Définition 1.4.** :1) On appelle catégorie  $\mathbb{V}$ -prétensorisée (à gauche) la donnée  $\mathbb{E}$  :

- d'une catégorie  $\underline{E}$ ,
- d'un foncteur  $\wedge : \underline{V} \times \underline{E} \rightarrow \underline{E}$ ,
- de deux familles de flèches :  $(I \wedge X \xrightarrow{s_X} X)_{X \in |\underline{E}|}$  et  $((A \otimes B) \wedge X \xrightarrow{am_{A,B,X}} A \wedge (B \wedge X))_{(A,B,X) \in |\underline{V} \times \underline{V} \times \underline{E}|}$ .

Ces données sont astreintes à satisfaire les propriétés (a), (b) et (c) de la proposition 1.2 . Lorsque, pour tout  $A, B, X$ ,  $am_{A,B,X}$  est inversible, on dit que  $\mathbb{E}$  est  $\mathbb{V}$ -tensorisée (voir [4] et [5]).

2)  $\mathbb{E}, \mathbb{E}'$  étant des catégories  $\mathbb{V}$ -prétensorisées, un morphisme  $\mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}'$  est la donnée :

- d'un foncteur  $F : \underline{E} \rightarrow \underline{E}'$ ,
- d'une famille de flèches  $(\phi_{A,X} : A \wedge F(X) \rightarrow F(A \wedge X))_{(A,X) \in |\underline{V} \times \underline{E}|}$  de  $\mathbb{E}'$ , qui est naturelle en  $(A, X)$ .

Ces données doivent satisfaire les propriétés (Ms) et (Mam) de la proposition 1.3.

3)  $(F, \phi), (F', \phi') : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}'$  étant deux morphismes entre catégories  $\mathbb{V}$ -prétensorisées, un 2-morphisme  $t : (F, \phi) \rightarrow (F', \phi')$  est la donnée d'une transformation naturelle  $t : F \rightarrow F'$  vérifiant la propriété (Cφ) de la proposition 1.3.

**Remarque 1.5.** : X. Rochard définit aussi des morphismes entre ses  $\mathbb{V}$ -modules (sa terminologie pour les catégories  $\mathbb{V}$ -tensorisées). Ils correspon-

dent aux morphismes  $(F, \phi)$  entre catégories  $\mathbb{V}$ -tensorisées pour lesquels la transformation naturelle  $\phi$  est inversible (voir [5]).

• À partir de ces données on construit une 2-catégorie, notée  $\mathbb{V}\text{-Pretens}$ . Les propositions précédentes nous permettent de construire un 2-foncteur  $\Phi : \mathbb{V}\text{-ET} \rightarrow \mathbb{V}\text{-Pretens}$ , où  $\mathbb{V}\text{-ET}$  est la sous-2-catégorie pleine de  $\mathbb{V}\text{-Cat}$  formée des catégories enrichies à tenseurs (On note de même  $\mathbb{V}\text{-EC}$  la sous-2-catégorie pleine de  $\mathbb{V}\text{-Cat}$  formée des catégories enrichies à co-tenseurs). En fait, la vérification que  $\mathbb{V}\text{-Pretens}$  est une 2-catégorie et que  $\Phi$  est un 2-foncteur est quasi-immédiate, à l'exception de la commutation de  $\Phi$  avec la composition. Dans ce cas, si  $\mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{C}' \xrightarrow{F'} \mathcal{C}''$  sont des flèches de  $\mathbb{V}\text{-ET}$ , alors l'identité  $\Phi(F'.F) = \Phi(F').\Phi(F)$  résulte de l'identité suivante :  $\underline{y}^{F'.FX}(\underline{F}\phi) \cdot \underline{y}^{F'.FX}(\phi'_{A,FX}) \cdot \eta_A^{F'.FX} = F'_{FX, F(A \wedge X)} \cdot F_{X, A \wedge X} \cdot \eta_A^X$  où on utilise l'identité (J1).

Nous allons maintenant, dans la section suivante, nous efforcer de suivre une démarche allant en sens inverse.

## 2. Les catégories $\mathbb{V}$ -prétensorisées

Les catégories  $\mathbb{V}$ -prétensorisées (Déf. 1.4) généralisent donc les catégories  $\mathbb{V}$ -tensorisées (voir [5] et [4]).

**Exemple 2.1.** :1) Nous venons de voir que toute catégorie  $\mathbb{V}$ -enrichie à tenseurs génère un exemple de catégorie  $\mathbb{V}$ -prétensorisée. À cette occasion, donnons un exemple de catégorie  $\mathbb{V}$ -enrichie  $\mathcal{C}$  telle que  $\Phi(\mathcal{C})$  n'est pas  $\mathbb{V}$ -tensorisée (i.d. ses flèches  $am_{A,B,X}$  ne sont pas nécessairement inversibles dans  $\underline{\mathcal{C}}$ ) :

- Partons d'un espace topologique  $E$ . alors  $\mathcal{P}(E)$  (l'ensemble des parties de  $E$ ) est un ensemble ordonné. On peut donc le voir comme une catégorie qui est même à produits (avec l'intersection) donc monoïdale. L'ensemble  $\mathcal{F}$  des parties fermées de  $E$  peut lui aussi être vu comme une catégorie. C'est même une catégorie enrichie dans  $\mathcal{P}(E)$  en posant pour  $F, F' \in \mathcal{F}$ ,  $\mathcal{F}(F, F') = F^c \cup F'$  (où  $F^c$  est le complémentaire de  $F$  dans  $E$ ). Cette catégorie enrichie est à tenseurs et on voit que pour tout  $A \in \mathcal{P}(E)$  et  $F \in \mathcal{F}$ ,  $A \wedge F = \overline{A \cap F}$  (l'adhérence de  $A \cap F$  dans  $E$ ).  $\mathcal{F}$  muni de  $\wedge : \mathcal{P}(E) \times \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$  est donc

une catégorie prétensorisée où  $s_F = Id$ . Par contre pour  $A, B \in \mathcal{P}(E)$  et  $F \in \mathcal{F}$ , l'inclusion  $(A \cap B) \wedge F \subset A \wedge (B \wedge F)$  qui n'est autre que la flèche  $am_{A,B,F}$ , n'est pas toujours un isomorphisme (ici une identité). Il suffit de prendre  $E = \mathbb{R}$  (muni de la topologie usuelle).  $A = \mathbb{Q}$ ,  $B = \mathbb{Q}^c$  et  $F = [0, 1]$ . Alors  $(A \cap B) \wedge F = \emptyset$  et  $A \wedge (B \wedge F) = [0, 1]$ .

2) Soit  $\mathbb{B}$  une bicatégorie. Fixons deux objets  $X, Y \in |\mathbb{B}|$ . Alors  $\mathbb{B}(Y, X)$  a une structure de catégorie. Notons la  $\underline{E}$  (où la composition provient de la composition verticale de  $\mathbb{B}$ ) et  $\mathbb{B}(X, X)$  a une structure de catégorie monoïdale. Notons-la  $\mathbb{V}$  (où le produit tensoriel provient de la composition horizontale de  $\mathbb{B}$ ). Le foncteur  $\wedge : \underline{V} \times \underline{E} \rightarrow \underline{E}$  provient lui aussi de la composition horizontale de  $\mathbb{B}$ . La transformation naturelle  $s$  est une restriction du  $u_g$  de  $\mathbb{B}$  et  $am$  est une restriction de l'associativité de  $\mathbb{B}$ . On obtient ainsi une catégorie  $\mathbb{V}$ -tensorisée.

3) Un cas particulier de l'exemple précédent est obtenu en prenant pour  $\mathbb{B}$  une catégorie monoïdale  $\mathbb{V}$  (Notons  $\star$  l'unique objet de la bicatégorie). Ainsi  $\mathbb{V}$  devient une catégorie  $\mathbb{V}$ -tensorisée en prenant  $X = Y = \star$ . On retrouve l'exemple 1 donné dans [4](2.3).

4) Un deuxième cas particulier est obtenu en prenant  $\mathbb{B} = \mathbb{C}at$ ,  $X = \underline{C}$  dans  $|\mathbb{C}at|$  et  $Y = \underline{1}$  ("la" catégorie finale). Si on identifie  $\mathbb{B}(Y, X) = [1, \underline{C}] \simeq \underline{C}$ , on retrouve l'exemple donné dans [4] (exemple 2). Cet exemple est aussi signalé dans [1].

5) Redonnons l'exemple 3 de [4](2.3).  $\underline{E}$  étant une catégorie à limites à gauche finies et  $\mathbb{M} = (M, \eta, \mu)$  une monade cartésienne sur  $\underline{E}$ . On sait que  $\underline{E}/M(1)$  peut être muni d'une structure monoïdale  $\mathbb{V}$  où  $I = (1, \eta_1)$  et pour  $(C, \pi), (C', \pi') \in |\mathbb{V}|$ ,  $(C, \pi) \otimes (C', \pi') = (\hat{C}, \hat{\pi})$  où  $\hat{C}$  est le produit fibré de  $C \xrightarrow{\pi} M(1) \xleftarrow{M!} M(C')$ , et où

$$\hat{\pi} = ( \hat{C} \xrightarrow{proj} M(C') \xrightarrow{M(\pi')} M^2(1) \xrightarrow{\mu_1} M(1) ).$$

On fait de  $\underline{E}$  une catégorie  $\mathbb{V}$ -tensorisée où pour  $(C, \pi) \in |\mathbb{V}|$  et  $X \in |\underline{E}|$ ,  $(C, \pi) \wedge X$  est le produit fibré de  $C \xrightarrow{\pi} M(1) \xleftarrow{M!} M(X)$ .

6) Soit  $\underline{B}$  une catégorie à produits fibrés et  $\mathbb{E}$  une catégorie fibrée sur  $\underline{B}$ . On suppose que pour tout  $f : X \rightarrow Y$  de  $\underline{B}$ , le foncteur changement de base  $f^* : \mathbb{E}_Y \rightarrow \mathbb{E}_X$  admet un adjoint à gauche (noté  $f_*$ ). Alors, pour tout  $B \in |\underline{B}|$ ,  $\underline{B}/B$  est une catégorie cartésienne donc monoïdale et la fibre  $\mathbb{E}_B$  a une structure de catégorie  $\underline{B}/B$ -prétensorisée, où pour  $(A, a) \in |\underline{B}/B|$  et

$X \in |\mathbb{E}_B|$  on prend  $(A, a) \wedge X = a_* a^*(X)$ .

**Remarques 2.2.** : 1) Dans l'exemple 6, la fibre  $\mathbb{E}_B$  qui est une catégorie  $\underline{B}/B$ -prétensorisée (sous les hypothèses proposées dans l'exemple) n'est pas toujours  $\underline{B}/B$ -tensorisée (comme contre-exemple on peut, en s'inspirant de l'exemple (1) précédent, considérer le foncteur  $\mathcal{P}(E)^{op} \rightarrow \underline{Cat}$ ,  $A \mapsto F(A)$  où  $E$  est un espace topologique et  $F(A)$  est l'ensemble des parties fermées de  $A$ , vu comme sous-espace topologique de  $E$ ).

2) Lorsqu'en plus la catégorie fibrée  $\mathbb{E}$  vérifie le critère de Beck, alors pour tout  $B \in |\underline{B}|$ ,  $\mathbb{E}_B$  est une catégorie  $\underline{B}/B$ -tensorisée, car  $am_{(A,f),(B',b),X}$  s'exprime à l'aide de la transformation naturelle canonique  $a_* f'^* \rightarrow f^* b_*$  résultant du carré cartésien suivant dans  $\underline{B}$  :

$$\begin{array}{ccc} A' & \xrightarrow{f'} & B' \\ a \downarrow & & \downarrow b \\ A & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

**Définition 2.3.** : On dit qu'une catégorie  $\mathbb{V}$ -prétensorisée  $\mathbb{E} = (\underline{E}, \wedge, \dots)$  est *enrichissable* si pour tout  $X \in |\underline{E}|$ , le foncteur  $(-) \wedge X : \underline{V} \rightarrow \underline{E}$  admet un adjoint à droite. On note  $(-)^X$  le choix d'un adjoint à droite et  $Ev^X : (-)^X \wedge X \rightarrow (-)$  celui d'une co-unité de cette adjonction.

• On note  $\mathbb{V}\text{-TE}$  la sous-2-catégorie pleine de  $\mathbb{V}\text{-Pretens}$  ayant pour objets les catégories  $\mathbb{V}$ -prétensorisées enrichissables. Pour avoir des exemples nous renvoyons à [4].

**Proposition 2.4.** : Si  $\mathbb{E}$  est enrichissable il existe une structure de catégorie  $\mathbb{V}$ -enrichie canonique  $\mathcal{E}$  et un isomorphisme  $\Gamma : \underline{E} \rightarrow \mathcal{E}$ .

*Preuve* : Même preuve que dans [4] (section 2) où  $\mathcal{E}(X, Y) = (-)^X(Y)$  Pour la construction de  $\Gamma$ , on a :  $|\Gamma| = Id$  et, pour toute flèche  $f : X \rightarrow Y$  de  $\underline{E}$ ,  $\Gamma(f) : I \rightarrow \mathcal{E}(X, Y)$  est l'unique flèche de  $\underline{V}$  telle que le carré suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} I \wedge X & \xrightarrow{\Gamma(f) \wedge Id} & \mathcal{E}(X, Y) \wedge X \\ s \downarrow & & \downarrow Ev \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

**Proposition 2.5.** : 1) Soient  $\mathbb{E}$  et  $\mathbb{E}'$  deux catégories  $\mathbb{V}$ -prétensorisées enrichissables et  $(F, \phi) : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}'$  un morphisme. Alors, il existe un foncteur  $\mathbb{V}$ -enrichi canonique  $\mathcal{F} : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'$ , faisant commuter le carré suivant :

$$\begin{array}{ccc} \underline{E} & \xrightarrow{F} & \underline{E}' \\ \Gamma \downarrow & & \downarrow \Gamma' \\ \underline{\mathcal{E}} & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \underline{\mathcal{E}}' \end{array}$$

où  $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{E}'$  sont les catégories  $\mathbb{V}$ -enrichies canoniques associées à  $\mathbb{E}$  et  $\mathbb{E}'$ .  
2) Soient maintenant  $(F, \phi), (F', \phi') : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}'$  deux morphismes et  $t : (F, \phi) \rightarrow (F', \phi')$  une cellule. Alors, il existe une transformation naturelle  $\mathbb{V}$ -enrichie canonique  $\theta : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}' : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'$ , vérifiant l'identité suivante :  $Id_{\Gamma'} \cdot t = \theta \cdot Id_{\Gamma}$ , où  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{F}'$  sont les foncteurs  $\mathbb{V}$ -enrichis canoniques associés à  $(F, \phi)$  et  $(F', \phi')$ .

*Preuve* : 1) Construisons  $\mathcal{F}$ . On pose  $|\mathcal{F}| = |F|$ . Puis, pour  $X, Y$  dans  $|\mathcal{E}| = |\underline{E}|$  on considère l'unique flèche  $\mathcal{F}_{XY} : \mathcal{E}(X, Y) \rightarrow \mathcal{E}'(FX, FY)$  de  $\underline{V}$  qui fait commuter le carré suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E}(X, Y) \wedge FX & \xrightarrow{\mathcal{F}_{XY} \wedge Id} & \mathcal{E}'(FX, FY) \wedge FX \\ \phi \downarrow & & \downarrow Ev \\ F(\mathcal{E}(X, Y) \wedge X) & \xrightarrow{F(Ev)} & FY \end{array}$$

On vérifie facilement que  $\mathcal{F}_{XX} \cdot id_X = id_{FX}$ . (On utilise l'axiome  $(Ms)$ ).  
Pour la vérification de l'identité :

$comp_{FX, FY, FZ} \cdot (\mathcal{F}_{YZ} \otimes \mathcal{F}_{XY}) = \mathcal{F}_{XZ} \cdot comp_{X, Y, Z}$ , on montre les identités suivantes (où  $A = \mathcal{E}(X, Y), B = \mathcal{E}(Y, Z), U = \mathcal{E}(X, Y) \wedge X$ ):

$$\begin{aligned} & Ev_{FZ}^{FX} \cdot (\mathcal{F}_{XZ} \wedge Id_{FX}) \cdot (comp_{X, Y, Z} \wedge Id_{FX}) = \\ & F(Ev_Z^Y) \cdot F(Id_A \wedge Ev_Y^X) \cdot \phi_{B, U} \cdot (Id_B \wedge \phi_{A, X}) \cdot am_{B, A, FX} = \\ & Ev_{FZ}^{FX} \cdot (comp_{FX, FY, FZ} \wedge Id_{FX}) \cdot (\mathcal{F}_{YZ} \otimes \mathcal{F}_{XY}) \wedge Id_{FX}. \end{aligned}$$

(pour la première identité on utilise  $(Mam)$ ).

La vérification de la commutation du carré proposé se fait sans difficulté.

2) Construisons  $\theta$ . Pour tout  $X \in |\mathcal{E}| = |\underline{E}|$ , on pose  $\theta_X = \Gamma(t_X)$  (voir la proposition précédente). On montre ensuite que  $\theta$  est une transformation naturelle enrichie.

Pour la vérification de l'identité :

$\underline{y}^{FX}(\theta_Y).\mathcal{F}_{XY} = \underline{y}_{F'Y}(\theta_X).\mathcal{F}'_{XY}$ , on utilise les propriétés (K1) et (K2):

$$\underline{y}^X \Gamma(f) \stackrel{K1}{=} \mathcal{E}(Id_X, f), \quad \underline{y}_X \Gamma(f) \stackrel{K2}{=} \mathcal{E}(f, Id_X),$$

pour tout  $f : Y \rightarrow Y'$  dans  $\underline{E}$ , puis on montre les identités suivantes (où  $A = \mathcal{E}(X, Y)$ ) :

$$Ev_{F'Y}^{FX}(\mathcal{E}'(Id_{FX}, t_Y) \wedge Id_{FX}).(\mathcal{F}_{XY} \wedge Id_{FX}) = F'(Ev_Y^X).t_{A \wedge X}.\phi_{A,X} = Ev_{F'Y}^{FX}(\mathcal{E}'(t_X, Id_{F'Y}) \wedge Id_{FX}).(\mathcal{F}'_{XY} \wedge Id_{FX}),$$

où pour la seconde identité on utilise (C $\phi$ ). La vérification de l'identité donnée dans l'énoncé se fait sans difficulté.

• À partir des deux propositions précédentes on construit canoniquement un 2-foncteur  $\Psi : \mathbb{V}\text{-TE} \rightarrow \mathbb{V}\text{-Cat}$  (la vérification de la 2-fonctorialité se fait sans difficulté). En fait, on constate que pour tout  $\mathbb{E} \in |\mathbb{V}\text{-TE}|$ ,  $\Psi(\mathbb{E})$  est à tenseurs. On le voit en remarquant que, pour tout  $X \in |\underline{E}|$  le triangle (T) suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} \underline{E} & \xrightarrow{\Gamma} & \underline{\mathcal{E}} \\ & \searrow \varepsilon(Id_X, -) & \swarrow \underline{y}^X \\ & \underline{V} & \end{array}$$

On peut alors restreindre  $\Psi$  à  $\mathbb{V}\text{-TE} \rightarrow \mathbb{V}\text{-ET}$ . De façon symétrique on constate que pour tout  $\mathcal{C} \in |\mathbb{V}\text{-ET}|$ ,  $\Phi(\mathcal{C})$  est enrichissable (immédiat) et donc qu'on peut aussi restreindre  $\Phi$  à  $\mathbb{V}\text{-ET} \rightarrow \mathbb{V}\text{-TE}$ .

**Proposition 2.6.** :La paire de 2-foncteurs  $\Phi$  et  $\Psi$  produit une 2-équivalence

$$\mathbb{V}\text{-ET} \cong \mathbb{V}\text{-TE}.$$

*Preuve* : 1) Pour l'isomorphie  $\Psi.\Phi \simeq Id$  : Soit  $\mathcal{C} \in |\mathbb{V}\text{-ET}|$  et posons  $(\underline{\mathcal{C}}, \wedge, s, am) = \Phi(\mathcal{C})$  et  $\hat{\mathcal{C}} = \Psi\Phi(\mathcal{C})$ . Comme, pour tout  $X \in |\mathcal{C}|$ ,  $\underline{y}^X : \underline{\mathcal{C}} \rightarrow \underline{V}$  est un adjoint à gauche de  $(-)\wedge X : \underline{V} \rightarrow \underline{\mathcal{C}}$ , il existe un isomorphisme canonique  $\gamma^X : \underline{y}^X \rightarrow \hat{\mathcal{C}}(Id_X, -)$ . Cela nous permet de construire un isomorphisme  $\mathbb{V}$ -enrichi  $\gamma_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \rightarrow \hat{\mathcal{C}}$  (où  $|\gamma_{\mathcal{C}}| = Id$  et  $(\gamma_{\mathcal{C}})_{XY} = \gamma_Y^X$ ). La vérification de l'identité  $\gamma_X^X.id_X = \hat{id}_X$  se fait sans difficulté. Pour l'identité  $comp_{X,Y,Z}(\gamma_Z^Y \otimes \gamma_Y^X) = \gamma_Z^X.comp_{X,Y,Z}$ , on montre les identités suivantes (où  $A = \mathcal{C}(X, Y)$ ,  $B = \mathcal{C}(Y, Z)$ ) :

$$\hat{Ev}_Y^X.(\gamma_Z^X \wedge Id_X).(comp_{X,Y,Z} \wedge Id_X) = Ev_Z^Y.(Id_B \wedge Ev_Y^X).am_{B,A,X} =$$

$$\hat{E}v_Y^X \cdot (\text{comp}_{X,Y,Z} \wedge Id_X) \cdot (\gamma_Z^Y \otimes \gamma_Y^X) \wedge Id_X.$$

Pour montrer que  $\gamma_C$  est naturel en  $\mathcal{C}$ , on montre que pour tout foncteur  $\mathbb{V}$ -enrichi  $\mathcal{F} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$  on a les identités suivantes (où  $A = \mathcal{C}(X, Y)$  et  $\underline{\mathcal{F}}$  est le foncteur sous-jacent à  $\mathcal{F}$ ) :

$$\begin{aligned} \hat{E}v_{\mathcal{F}Y}^{\mathcal{F}X} \cdot (\hat{\mathcal{F}}_{XY} \wedge Id_{\mathcal{F}X}) \cdot (\gamma_Y^X \wedge Id_{\mathcal{F}X}) &= \underline{\mathcal{F}}(Ev_Y^X) \cdot \phi_{A,X} = \\ Ev_{\mathcal{F}Y}^{\mathcal{F}X} \cdot (\mathcal{F}_{XY} \wedge Id_{\mathcal{F}X}) &= \hat{E}v_{\mathcal{F}Y}^{\mathcal{F}X} \cdot (\gamma_Y^X \wedge Id_{\mathcal{F}X}) \cdot (\mathcal{F}_{XY} \wedge Id_{\mathcal{F}X}). \end{aligned}$$

La seconde identité résulte des l'identités

$$\begin{aligned} \underline{y}^{\mathcal{F}X}(Ev_{\mathcal{F}Y}^{\mathcal{F}X}) \cdot \underline{y}^{\mathcal{F}X}(\mathcal{F}_{XY} \wedge Id_{\mathcal{F}X}) \cdot \eta_A^{\mathcal{F}X} &= \mathcal{F}_{XY} = \\ \underline{y}^{\mathcal{F}X} \underline{\mathcal{F}}(Ev_Y^X) \cdot \underline{y}^{\mathcal{F}X}(\phi_{A,X}) \cdot \eta_A^{\mathcal{F}X} &\text{ où, la encore, la seconde identité résulte de } \\ (J1). \end{aligned}$$

Pour la 2-naturalité en  $\mathcal{C}$  de  $\gamma_C$ , on montre que pour toute transformation naturelle enrichie  $t : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}' : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$  on a, pour tout  $X \in |\mathcal{C}|$  :

$(\hat{t} \cdot Id_\gamma)_X = \hat{t}_X = \underline{\gamma}(t_X) = (Id_\gamma \cdot t)_X$  (où  $\gamma = \gamma_C$  ou  $\gamma_{C'}$  et  $\hat{t} = \Psi\Phi(t)$ ). La deuxième égalité résulte des identités suivantes :

$$\begin{aligned} \hat{E}v_{\mathcal{F}'X}^{\mathcal{F}X} \cdot (\gamma_{\mathcal{F}X\mathcal{F}'X} \wedge Id_{\mathcal{F}X}) \cdot (t_X \wedge Id_{\mathcal{F}X}) &= Ev_{\mathcal{F}'X}^{\mathcal{F}X} \cdot (t_X \wedge Id_{\mathcal{F}X}) = t_X \cdot s_{\mathcal{F}X} = \\ \hat{E}v_{\mathcal{F}'X}^{\mathcal{F}X} \cdot (\hat{t}_X \wedge Id_{\mathcal{F}X}). \end{aligned}$$

La deuxième de ces nouvelles identités résultant elle-même des identités :

$$\underline{y}^{\mathcal{F}X}(Ev_{\mathcal{F}'X}^{\mathcal{F}X}) \cdot \underline{y}^{\mathcal{F}X}(t_X \wedge Id_{\mathcal{F}X}) \cdot \eta_I^{\mathcal{F}X} = t_X = \underline{y}^{\mathcal{F}X}(t_X) \cdot \underline{y}^{\mathcal{F}X}(s_{\mathcal{F}X}) \cdot \eta_I^{\mathcal{F}X}.$$

2) Pour l'isomorphisme  $\Phi \cdot \Psi \simeq Id$  : Soit  $\mathbb{E} \in |\mathbb{V}\text{-TE}|$ . Notons

$\mathcal{E} = \Psi(\mathbb{E})$  et  $(\underline{\mathcal{E}}, \underline{\Delta}, \underline{s}, \underline{am}) = \Phi(\mathcal{E})$ . À cause de la commutation du triangle  $(T)$  ( voir les commentaires avant cette proposition), on voit que, pour tout  $X \in |\underline{\mathcal{E}}|$ , il existe un isomorphisme  $\theta^X : (-) \underline{\Delta} X \rightarrow \Gamma \cdot (-) \wedge X : \underline{V} \rightarrow \underline{\mathcal{E}}$ . En fait, pour  $(A, X) \in |\underline{V} \times \underline{\mathcal{E}}|$ ,  $\theta_A^X : A \underline{\Delta} X \rightarrow A \wedge X$  est naturel en  $(A, X)$ . Pour cela on montre que, pour toute flèche  $x : X \rightarrow X'$  de  $\mathbb{E}$ , on a les identités suivantes :

$$\underline{y}^X \Gamma(Id_A \wedge x) \cdot \underline{y}^X(\theta_A^X) \cdot \bar{\eta}_A^X = \mathcal{E}(x, Id_{A \wedge X'}) \cdot \eta_A^{X'} = \underline{y}^X(\theta_A^{X'}) \cdot \underline{y}^X(Id_A \wedge \Gamma x) \cdot \bar{\eta}_A^X.$$

Dans la première identité on utilise  $(K1)$  et pour la deuxième on utilise  $(K2)$  et  $(I1)$ . On montre ensuite que  $(\Gamma, \theta) : \mathbb{E} \rightarrow \Phi\Psi(\mathbb{E})$  est un morphisme de  $\mathbb{V}\text{-PreTens}$ . L'axiome  $(Ms)$  se montre facilement. Pour  $(Mam)$ , il faut montrer que, pour  $A, B \in |\underline{V}|$  et  $X \in |\underline{\mathcal{E}}|$ , on a l'identité :

$$\theta_A^{B \wedge X} \cdot Id_{A \underline{\Delta} \theta_B^X} \cdot \underline{am}_{A,B,\Gamma X} = \Gamma(am_{A,B,X}) \cdot \theta_{A \otimes B}^X. \text{ Cela va résulter des identités suivantes (où } Y = B \wedge X, Z = A \wedge (B \wedge X), \underline{Y} = B \underline{\Delta} X,$$

$U = \mathcal{E}(X, \underline{Y})$ ) :

$$\underline{y}^X \Gamma(am_{A,B,X}) \cdot \underline{y}^X(\theta_{A \otimes B}^X) \cdot \bar{\eta}_{A \otimes B}^X = \text{comp}_{X,Y,Z} \cdot (\eta_A^Y \otimes \eta_B^X) =$$

$$\text{comp}_{X,Y,Z} \cdot (\underline{y}_Z(\theta_B^X) \otimes Id_U) \cdot (\eta_A^Y \otimes Id_U) \cdot (Id_A \otimes \bar{\eta}_B^X) = \\ \underline{y}^X(\theta_A^Y) \cdot \underline{y}^X(Id_A \wedge \theta_B^X) \cdot \underline{y}^X(am_{A,B,X}) \cdot \bar{\eta}_{A \otimes B}^X.$$

Dans la première identité on utilise (K1), dans la seconde on utilise (I3) et dans la troisième (I1) et (I2).

$(\Gamma, \theta)$  dépendant de  $\mathbb{E}$ , renotons le  $\Gamma_{\mathbb{E}}$ . Pour montrer la naturalité en  $\mathbb{E}$  de  $\Gamma_{\mathbb{E}}$  il faut montrer que pour toute flèche  $(F, \phi) : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}'$  de  $\mathbb{V}\text{-TE}$ , le carré suivant commute:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{E} & \xrightarrow{(F, \phi)} & \mathbb{E}' \\ \Gamma_{\mathbb{E}} \downarrow & & \downarrow \Gamma_{\mathbb{E}'} \\ \hat{\mathbb{E}} & \xrightarrow{(\mathcal{F}, \hat{\phi})} & \hat{\mathbb{E}}' \end{array}$$

où on a noté  $\hat{\mathbb{E}} = \Phi\Psi(\mathbb{E})$ ,  $\mathcal{F} = \Psi(F, \phi)$ ,  $(\mathcal{F}, \hat{\phi}) = \Phi(\mathcal{F})$ . La commutation au niveau des foncteurs sous-jacents a déjà été signalée (voir la proposition 2.5). Il faut ensuite vérifier que pour tout  $A \in |\underline{V}|$  et  $X \in |\underline{E}|$  le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccccc} A \wedge \Gamma F(X) & \xrightarrow{Id} & A \wedge \mathcal{F}\Gamma(X) & \xrightarrow{\hat{\phi}_{A, \Gamma X}} & \mathcal{F}(A \wedge \Gamma X) \\ \theta_A^{FX} \downarrow & & & & \downarrow \mathcal{F}(\theta_A^X) \\ \Gamma(A \wedge FX) & \xrightarrow{\Gamma\phi_{A, X}} & \Gamma F(A \wedge X) & \xrightarrow{Id} & \mathcal{F}\Gamma(A \wedge X) \end{array}$$

Pour cela, on montre les identités suivantes :

$$\underline{y}^{FX} \Gamma\phi_{A, X} \cdot \underline{y}^{FX}(\theta_A^{FX}) \cdot \bar{\eta}_A^{FX} = F_{X, A \wedge X} \cdot \eta_A^X = \underline{y}^{FX} \mathcal{F}(\theta_A^X) \cdot \underline{y}^{FX}(\hat{\phi}_{A, X}) \cdot \bar{\eta}_A^{FX}.$$

Dans la première identité on utilise (K1) et dans la seconde on utilise (J1).

- La 2-naturalité de  $\Gamma_{\mathbb{E}}$ , en  $\mathbb{E}$ , est immédiate à vérifier.

- Enfin, le fait que  $\Gamma_{\mathbb{E}}$  est inversible dans  $\mathbb{V}\text{-TE}$  résulte du lemme suivant :

**Lemme 2.7.** :Si  $(F, \phi) : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}'$  est une flèche de  $\mathbb{V}\text{-Pretens}$  telle que  $F$  et  $\phi$  sont des isomorphismes, alors  $(F, \phi)$  est inversible.

*Preuve* : (du lemme) L'inverse de  $(F, \phi)$  est  $(F^{-1}, \psi)$  où pour  $(A, X')$  dans  $|\underline{V} \times \underline{E}'|$ ,  $\psi_{A, X'} = F^{-1}(\phi_{A, F^{-1}X'}^{-1})$ . La vérification de (Ms) se fait sans difficulté et pour (Mam) on utilise le fait que  $(F, \phi)$  vérifie (Mam) et la naturalité de  $\phi^{-1}$ .

### 3. Les catégories $\mathbb{V}$ -précotensorisées

**Définition 3.1.** : Soit  $\mathbb{E} = (\underline{E}, \wedge, s, am)$  une catégorie  $\mathbb{V}$ -précotensorisée. On dit qu'elle est *cotensorisable* si, pour tout  $A \in |\underline{V}|$  le foncteur  $A \wedge (-) : \underline{E} \rightarrow \underline{E}$  admet un adjoint à droite. On fixe  $(-)^A : \underline{E} \rightarrow \underline{E}$ , un adjoint à droite et  $ev^A : A \wedge (-)^A \rightarrow (-)$  une co-unité à cette adjonction.

**Remarque 3.2.** : Dans [5] les catégories  $\mathbb{V}$ -tensorisées qui sont cotensorisables sont appelées des  $\mathbb{V}$ -modules à *Hom* internes.

**Proposition 3.3.** : On suppose que  $\mathbb{E}$  est cotensorisable. Alors on peut munir  $\underline{E}$  des données suivantes :

1) un foncteur  $H : \underline{E} \times \underline{V}^{op} \rightarrow \underline{E}$ ,

2) deux familles naturelles de flèches  $(\sigma_X : X \rightarrow H(X, I))_{X \in |\underline{E}|}$  et

$(\alpha m_{X,A,B} : H(H(X, A), B) \rightarrow H(X, A \otimes B))_{(X,A,B) \in |\underline{E} \times \underline{V} \times \underline{V}|}$ .

Ces données satisfont les propriétés suivantes :

a) Les flèches  $\sigma_X$  sont inversibles.

b) Pour tout  $A \in |\underline{V}|$  et  $X \in \underline{E}$  les deux triangles suivants commutent :

$$\begin{array}{ccc} & H(X, A) & \\ \sigma \swarrow & & \searrow H(Id, u_d) \\ H(H(X, A), I) & \xrightarrow{\alpha m} & H(X, A \otimes I) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} & H(X, A) & \\ H(\sigma, Id) \swarrow & & \searrow H(Id, u_g) \\ H(H(X, I), A) & \xrightarrow{\alpha m} & H(X, I \otimes A) \end{array}$$

c) Pour tout  $A, B, C \in |\underline{V}|$  et  $X \in |\underline{E}|$  le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} & H(H(H(X, A), B), C) & \\ \alpha m \swarrow & & \searrow H(\alpha m, Id) \\ H(H(X, A), B \otimes C) & & H(H(X, A \otimes B), C) \\ \alpha m \downarrow & & \downarrow \alpha m \\ H(X, A \otimes (B \otimes C)) & \xrightarrow{H(Id, ass)} & H(X, (A \otimes B) \otimes C) \end{array}$$

Dans la suite on notera  $X^A = H(X, A)$  et  $x^a = H(x, a)$ .

*Preuve* : - Commençons par construire le foncteur  $H : \underline{E} \times \underline{V}^{op} \rightarrow \underline{E}$ . Pour tout  $A \in |\underline{V}|$  on pose déjà  $H(-, A) = (-)^A : \underline{E} \rightarrow \underline{E}$ . Définissons maintenant, pour chaque  $X \in \underline{E}$ ,  $H(X, -) : \underline{V}^{op} \rightarrow \underline{E}$ . Sur une flèche  $a : A \rightarrow A'$  de  $\underline{V}$ ,  $H(Id_X, a) : X^{A'} \rightarrow X^A$  est l'unique flèche de  $\underline{E}$  telle que le carré suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} A \wedge X^{A'} & \xrightarrow{Id \wedge H(Id, a)} & A \wedge X^A \\ a \wedge Id \downarrow & & \downarrow ev \\ A' \wedge X^{A'} & \xrightarrow{ev} & X \end{array}$$

$H$  se définit alors sur une flèche quelconque  $(x, a) : (X, A) \rightarrow (X', A')$  de  $\underline{E} \times \underline{V}^{op}$  en posant :  $(X^A \xrightarrow{H(x, a)} X'^{A'}) = (X^A \xrightarrow{H(Id, a)} X'^{A'} \xrightarrow{H(x, Id)} X'^{A'}) = (X^A \xrightarrow{H(x, Id)} X'^A \xrightarrow{H(Id, a)} X'^{A'})$ .

La dernière égalité résultant des identités suivantes :

$$ev_{X'}^{A'} \cdot (Id_{A'} \wedge H(x, Id_{A'})) \cdot (Id_{A'} \wedge H(Id_X, a)) = x \cdot ev_X^A \cdot (a \wedge Id_{H(X, A)}) = ev_{X'}^{A'} \cdot (Id_{A'} \wedge H(Id_{X'}, a)) \cdot (Id_{A'} \wedge H(x, Id_A)).$$

La functorialité de  $H(X, -)$  pour un couple de flèches  $A \xrightarrow{a} A' \xrightarrow{a'} A''$ , résulte des identités suivantes :  $ev_X^A \cdot (Id_A \wedge H(Id_X, a)) \cdot (Id_A \wedge H(Id_X, a')) = ev_X^{A''} \cdot ((a' \cdot a) \wedge Id_{H(X, A'')}) = ev_X^A \cdot (Id_A \wedge H(Id_X, a' \cdot a))$ . La functorialité de  $H$  résulte de celles de  $H(-, A)$  et  $H(X, -)$ .

- Pour construire  $\sigma_X$ , pour chaque  $X \in |\underline{E}|$ , et montrer que c'est un isomorphisme, il suffit de montrer que le couple  $(X, s_X^I : I \wedge X \rightarrow X)$  est un objet co-libre associé à  $X$  pour le foncteur  $I \wedge (-)$ .

$\sigma_X$  est alors l'unique flèche de  $\underline{E}$  qui fait commuter le triangle suivant :

$$\begin{array}{ccc} I \wedge X & \xrightarrow{Id \wedge \sigma_X} & I \wedge X^I \\ & \searrow s_X & \swarrow ev \\ & X & \end{array}$$

La naturalité de  $\sigma$  sur une flèche  $x : X \rightarrow X'$  résulte des identités suivantes  $ev_{X'}^I \cdot (Id_I \wedge H(x, Id_I)) \cdot (Id_I \wedge \sigma_X) = x \cdot s_X = ev_{X'}^I \cdot (Id_I \wedge \sigma_{X'}) \cdot (Id_I \wedge x)$ .

- Pour chaque  $(X, A, B) \in |\underline{E} \times \underline{V}^{op} \times \underline{V}^{op}|$ ,

$\alpha m_{X,A,B} : H(H(X, A), B) \rightarrow H(X, A \otimes B)$  est l'unique flèche de  $\underline{E}$  pour laquelle le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc}
 (A \otimes B) \wedge H(H(X, A), B) & \xrightarrow{Id \wedge \alpha m} & (A \otimes B) \wedge H(X, A \otimes B) \\
 \downarrow am & & \downarrow ev \\
 A \wedge (B \wedge H(H(X, A), B)) & \searrow Id \wedge ev & \\
 & & A \wedge H(X, A) \xrightarrow{ev} X
 \end{array}$$

La naturalité de  $\alpha m$  se montre sur les flèches  $(x, Id, Id)$ ,  $(Id, a, Id)$ ,  $(Id, Id, b)$  de  $\underline{E} \times \underline{V}^{op} \times \underline{V}^{op}$  où  $x : X \rightarrow X'$ ,  $a : A \rightarrow A'$ ,  $b : B \rightarrow B'$ . Mais, si on pose  $C = A \otimes B$ ,  $Y = H(X, A)$ ,  $Z = H(H(X, A), B)$ ,  $Y' = H(X, A')$ ,  $Z' = H(H(X, A'), B)$ ,  $Z'' = H(H(X, A), B')$ , celles-ci résultent :

.. Pour la première flèche, des identités suivantes :

$$ev_{X'}^C.(Id_C \wedge H(x, Id_C)).(Id_C \wedge \alpha m_{X,A,B}) = x.ev_X^A.(Id_A \wedge ev_Y^B).am_{A,B,Z} = ev_{X'}^C.(Id_C \wedge \alpha m_{X',A,B}).(Id_C \wedge H(H(x, Id_A), Id_B)).$$

.. Pour la seconde flèche, des identités :

$$\begin{aligned}
 ev_X^C.(Id_C \wedge H(Id_X, a \otimes Id_B)).(Id_C \wedge \alpha m_{X,A',B}) &= \\
 ev_X^{A'}.(Id_{A'} \wedge ev_{Y'}^B).am_{A',B,Z'}.(a \otimes Id_B) \wedge Id_{Z'} &= \\
 ev_X^{A'}.(a \wedge Id_{Y'}).(Id_A \wedge ev_{Y'}^B).am_{A,B,Z'} &= \\
 ev_X^C.(Id_C \wedge \alpha m_{X,A,B}).(Id_C \wedge H(H(Id_X, a), Id_B)). &
 \end{aligned}$$

.. Pour la troisième flèche :

$$\begin{aligned}
 ev_X^C.(Id_C \wedge H(Id_X, Id_A \otimes b)).(Id_C \wedge \alpha m_{A,B,Z''}) &= \\
 ev_X^A.(Id_A \wedge ev_Y^{B'}).am_{A,B',Z''}.((Id_A \otimes b) \wedge Id_{Z''}) &= \\
 ev_X^C.(Id_C \wedge \alpha m_{X,A,B}).(Id_C \wedge H(H(Id_X, Id_A), b)). &
 \end{aligned}$$

- Vérifions maintenant les propriétés (b), (c) de l'énoncé après avoir posé  $A' = I \otimes A$ ,  $Y = H(X, A)$ ,  $A'' = A \otimes I$ ,  $D = A \otimes B$ ,  $E = (A \otimes B) \otimes C$ ,  $Z = H(H(X, A), B)$ ,  $T = H(H(H(X, A), B), C)$ ,  $F = B \otimes C$ .

.. Pour (b)(deuxième triangle), cela résulte des identités suivantes :

$$\begin{aligned}
 ev_X^{A'}.(Id_{A'} \wedge \alpha m_{X,I,A}).(Id_{A'} \wedge \sigma_A) &= ev_X^A.(u_{g,A} \wedge Id_Y) = \\
 ev_X^{A'}.(Id_{A'} \wedge H(Id_X, u_{g,A})). &
 \end{aligned}$$

.. Pour (b)(premier triangle), cela résulte de :

$$ev_X^{A''}.(Id_{A''} \wedge \alpha m_{X,A,I}).(Id_{A''} \wedge \sigma_A) = ev_X^A.(u_{d,A} \wedge Id_Y) =$$

$$ev_X^{A'}.(Id_{A'} \wedge H(Id_X, u_{d,A})).$$

.. Pour (c), on montre les identités suivantes :

$$\begin{aligned} & ev_X^E.(Id_E \wedge \alpha m_{X,D,C}).(Id_E \wedge H(\alpha m_{X,A,B}, Id_C)) = \\ & ev_X^D.(Id_D \wedge \alpha m_{X,A,B}).(Id_D \wedge ev_Z^C).am_{D,C,T} = \\ & ev_X^A.(Id_A \wedge ev_Y^B).(Id_A \wedge (Id_B \wedge ev_Z^C)).(Id_A \wedge am_{B,C,T}).am_{A,F,T}.(ass_{A,B,C} \wedge \\ & Id_T) = ev_X^E.(Id_E \wedge H(Id_X, ass_{A,B,C})).(Id_E \wedge \alpha m_{X,A,F}).(Id_E \wedge \alpha m_{Y,B,C}). \end{aligned}$$

**Remarque 3.4.** : Lorsque  $am$  est inversible (c.a.d. lorsque  $\mathbb{E}$  est  $\mathbb{V}$ -tensorisée) alors  $\alpha m$  est, lui aussi, inversible (car  $\alpha m_{A,B,-} :$

$$\begin{aligned} & H(-, B).H(-, A) \rightarrow H(-, A \otimes B) \text{ se déduit de } am_{A,B,-} : \\ & (A \otimes B) \wedge (-) \rightarrow A \wedge (-).B \wedge (-) \text{ par adjonction à droite).} \end{aligned}$$

**Proposition 3.5.** : Soient  $\mathbb{E}, \mathbb{E}' \in |\mathbb{V}\text{-Pretens}|$ . On suppose que  $\mathbb{E}$  et  $\mathbb{E}'$  sont cotensorisables.

1) On se donne en plus un morphisme  $(F, \phi) : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}'$ . Alors, en plus des structures  $(H, \sigma, \alpha m)$  dont on peut munir  $\mathbb{E}, \mathbb{E}'$  (voir proposition précédente), on peut aussi munir  $F : \underline{E} \rightarrow \underline{E}'$  d'une famille naturelle

$$(\psi_{X,A} : F(X^A) \rightarrow F(X)^A)_{(X,A) \in |\underline{E} \times \underline{V}^{op}|} \text{ satisfaisant les conditions suivantes :$$

$(M\sigma)$  Pour tout  $X \in |\underline{E}|$ , le triangle suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} & F(X) & \\ F(\sigma_X) \swarrow & & \searrow \sigma_{FX} \\ F(X^I) & \xrightarrow{\psi_{X,I}} & F(X)^I \end{array}$$

$(M\alpha m)$  Pour tout  $X \in |\underline{E}|$  et tout  $A, B \in |\underline{V}|$ , le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} F((X^A)^B) & \xrightarrow{\psi} & F(X^A)^B \\ F(\alpha m) \downarrow & & \downarrow \psi^{Id} \\ F(X^{A \otimes B}) & & (F(X)^A)^B \\ & \searrow \psi & \swarrow \alpha m \\ & F(X)^{A \otimes B} & \end{array}$$

2) On se donne, cette fois, une 2-cellule  $t : (F, \phi) \rightarrow (F', \phi') : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}'$  dans  $\mathbb{V}$ -Pretens. Alors la transformation naturelle sous-jacente vérifie la condition suivante :

(C $\psi$ ) Pour tout  $X \in |\underline{E}|$  et tout  $A \in |\underline{V}|$  le carré suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} F(X^A) & \xrightarrow{t_{X^A}} & F'(X^A) \\ \psi \downarrow & & \downarrow \psi' \\ F(X)^A & \xrightarrow{t_X^{Id}} & F'(X)^A \end{array}$$

Preuve : 1) Soient  $X \in |\underline{E}|$  et  $A \in |\underline{V}|$ . On définit  $\psi_{X,A}$  comme l'unique flèche  $F(X^A) \rightarrow F(X)^A$  dans  $\underline{E}'$  qui rend commutatif le carré suivant :

$$\begin{array}{ccc} A \wedge F(X^A) & \xrightarrow{Id \wedge \psi_{X,A}} & A \wedge (F(X)^A) \\ \phi \downarrow & & \downarrow ev \\ F(A \wedge X^A) & \xrightarrow{F(ev)} & F(X) \end{array}$$

- La naturalité de  $\psi$  se montre sur les flèches  $(x, Id)$  et  $(Id, a)$  de  $\underline{E} \times \underline{V}^{op}$  où  $x : X \rightarrow X'$  et  $a : A' \rightarrow A$ .

.. Pour la première flèche, on montre les identités suivantes :

$$ev_{F'X'}^A \cdot (Id_{A'} \wedge F(x)^{Id_{A'}}) \cdot (Id_{A'} \wedge \psi_{X,A}) = F(x) \cdot F(ev_X^A) \cdot \phi_{A,X^A} = ev_{F'X'}^A \cdot (Id_{A'} \wedge \psi_{X',A}) \cdot (Id_{A'} \wedge F(x)^{Id_{A'}}).$$

.. Pour la deuxième flèche, on montre encore que :

$$ev_{F'X'}^{A'} \cdot (Id_{A'} \wedge ((Id_{FX})^a)) \cdot (Id_{A'} \wedge \psi_{X,A}) = F(ev_X^A) \cdot \phi_{A,X^A} \cdot (a \wedge Id_{F(X^A)}) = F(ev_X^A) \cdot F(Id_{A'} \wedge (Id_X)^a) \cdot \phi_{A',X^A} = ev_{F'X'}^{A'} \cdot (Id_{A'} \wedge \psi_{X,A'}) \cdot (Id_{A'} \wedge F((Id_X)^a)).$$

.. Pour  $(M\sigma)$ , on montre que :

$$ev_{F'X'}^I \cdot (Id_I \wedge \sigma_{FX}) = s_{FX} = ev_{F'X'}^I \cdot (Id_I \wedge \psi_{X,I}) \cdot (Id_I \wedge F(\sigma_X)).$$

.. Pour  $(M\alpha m)$ , on montre successivement (en posant  $C = A \otimes B$ ,

$Y = X^A$ ,  $Z = (X^A)^B$ ) :

$$\begin{aligned} ev_{F'X'}^C \cdot (Id_C \wedge \psi_{X,C}) \cdot (Id_C \wedge F(\alpha m_{X,A,B})) &= F(ev_X^C) \cdot F(Id_C \wedge \alpha m_{X,A,B}) \cdot \phi_{C,Z} \\ &= F(ev_X^A) \cdot F(Id_A \wedge ev_Y^B) \cdot \phi_{A,B \wedge Z} \cdot (Id_A \wedge \phi_{B,Z}) \cdot \alpha m_{A,B,Z} = \\ ev_{F'X'}^C \cdot (Id_C \wedge \alpha m_{FX,A,B}) \cdot (Id_C \wedge \psi_{X,A}^{Id_B}) \cdot (Id_C \wedge \psi_{Y,B}) & \end{aligned}$$

2) La commutation du diagramme de (C $\psi$ ) résulte des identités suivantes :

$$ev_{F'X'}^A \cdot (Id_A \wedge t_X^{Id_A}) \cdot (Id_A \wedge \psi_{X,A}) = t_X \cdot F(ev_X^A) \cdot \phi_{A,X^A} =$$

$$ev_{F',X}^A \cdot (Id_A \wedge \psi'_{X,A}) \cdot (Id_A \wedge t_{X^A}).$$

• Ces deux propositions nous conduisent à donner les définitions suivantes :

**Définition 3.6.** : 1) On appelle catégorie  $\mathbb{V}$ -précotensorisée la donnée  $\mathbb{E}$  :

- d'une catégorie  $\underline{E}$ ,
- d'un foncteur  $H : \underline{E} \times \underline{V}^{op} \rightarrow \underline{E}$ ,
- de deux familles naturelles de flèches  $(\sigma_X : X \rightarrow H(X, I))_{X \in |\underline{E}|}$  et  $(\alpha m_{X,A,B} : H(H(X, A), B) \rightarrow H(X, A \otimes B))_{(X,A,B) \in |\underline{E} \times \underline{V} \times \underline{V}|}$ .

Ces données sont astreintes à satisfaire les propriétés (a), (b), (c) données dans la proposition 3.3.

Lorsque pour tout  $(X, A, B) \in |\underline{E} \times \underline{V}^{op} \times \underline{V}^{op}|$ ,  $\alpha m_{X,A,B}$  est inversible on dit que  $\mathbb{E}$  est une catégorie  $\mathbb{V}$ -cotensorisée.

2)  $\mathbb{E}$  et  $\mathbb{E}'$  étant des catégories  $\mathbb{V}$ -précotensorisées, un morphisme  $\mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}'$  est la donnée :

- d'un foncteur  $F : \underline{E} \rightarrow \underline{E}'$ ,
- d'une famille naturelle  $(\psi_{X,A} : F(X^A) \rightarrow F(X)^A)_{(X,A) \in |\underline{E} \times \underline{V}^{op}|}$

Ces données doivent satisfaire les propriétés  $(M\sigma)$  et  $(M\alpha m)$  de la proposition précédente.

3)  $(F, \phi), (F', \phi') : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}'$  étant deux morphismes entre catégories  $\mathbb{V}$ -précotensorisées, un 2-morphisme  $t : (F, \phi) \rightarrow (F', \phi')$  est la donnée d'une transformation naturelle  $t : F \rightarrow F'$  vérifiant la condition  $(C\psi)$  de la proposition précédente.

• À partir de ces données on construit une 2-catégorie notée  $\mathbb{V}$ -Precot. Après avoir aussi noté  $\mathbb{V}$ -TC la sous-2-catégorie pleine de  $\mathbb{V}$ -Pretens formée des objets cotensorisables, on construit, avec l'aide des deux propositions précédentes, un 2-foncteur  $\Delta : \mathbb{V}$ -TC  $\rightarrow$   $\mathbb{V}$ -Precot. La vérification que  $\mathbb{V}$ -Precot est une 2-catégorie et que  $\Delta$  est un 2-foncteur est aisée.

#### 4. Réduction des catégories $\mathbb{V}$ -précotensorisées

**Remarque 4.1.** : Quand on compare les définitions de catégories  $\mathbb{V}$ -précotensorisées et  $\mathbb{V}$ -prétensorisées, on y voit plus qu'une simple analogie. Il y a clairement une dualité entre ces deux concepts. Mais de quel genre de dualité s'agit-il ? C'est ce que nous allons préciser maintenant. Grâce à cela

les 2-foncteurs construit précédemment vont pouvoir se dualiser et produire de nouvelles équivalences de 2-catégories.

•  $\mathbb{V} = (\underline{V}, \otimes, I, u_g, u_d, ass)$  étant une catégorie monoïdale, on note  $\mathbb{V}^*$  la catégorie monoïdale  $(\underline{V}^*, \otimes^*, I^*, u_g^*, u_d^*, ass^*)$  où,

- $\underline{V}^* = \underline{V}$ ,
- Pour  $A, B \in |\underline{V}|$ ,  $A \otimes^* B = B \otimes A$  (même chose pour les flèches),
- $I^* = I$ ,
- Pour  $A \in |\underline{V}|$ ,  $(u_{g,A}^* : I^* \otimes^* A \rightarrow A) = (u_{d,A} : A \otimes I \rightarrow A)$ ,
- $(u_{d,A}^* : A \otimes^* I^* \rightarrow A) = (u_{g,A} : I \otimes A \rightarrow A)$ ,
- Pour  $A, B, C \in |\underline{V}|$ ,  $(ass_{A,B,C}^* : (A \otimes^* B) \otimes^* C \rightarrow A \otimes^* (B \otimes^* C)) = (ass_{C,B,A}^{-1} : C \otimes (B \otimes A) \rightarrow (C \otimes B) \otimes A)$ .

• Donnons nous maintenant une catégorie  $\mathbb{V}$ -cotensorisée

$\mathbb{E} = (\underline{E}, H, \sigma, \alpha m)$ . On lui associe la catégorie  $\mathbb{V}^*$ -prétensorisée

$Red(\mathbb{E}) = (\underline{E}^{op}, \wedge, s, am)$ , où  $\wedge : \underline{V} \times \underline{E}^{op} \rightarrow \underline{E}^{op}$  est le foncteur composé suivant :

$$\underline{V} \times \underline{E}^{op} \xrightarrow{sym} \underline{E}^{op} \times \underline{V} \xrightarrow{Id} (\underline{E} \times \underline{V}^{op})^{op} \xrightarrow{H^{op}} \underline{E}^{op}.$$

- Pour tout  $X \in |\underline{E}^{op}| = |\underline{E}|$ ,  $(s_X : I \wedge X \rightarrow X) = (\sigma_X : X \rightarrow X^I)^{op}$ .
- Pour tout  $A, B \in |\underline{V}|$  et  $X \in |\underline{E}^{op}| = |\underline{E}|$ ,

$$((A \otimes^* B) \wedge X \xrightarrow{am_{A,B,X}} A \wedge (B \wedge X)) = ((X^B)^A \xrightarrow{am_{X,B,A}} X^{B \otimes A})^{op}$$

En fait, cette construction se prolonge en un 2-foncteur inversible

$Red : \mathbb{V}\text{-Precot} \rightarrow (\mathbb{V}^*\text{-Pretens})^{opv}$  (où la notation  $(-)^{opv}$  signifie qu'on a dualisé la composition verticale).

- Sur une flèche  $(F, \psi) : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}'$  de  $\mathbb{V}\text{-Precot}$  on a :

$$(Red(\mathbb{E}) \xrightarrow{Red(F,\psi)} Red(\mathbb{E}')) = (Red(\mathbb{E}) \xrightarrow{(F^{op},\phi)} Red(\mathbb{E}')).$$

où pour  $A \in |\underline{V}|$ ,  $X \in |\underline{E}^{op}|$ ,

$$(A \wedge F^{op}(X) \xrightarrow{\phi_{A,X}} F^{op}(A \wedge X)) = (F(X^A) \xrightarrow{\psi_{X,A}} F(X)^A)^{op}.$$

- Sur une 2-cellule  $t : (F, \psi) \rightarrow (F', \psi') : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}'$  de  $\mathbb{V}$ -Precot on a :

$$Red(t) = t^{op} \text{ où } (F'^{op}(X) \xrightarrow{t_X^{op}} F^{op}(X)) = (F(X) \xrightarrow{t_X} F'(X))^{op}.$$

- Soit  $\mathbb{E} = (\underline{E}, H, \sigma, \alpha m)$  une catégorie  $\mathbb{V}$ -précotensorisée.

**Définition 4.2.** : 1) On dit que  $\mathbb{E}$  est *enrichissable* si, pour tout  $X \in |\underline{E}|$ , le foncteur  $X^{(-)} : \underline{V}^{op} \rightarrow \underline{E}$  admet un adjoint à gauche. Notons  $\mathbb{V}$ -CE la sous-2-catégorie pleine de  $\mathbb{V}$ -Precot dont les objets sont enrichissables.

2) On dit que  $\mathbb{E}$  est *tensorisable* si, pour tout  $A \in |\underline{V}|$ , le foncteur  $(-)^A : \underline{E} \rightarrow \underline{E}$  admet un adjoint à gauche. Notons  $\mathbb{V}$ -CT la sous-2-catégorie pleine de  $\mathbb{V}$ -Precot dont les objets sont tensorisables.

**Remarque 4.3.** : Ayant noté  $(\underline{E}^{op}, \wedge, s, am) = Red(\mathbb{E})$ , on voit que, pour tout  $A \in |\underline{V}|$ , le foncteur  $(-)^A : \underline{E} \rightarrow \underline{E}$  admet un adjoint à gauche ssi  $A \wedge (-) : \underline{E}^{op} \rightarrow \underline{E}^{op}$  admet un adjoint à droite et donc  $\mathbb{E}$  est tensorisable ssi  $Red(\mathbb{E})$  est cotensorisable. On peut donc considérer la restriction  $Red : \mathbb{V}$ -CT  $\rightarrow$   $(\mathbb{V}^*$ -TC)<sup>opv</sup>.

- Notons  $\nabla : \mathbb{V}$ -CT  $\rightarrow$   $\mathbb{V}$ -Pretens le 2-foncteur composé suivant :

$$(\mathbb{V}$$
-CT  $\xrightarrow{Red}$   $(\mathbb{V}^*$ -TC)<sup>opv</sup>  $\xrightarrow{\Delta^{opv}}$   $(\mathbb{V}^*$ -Precot)<sup>opv</sup>  $\xrightarrow{Red^{opv}}$   $\mathbb{V}$ -Pretens

Soit  $\mathbb{E} \in |\mathbb{V}$ -CT|. Écrivons  $\mathbb{E} = (\underline{E}, H, \sigma, \alpha m)$  et  $\nabla(\mathbb{E}) = (\underline{E}, \wedge, s, am)$ .

Décrivons maintenant succinctement les ingrédients de cette catégorie  $\mathbb{V}$ -prétensorisée. On remarque déjà que, pour tout

$A \in |\underline{V}|$ ,  $A \wedge (-) \dashv (-)^A$ . Notons  $ve^A$  l'unité de cette adjonction.

- Pour chaque  $X \in |\underline{E}|$  et chaque flèche  $a : A \rightarrow A'$  de  $\underline{V}$ ,

$a \wedge Id : A \wedge X \rightarrow A' \wedge X$  est l'unique flèche de  $\underline{E}$ , rendant le carré suivant commutatif dans  $\underline{E}$  :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{ve} & (A' \wedge X)^{A'} \\ ve \downarrow & & \downarrow Id^a \\ (A \wedge X)^A & \xrightarrow{(a \wedge Id)^{Id}} & (A' \wedge X)^A \end{array}$$

- Pour chaque  $X \in |\underline{E}|$ ,  $s_X : I \wedge X \rightarrow X$  est l'unique flèche de  $\underline{E}$ , rendant le triangle suivant commutatif dans  $\underline{E}$  :

$$\begin{array}{ccc} & X & \\ ve \swarrow & & \searrow \sigma_X \\ (I \wedge X)^I & \xrightarrow{s_X^{Id}} & X^I \end{array}$$

- Pour chaque  $A, B \in |\underline{V}|$  et  $X \in |\underline{E}|$ ,  $am_{B,A,X} : (B \otimes A) \wedge X \rightarrow B \wedge (A \wedge X)$  est l'unique flèche de  $\underline{E}$ , rendant le diagramme suivant commutatif dans  $\underline{E}$  :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{ve} & (A \wedge X)^A \\ \downarrow ve & & \searrow ve^{Id} \\ & & ((B \wedge (A \wedge X))^B)^A \\ & & \downarrow am \\ ((B \otimes A) \wedge X)^{B \otimes A} & \xrightarrow{am^{Id}} & (B \wedge (A \wedge X))^{B \otimes A} \end{array}$$

- Si maintenant  $(F, \psi) : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}'$  est une flèche de  $\mathbb{V}\text{-CT}$  et  $(F, \phi) = \nabla(F, \psi)$  alors, pour tout  $A \in |\underline{V}|$  et  $X \in |\underline{E}|$ ,  $\phi_{A,X} : A \wedge F(X) \rightarrow F(A \wedge X)$  est l'unique flèche de  $\underline{E}$ , rendant le carré suivant commutatif dans  $\underline{E}$  :

$$\begin{array}{ccc} F(X) & \xrightarrow{F(ve)} & F((A \wedge X)^A) \\ ve \downarrow & & \downarrow \psi \\ (A \wedge F(X))^A & \xrightarrow{\phi^{Id}} & F(A \wedge X)^A \end{array}$$

Enfin, si  $t : (F, \psi) \rightarrow (F', \psi') : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}'$  est une 2-cellule de  $\mathbb{V}\text{-CT}$ , on a en fait  $\nabla(t) = t$ .

Lorsque  $\mathbb{E}_0 \in |\mathbb{V}\text{-TC}|$  et  $\mathbb{E}_1 \in |\mathbb{V}\text{-CT}|$ , on constate que  $\Delta(\mathbb{E}_0) \in |\mathbb{V}\text{-CT}|$  et  $\nabla(\mathbb{E}_1) \in |\mathbb{V}\text{-TC}|$ . On peut donc considérer les 2-foncteurs restrictions suivants :

$$\mathbb{V}\text{-TC} \begin{array}{c} \xrightarrow{\Delta} \\ \xleftarrow{\nabla} \end{array} \mathbb{V}\text{-CT}$$

**Proposition 4.4.** : On a la 2-équivalence suivante :

$$\mathbb{V}\text{-TC} \cong \mathbb{V}\text{-CT}$$

*Preuve* : 1) L'isomorphisme  $\iota : Id \rightarrow \nabla\Delta$  est donné, pour chaque  $\mathbb{E} \in |\mathbb{V}\text{-TC}|$ , par  $\iota_{\mathbb{E}} = (Id, \delta) : \mathbb{E} \rightarrow \nabla\Delta(\mathbb{E})$  où, après avoir noté  $\mathbb{E} = (\underline{E}, \wedge, s, am)$ ,

$\Delta(\mathbb{E}) = (\underline{E}, H, \sigma, \alpha m)$  et  $\nabla\Delta(\mathbb{E}) = (\underline{E}, \underline{\wedge}, s, \underline{am})$ , pour tout  $A \in |\underline{V}|$ ,

$\delta^A : A_{\underline{\wedge}}(-) \rightarrow A \wedge (-)$  est la transformation naturelle inversible provenant du fait que  $A \wedge (-)$  et  $A_{\underline{\wedge}}(-)$  sont tous deux adjoints à gauche de  $(-)^A$ .

- Le fait que  $\delta_X^A$  soit naturel en  $(A, X)$  résulte de la commutation des diagrammes suivants (où  $X \in |\underline{E}|$ ,  $a : A \rightarrow A'$  est dans  $\mathbb{V}$  et où on a posé  $Y = A' \wedge X$ ) :

$$(a \wedge Id_X)^{Id_A} \cdot (\delta_X^A)^{Id_A} \cdot \underline{ve}_X^A = (a \wedge Id_X)^{Id_A} \cdot \underline{ve}_X^A = (Id_Y^a) \cdot \underline{ve}_X^{A'} = (\delta_X^A \wedge Id_A) \cdot (a_{\underline{\wedge}} Id_X)^{Id_A} \cdot \underline{ve}_X^A$$

où la deuxième identité résulte des nouvelles identités suivantes :

$$\underline{ev}_Y^A \cdot (Id_A \wedge (a \wedge Id_X)^{Id_A}) \cdot (Id_A \wedge \underline{ve}_X^A) = a \wedge Id_X =$$

$$\underline{ev}_Y^A \cdot (Id_A \wedge (Id_Y^a)) \cdot (Id_A \wedge \underline{ve}_X^A)$$

- On montre ensuite que  $\iota_{\mathbb{E}} = (Id, \delta)$  est un morphisme de catégories  $\mathbb{V}$ -prétensorisées.

.. Pour  $(Ms)$  cela résulte des identités suivantes :

$\underline{s}_X^{Id_I} \cdot \underline{ve}_X^I = \sigma_X = s_X^{Id_I} \cdot \underline{ve}_X^I = s_X^{Id_I} \cdot \delta_X^I \cdot \underline{ve}_X^I$ , où la seconde identité résulte, elle même, des nouvelles identités suivantes :

$$\underline{ev}_X^I \cdot (Id_I \wedge \sigma_X) = s_X = \underline{ev}_X^I \cdot (Id_I \wedge s_X^{Id_I}) \cdot (Id_I \wedge \underline{ve}_X^I).$$

.. Pour  $(Mam)$  cela résulte des identités suivantes (où  $A, B \in |\underline{V}|$  et  $X \in |\underline{E}|$  et où on écrit aussi, pour simplifier,  $C = A \otimes B$ ,  $Y = B \wedge X$ ,  $Z = A \wedge (B \wedge X)$ ) :

$$am_{A,B,X}^{Id_C} \cdot \delta_X^{Id_C} \cdot \underline{ve}_X^C = am_{A,B,X}^{Id_C} \cdot \underline{ve}_X^C = \alpha m_{Z,A,B} \cdot \underline{ve}_Y^{A^{Id_B}} \cdot \underline{ve}_X^B =$$

$\delta_Y^{A^C} \cdot (Id_A \wedge \delta_X^B)^{Id_C} \cdot am_{A,B,X}^{Id_C} \cdot \underline{ve}_X^C$  où la seconde identité résulte, elle même, des nouvelles identités suivantes :

$$\underline{ev}_Z^C \cdot (Id_C \wedge (am_{A,B,X}^{Id_C})) \cdot (Id_C \wedge \underline{ve}_X^C) = am_{A,B,X} =$$

$$\underline{ev}_Z^C \cdot (Id_C \wedge \alpha m_{Z,A,B}) \cdot (Id_C \wedge (\underline{ve}_Y^{A^{Id_B}})) \cdot (Id_C \wedge \underline{ve}_X^B)$$

- Montrons que  $\iota_{\mathbb{E}}$  est naturel en  $\mathbb{E}$ . Soit  $(F, \phi) : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}'$  une flèche de  $\mathbb{V}\text{-TC}$ . Notons  $\nabla\Delta(\mathbb{E}) = (\underline{E}, \underline{\wedge}, s, \underline{am})$ ,  $\nabla\Delta(\mathbb{E}') = (\underline{E}', \underline{\wedge}', s', \underline{am}')$ ,

$(F, \psi) = \Delta(F, \phi)$  et  $(F, \phi) = \nabla\Delta(F, \phi)$ . Pour montrer la naturalité de  $\iota$  sur  $(F, \phi)$  il nous faut montrer, pour tout  $A \in |\underline{V}|$  et  $X \in |\underline{E}|$ , la commutation

du carré suivant :

$$\begin{array}{ccc} A \wedge' F(X) & \xrightarrow{\phi_{A,X}} & F(A \wedge X) \\ \delta_{FX}^A \downarrow & & \downarrow F\delta_X^A \\ A \wedge' F(X) & \xrightarrow{\phi_{A,X}} & F(A \wedge X) \end{array}$$

Cela résulte des identités suivantes (où  $Y = A \wedge X$ ):

$$F(\delta_X^A)^{Id_A} \cdot \phi_{A,X}^{Id_A} \cdot ve_{FX}^A = \psi_{Y,A} \cdot F(ve_Y^A) = \phi_{A,X}^{Id_A} \cdot ve_{FX}^A = \phi_{A,X}^{Id_A} \cdot (\delta_{FX}^A)^{Id_A} \cdot ve_{FX}^A$$

où la seconde identité résulte, elle même, des nouvelles identités suivantes :

$$ev_{FY}^A \cdot (Id_A \wedge' \phi_{A,X}^{Id_A}) \cdot (Id_A \wedge' ve_{FX}^A) = \phi_{A,X} =$$

$$ev_{FY}^A \cdot (Id_A \wedge' \psi_{Y,A}) \cdot (Id_A \wedge' F(ve_X^A))$$

- La 2-naturalité de  $\iota_{\mathbb{E}}$  se montre sans difficulté.

2) L'isomorphisme  $\Delta \nabla \simeq Id$  résulte de l'isomorphisme  $\nabla \Delta \simeq Id$  en appliquant le 2-foncteur *Red*.

**Proposition 4.5.** : On a la 2-équivalence suivante :

$$\mathbb{V}\text{-}EC \cong \mathbb{V}\text{-}CE$$

Preuve : 1) On commence par construire un 2-foncteur

$$Op : \mathbb{V}\text{-}Cat \rightarrow (\mathbb{V}^*\text{-}Cat)^{opv}.$$

Il est défini,

- sur un objet  $\mathcal{C} \in |\mathbb{V}\text{-}Cat|$ , par  $Op(\mathcal{C}) = \mathcal{C}^{op}$ , où  $|\mathcal{C}^{op}| = |\mathcal{C}|$  et  $\mathcal{C}^{op}(X, Y) = \mathcal{C}(Y, X)$ . On vérifie qu'on construit ainsi une catégorie  $\mathbb{V}^*$ -enrichie.

- sur une flèche  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$  de  $\mathbb{V}\text{-}Cat$ ,  $Op(\mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{C}') = (\mathcal{C}^{op} \xrightarrow{F^{op}} \mathcal{C}'^{op})$  (où  $|F^{op}| = |F|$  et  $F_{XY}^{op} = F_{XY}$ ),

- sur une 2-cellule  $t : F \rightarrow F' : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ ,  $Op(t) = t^{op} : F^{op} \rightarrow F'^{op}$  (où  $(I^* \xrightarrow{t_X^{op}} \mathcal{C}'^{op}(F'^{op}X, F^{op}X)) = (I \xrightarrow{t_X} \mathcal{C}'(FX, F'X))$ ).

2) On remarque ensuite que le 2-foncteur *Op* se factorise par le 2-foncteur  $\mathbb{V}\text{-}EC \rightarrow (\mathbb{V}^*\text{-}ET)^{opv}$  car on voit, pour une catégorie  $\mathbb{V}$ -enrichie  $\mathcal{C}$ , qu'elle est à co-tenseurs ssi  $\mathcal{C}^{op}$  est à tenseurs. Comme pour le foncteur *Op*, cette factorisation est un 2-isomorphisme.

3) D'un autre côté, soit  $\mathbb{E}$  une catégorie  $\mathbb{V}$ -précotensorisée. Alors on voit facilement que  $\mathbb{E}$  est enrichissable ssi *Red*( $\mathbb{E}$ ) est enrichissable. On obtient

ainsi à nouveau une factorisation  $\mathbb{V}\text{-}CE \rightarrow (\mathbb{V}^*\text{-}TE)^{opv}$  du 2-foncteur  $Red$ . Là encore le 2-foncteur  $Red$  et sa factorisation sont des 2-isomorphismes.  
 4) On est maintenant en mesure de construire les 2-foncteurs  $\tilde{\Phi}$  et  $\tilde{\Psi}$  composés suivants :

$$\begin{aligned} \mathbb{V}\text{-}EC &\xrightarrow{Op} (\mathbb{V}^*\text{-}ET)^{opv} \xrightarrow{\Phi^{opv}} (\mathbb{V}^*\text{-}TE)^{opv} \xrightarrow{Red^{-1}} \mathbb{V}\text{-}CE \\ \mathbb{V}\text{-}CE &\xrightarrow{Red} (\mathbb{V}^*\text{-}TE)^{opv} \xrightarrow{\Psi^{opv}} (\mathbb{V}^*\text{-}ET)^{opv} \xrightarrow{Op^{-1}} \mathbb{V}\text{-}EC \end{aligned}$$

5) On a les isomorphismes  $\tilde{\Psi}.\tilde{\Phi} \simeq Id$  et  $\tilde{\Phi}.\tilde{\Psi} \simeq Id$ , obtenus à partir des isomorphismes  $\Psi.\Phi \simeq Id$  et  $\Phi.\Psi \simeq Id$  (voir la proposition 2.6).

### 5. Les passerelles

**Remarque 5.1.** : On a constaté que, sur une catégorie monoïdale  $\mathbb{V}$ , les concepts de catégorie enrichie, catégorie prétensorisée et catégorie précotensorisée se correspondent deux à deux. Il semble donc que chacun d'eux représente une même idée d'enrichissement mais déclinée de façon différente. Ce qui va suivre va abonder dans le même sens puisqu'on va construire des morphismes entre deux différentes de ces représentations (précisément entre les catégories  $\mathbb{V}$ -enrichies et les catégories  $\mathbb{V}$ -prétensorisées).

**Définition 5.2.** :1) Soient  $\mathcal{C}$  une catégorie  $\mathbb{V}$ -enrichie et  $\mathbb{E} = (\underline{E}, \wedge, s, am)$  une catégorie  $\mathbb{V}$ -prétensorisée. On appelle  $\mathbb{V}$ -passerelle de  $\mathcal{C}$  dans  $\mathbb{E}$  la donnée  $P$ ,

- d'une application  $|P| : |\mathcal{C}| \rightarrow |\underline{E}|$ ,
- pour chaque couple  $(X, Y) \in |\mathcal{C}|^2$  d'une flèche  $\pi_{XY} : \mathcal{C}(X, Y) \wedge |P|(X) \rightarrow |P|(Y)$  dans  $\underline{E}$  (Dans la suite on écrira  $P(X)$  au lieu de  $|P|(X)$ , pour chaque  $X \in |\mathcal{C}|$ ).

Ces données sont astreintes à vérifier les conditions suivantes :

(PU) Pour tout  $X \in |\mathcal{C}|$ , le triangle suivant commute dans  $\mathbb{E}$  :

$$\begin{array}{ccc} I \wedge PX & \xrightarrow{id_X \wedge Id} & \mathcal{C}(X, X) \wedge PX \\ & \searrow s_{PX} & \swarrow \pi_{XX} \\ & & PX \end{array}$$

(PC) Pour tout  $X, Y, Z \in |\mathcal{C}|$ , le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc}
 (\mathcal{C}(Y, Z) \otimes \mathcal{C}(X, Y)) \wedge PX & \xrightarrow{am} & \mathcal{C}(Y, Z) \wedge (\mathcal{C}(X, Y) \wedge PX) \\
 \text{comp} \wedge Id \downarrow & & \downarrow Id \wedge \pi_{XY} \\
 \mathcal{C}(X, Z) \wedge PX & & \mathcal{C}(Y, Z) \wedge PY \\
 \pi_{XZ} \searrow & & \swarrow \pi_{YZ} \\
 & PZ &
 \end{array}$$

2)  $P, Q : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{E}$  étant des  $\mathbb{V}$ -passerelles, un morphisme  $t : P \rightarrow Q$  est la donnée d'une famille de flèches  $(t_X : PX \rightarrow QX)_{X \in |\mathcal{C}|}$  telle que, pour tout couple  $(X, Y) \in |\mathcal{C}|^2$  le carré suivant commute (où  $P = (|P|, \pi)$  et  $Q = (|Q|, \kappa)$ ):

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{C}(X, Y) \wedge PX & \xrightarrow{Id \wedge t_X} & \mathcal{C}(X, Y) \wedge QX \\
 \pi_{XY} \downarrow & & \downarrow \kappa_{XY} \\
 PY & \xrightarrow{t_Y} & QY
 \end{array}$$

Les  $\mathbb{V}$ -passerelles  $\mathcal{C} \rightarrow \mathbb{E}$  et les morphismes entre ces  $\mathbb{V}$ -passerelles forment une catégorie notée  $\mathbb{V}\text{-Pass}(\mathcal{C}, \mathbb{E})$ .

**Remarque 5.3.** : Dans [1] J.Benabou définit le concept de  $\mathbb{V}$ -préfaisceau (ou encore  $\mathbb{V}$ -foncteur vers  $\mathbb{V}$ ), qui est un cas particulier de celui de  $\mathbb{V}$ -passerelle (c'est le cas particulier où la catégorie  $\mathbb{V}$ -prétensorisée, entrant dans la définition, n'est autre que  $\mathbb{V}$  elle même).

**Exemples 5.4.** : 1) Soit  $\mathcal{M} = (M, \eta, \mu)$  une monade sur une catégorie  $\underline{\mathcal{C}}$ . On peut la voir comme un monoïde dans la catégorie monoïdale stricte  $\mathbb{V}$  des endofoncteurs de  $\underline{\mathcal{C}}$ . De plus, on a vu qu'on pouvait faire de  $\underline{\mathcal{C}}$  une catégorie  $\mathbb{V}$ -tensorisée  $\mathbb{C}$  où  $F \wedge X = F(X)$  (voir 2.1(4)). On constate alors que les  $\mathbb{V}$ -passerelles  $\mathcal{M} \rightarrow \mathbb{C}$  correspondent aux algèbres de  $\mathcal{M}$ . On a en fait  $Alg(\mathcal{M}) \simeq \mathbb{V}\text{-Pass}(\mathcal{M}, \mathbb{C})$ .

2) Plus généralement,  $\mathbb{V}$  étant une catégorie monoïdale,  $\mathcal{M}$  un monoïde dans  $\mathbb{V}$  (vu comme catégorie  $\mathbb{V}$ -enrichie à un seul objet  $\star$ ) et  $\mathbb{E}$  une catégorie  $\mathbb{V}$ -tensorisée, on a une équivalence de catégorie  $Alg(\mathcal{M}^\wedge) \simeq \mathbb{V}\text{-Pass}(\mathcal{M}, \mathbb{E})$  (pour la monade  $\mathcal{M}^\wedge$  voir [4]) (On associe à l'algèbre  $(X, a)$  la passerelle

$P = (|P|, \pi)$  où  $|P|(\star) = X$  et  $\pi_{\star\star} = a$ .

3)(voir aussi [1]) Soit maintenant  $\mathbb{V}$  une catégorie monoïdale et  $\mathcal{C}$  une catégorie enrichie dans  $\mathbb{V}$ . Pour chaque  $X \in |\mathcal{C}|$ , on construit une  $\mathbb{V}$ -passerelle  $y^X : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{V}$ . Elle est donnée par  $y^X = (\mathcal{C}(X, -), \pi^X)$  où  $\pi^X$  est la famille  $(\pi_{YZ}^X)_{(Y,Z) \in |\mathcal{C}|^2}$  avec  $\pi_{YZ}^X = (comp : \mathcal{C}(Y, Z) \otimes \mathcal{C}(X, Y) \rightarrow \mathcal{C}(X, Z))$ .

4) Voir la passerelle  $y$  définie plus loin.

• *Foncteur sous-jacent d'une passerelle :*

Soient  $\mathcal{C}$  une catégorie enrichie dans  $\mathbb{V}$  et  $\mathbb{E} = (\underline{E}, \wedge, \dots)$  une catégorie  $\mathbb{V}$ -prétensorisée.  $P : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{E}$  étant maintenant une  $\mathbb{V}$ -passerelle, on lui associe un foncteur  $\underline{P} : \underline{\mathcal{C}} \rightarrow \underline{E}$  (où  $\underline{\mathcal{C}}$  est la catégorie sous-jacente à  $\mathcal{C}$ ). Écrivons  $P = (|P|, \pi)$ . Alors :

- Évidemment  $|\underline{P}| = |P|$ .

- Si maintenant  $f : X \rightarrow Y$  est une flèche de  $\underline{\mathcal{C}}$  (donc  $f : I \rightarrow \mathcal{C}(X, Y)$  est une flèche de  $\mathbb{V}$ ) alors  $\underline{P}(f) : PX \rightarrow PY$  est donné par le composé suivant dans  $\mathbb{E}$ :

$$PX \xrightarrow{s^{-1}} I \wedge PX \xrightarrow{f \wedge Id} \mathcal{C}(X, Y) \wedge PX \xrightarrow{\pi_{XY}} PY$$

En fait, on construit un foncteur canonique  $U : \mathbb{V}\text{-Pass}(\mathcal{C}, \mathbb{E}) \rightarrow [\underline{\mathcal{C}}, \underline{E}]$  où  $U$  est défini sur un objet comme ci-dessus et sur une flèche  $t : P \rightarrow P', U(t)$  est la transformation naturelle  $\underline{P} \rightarrow \underline{P}'$  définie par la famille  $t$  elle même. La functorialité de  $U$  est immédiate.

• *Le distributeur  $\mathbb{V}$ -Pass :*

On cherche à composer les  $\mathbb{V}$ -passerelles à droite et à gauche.

- Pour cela, soient  $\mathcal{C}, \mathcal{C}' \in |\mathbb{V}\text{-Cat}|$  et  $\mathbb{E}, \mathbb{E}' \in |\mathbb{V}\text{-Pretens}|$  et considérons la situation suivante :

$$\mathcal{C}' \xrightarrow{F} \mathcal{C} \xrightarrow{P} \mathbb{E} \xrightarrow{\Phi} \mathbb{E}'$$

où  $F$  est un foncteur  $\mathbb{V}$ -enrichi,  $P = (|P|, \pi)$  une  $\mathbb{V}$ -passerelle et  $\Phi = (f, \phi)$  un morphisme de  $\mathbb{V}\text{-Pretens}$ . À partir de ces données on obtient les  $\mathbb{V}$ -passerelles composées suivantes :

1)  $P.F : \mathcal{C}' \rightarrow \mathbb{E}$  est défini par  $P.F = (|P|.|F|, \pi')$  où, pour  $X', Y' \in |\mathcal{C}'|$ ,  $\pi'_{X'Y'}$  est le composé suivant :

$$\mathcal{C}'(X', Y') \wedge PF(X') \xrightarrow{F_{X'Y'} \wedge Id} \mathcal{C}(F(X'), F(Y')) \wedge PF(X') \xrightarrow{\pi_{FX', FY'}} PF(Y')$$

2)  $\Phi.P : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{E}'$  est défini par  $\Phi.P = (|f|.|P|, \bar{\pi})$  où, pour  $X, Y \in |\mathcal{C}|$ ,  $\bar{\pi}_{XY}$  est le composé suivant :

$$\mathcal{C}(X, Y) \wedge fPX \xrightarrow{\phi} f(\mathcal{C}(X, Y) \wedge PX) \xrightarrow{f\pi_{XY}} fPY$$

- De même au niveau des 2-cellules, si  $t : F_0 \rightarrow F_1 : \mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{C}$  est une 2-cellule de  $\mathbb{V}\text{-Cat}$ ,  $p : P_0 \rightarrow P_1$  une flèche de  $\mathbb{V}\text{-Pass}(\mathcal{C}, \mathbb{E})$  et  $\theta : \Phi_0 \rightarrow \Phi_1 : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}'$  une 2-cellule de  $\mathbb{V}\text{-Pretens}$  (où  $\Phi_i = (f_i, \phi_i)$ ), on obtient les morphismes de  $\mathbb{V}$ -passerelles composés suivants :

1) - Lorsque  $p = Id$  (alors  $P_0 = P_1 = P$ ),  $Id_P.t : P.F_0 \rightarrow P.F_1$  est donné, pour  $X' \in |\mathcal{C}'|$ , par :  $(Id_P.t)_{X'} =$

$$(PF_0X' \xrightarrow{s^{-1}} I \wedge PF_0X' \xrightarrow{t_{X'} \wedge Id} \mathcal{C}(F_0X', F_1X') \wedge PF_0X' \xrightarrow{\bar{\pi}_{F_0X', F_1X'}} PF_1X')$$

- Lorsque  $t = Id$  (où  $F_0 = F_1 = F$ ),  $p.Id_F : P_0.F \rightarrow P_1.F$  est donné, pour  $X' \in |\mathcal{C}'|$ , par  $(p.Id_F)_{X'} = p_{FX'}$ .

2)- Lorsque  $p = Id$  (alors  $P_0 = P_1 = P$ ),  $\theta.Id_P : \Phi_0.P \rightarrow \Phi_1.P$  est donné, pour  $X \in |\mathcal{C}|$ , par  $(\theta.Id_P)_X = \theta_{PX} : f_0PX \rightarrow f_1PX$ .

- Lorsque  $\theta = Id$  (alors  $\Phi_0 = \Phi_1 = \Phi = (f, \phi)$ ),  $Id_\Phi.p : \Phi.P_0 \rightarrow \Phi.P_1$  est donné, pour  $X \in |\mathcal{C}|$ , par  $(Id_\Phi.p)_X = f(p_X) : fP_0X \rightarrow fP_1X$ .

À l'aide de ces différentes constructions on obtient un 2-foncteur :

$$\mathbb{V}\text{-Pass} : (\mathbb{V}\text{-Cat})^{oph} \times (\mathbb{V}\text{-Pretens}) \rightarrow \mathbb{C}at$$

(où  $(-)^{oph}$  signifie qu'on dualise ici la composition horizontale). En d'autres termes on a construit ainsi un 2-distributeur  $\mathbb{V}\text{-Cat} \rightarrow \mathbb{V}\text{-pretens}$ .

**Proposition 5.5.** : Fixons une catégorie  $\mathbb{V}$ -prétensorisée  $\mathbb{E}$ . On suppose que  $\mathbb{E}$  est enrichissable. Alors le 2-préfaisceau  $\mathbb{V}\text{-Pass}(-, \mathbb{E}) : (\mathbb{V}\text{-Cat})^{oph} \rightarrow \mathbb{C}at$  est 2-représentable.

*Preuve* :  $\mathbb{E}$  étant enrichissable, fixons, pour chaque  $X \in |\underline{\mathbb{E}}|$ , un adjoint à droite  $\mathcal{E}(X, -)$  de  $(-) \wedge X$  et  $Ev^X : \mathcal{E}(X, -) \wedge X \rightarrow (-)$  une co-unité de cette adjonction. On note encore  $\mathcal{E}$  la catégorie  $\mathbb{V}$ -enrichie canonique obtenue à l'aide de ces choix.

- On voit immédiatement que  $E = (Id_{|\underline{\mathbb{E}}|}, \varepsilon)$  (où  $\varepsilon = (\varepsilon_{XY})_{X, Y \in |\mathcal{C}|}$  et  $\varepsilon_{XY} = Ev_{Y}^X$ ) est une  $\mathbb{V}$ -passerelle  $\mathcal{E} \rightarrow \mathbb{E}$ .

- Montrons que  $(\mathcal{E}, E)$  est une 2-représentation de  $\mathbb{V}\text{-Pass}(-, \mathbb{E})$ .

Soit  $\mathcal{C} \in |\mathbb{V}\text{-Cat}|$ .

.. Soit aussi  $P = (|P|, \pi) \in |\mathbb{V}\text{-Pass}(\mathcal{C}, \mathbb{E})|$ . Pour chaque  $X, Y \in |\mathcal{C}|$ , considérons  $F_{XY} : \mathcal{C}(X, Y) \rightarrow \mathcal{E}(PX, PY)$  l'unique flèche de  $\mathbb{V}$  telle que le triangle suivant commute dans  $\mathbb{E}$  :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}(X, Y) \wedge PX & \xrightarrow{F_{XY} \wedge Id} & \mathcal{E}(PX, PY) \wedge PX \\ & \searrow \pi_{XY} & \swarrow Ev \\ & & PY \end{array}$$

Montrons que  $F = (|P|, (F_{XY})_{(X,Y) \in |\mathcal{C}|^2})$  définit un  $\mathbb{V}$ -foncteur  $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{E}$ .

... L'axiome des unités est facile à vérifier.

... Pour l'axiome de composition cela résulte des identités suivantes (où  $X, Y, Z \in |\mathcal{C}|$  et  $A = \mathcal{C}(X, Y)$ ,  $B = \mathcal{C}(Y, Z)$ ) :

$$Ev_{PZ}^{PX} \cdot (F_{XZ} \wedge Id_{PX}) \cdot (comp_{XYZ} \wedge Id_{PX}) = \pi_{YZ} \cdot (Id_B \wedge \pi_{XY}) \cdot am_{B,A,PX} = Ev_{PZ}^{PX} \cdot (comp_{PX,PY,PZ} \wedge Id_{PX}) \cdot ((F_{YZ} \otimes F_{XY}) \wedge Id_{PX})$$

On voit immédiatement que  $E.F = P$  et que  $F$  est l'unique  $\mathbb{V}$ -foncteur  $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{E}$  vérifiant cette identité.

.. Soit  $p : P \rightarrow P'$  une flèche de  $\mathbb{V}\text{-Pass}(\mathcal{C}, \mathbb{E})$ . Pour chaque

$X \in |\mathcal{C}|$ , posons  $t_X = \Gamma(p_X)$  et montrons que  $t = (t_X)_{X \in |\mathcal{C}|}$  est une transformation naturelle  $\mathbb{V}$ -enrichie  $F \rightarrow F'$  ( $F$  et  $F'$  étant les uniques  $\mathbb{V}$ -foncteurs tels que  $E.F = P$ ,  $E.F' = P'$ ). Pour cela il faut montrer que pour tout  $X, Y \in |\mathcal{C}|$  le carré suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}(X, Y) & \xrightarrow{F_{XY}} & \mathcal{E}(PX, PY) \\ F'_{XY} \downarrow & & \downarrow \underline{y}^{PX}(t_Y) \\ \mathcal{E}(P'X, P'Y) & \xrightarrow{\underline{y}^{P'Y}(t_X)} & \mathcal{E}(PX, P'Y) \end{array}$$

Or cela résulte des identités suivantes :

$$Ev_{P'Y}^{PX} \cdot (\underline{y}^{PX}(t_Y) \wedge Id_{PX}) \cdot (F_{XY} \wedge Id_{PX}) = t_Y \cdot \pi_{XY} =$$

$Ev_{P'Y}^{PX} \cdot (\underline{y}^{P'Y}(t_X) \wedge Id_{PX}) \cdot (F_{XY} \wedge Id_{PX})$  où pour la première identité on utilise (K1) et pour la seconde c'est (K2).

Enfin, le fait que  $t : F \rightarrow F'$  est l'unique flèche de  $\mathbb{V}\text{-Cat}(\mathcal{C}, \mathcal{E})$  telle que

$$(E.F \xrightarrow{Id_E \cdot t} E.F') = (P \xrightarrow{p} P')$$

**Corollaire 5.6.** :([4])  $\mathbb{V}$  étant une catégorie monoïdale,  $\mathbb{E}$  une catégorie  $\mathbb{V}$ -tensorisée enrichissable et  $\mathcal{M}$  un monoïde dans  $\mathbb{V}$ , alors on a un isomor-

phisme canonique :

$$Alg(\mathcal{M}^\wedge) \simeq \mathbb{V}\text{-Cat}(\mathcal{M}, \mathcal{E})$$

où  $\mathcal{E}$  désigne la catégorie enrichie sur  $\mathbb{V}$  canonique associée à  $\mathbb{E}$ .

*Preuve* : Car  $Alg(\mathcal{M}^\wedge) \simeq \mathbb{V}\text{-Pass}(\mathcal{M}, \mathbb{E}) \simeq \mathbb{V}\text{-Cat}(\mathcal{M}, \mathcal{E})$  où le premier isomorphisme résulte de l'exemple 5.4(2) et le second de la proposition précédente.

• *La passerelle  $y$* :

Fixons une catégorie  $\mathbb{V}$ -enrichie  $\mathcal{C}$ . Montrons que  $\mathbb{V}^*\text{-Pass}(\mathcal{C}^{op}, \mathbb{V}^*)$  a une structure de catégorie  $\mathbb{V}$ -tensorisée (où  $\mathbb{V}^*$  désigne encore la catégorie  $\mathbb{V}^*$ -tensorisée associée à la catégorie monoïdale  $\mathbb{V}^*$ ). Construisons déjà le foncteur  $\wedge : \underline{V} \times (\mathbb{V}^*\text{-Pass}(\mathcal{C}^{op}, \mathbb{V}^*)) \rightarrow \mathbb{V}^*\text{-Pass}(\mathcal{C}^{op}, \mathbb{V}^*)$ ,

- sur un objet  $(A, P)$  (où  $P = (|P|, \pi)$ ),  $A \wedge P = (|A \wedge P|, A \wedge \pi)$  où,

..  $|A \wedge P| : |\mathcal{C}^{op}| \rightarrow |\mathbb{V}^*|, X \mapsto A \otimes P(X)$ ,

.. pour  $X, Y \in |\mathcal{C}^{op}| = |\mathcal{C}|$ ,  $(A \wedge \pi)_{XY}$  est le composé suivant :

$$(A \otimes P(X)) \otimes \mathcal{C}(Y, X) \xrightarrow{ass} A \otimes (P(X) \otimes \mathcal{C}(Y, X)) \xrightarrow{Id \otimes \pi_{XY}} A \otimes P(Y)$$

Ce qui a un sens car  $\mathcal{C}^{op}(X, Y) \otimes^* (A \wedge P)(X) = (A \otimes P(X)) \otimes \mathcal{C}(Y, X)$ ,  $P(X) \otimes \mathcal{C}(Y, X) = \mathcal{C}^{op}(X, Y) \otimes^* P(X)$  et  $A \otimes P(Y) = (A \wedge P)(Y)$ .

- sur une flèche  $(a, p) : (A, P) \rightarrow (A', P')$ ,  $a \wedge p : A \wedge P \rightarrow A' \wedge P'$  est le morphisme de  $\mathbb{V}^*$ -passerelle défini, pour  $X \in |\mathcal{C}^{op}|$ , par

$$((A \wedge P)(X) \xrightarrow{(a \wedge p)_X} (A' \wedge P')(X)) = (A \otimes P(X) \xrightarrow{a \otimes p_X} A' \otimes P'(X)).$$

On obtient la catégorie  $\mathbb{V}$ -tensorisée  $(\mathbb{V}^*\text{-Pass}(\mathcal{C}^{op}, \mathbb{V}^*), \wedge, s, am)$  (où  $s$  et  $am$  proviennent de  $u_g$  et  $ass$  de la catégorie monoïdale  $\mathbb{V}$ ).

On construit maintenant une passerelle  $y : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{V}^*\text{-Pass}(\mathcal{C}^{op}, \mathbb{V}^*)$  en posant  $y = (|y|, \Pi)$  où

-  $|y| : |\mathcal{C}| \rightarrow |\mathbb{V}^*\text{-Pass}(\mathcal{C}^{op}, \mathbb{V}^*)|$  est donné, pour  $X \in |\mathcal{C}|$ ,

par  $|y|(X) = y_X = (|y_X|, \pi_X)$  avec  $|y_X| : |\mathcal{C}^{op}| \rightarrow |\mathbb{V}^*|, Y \mapsto \mathcal{C}(Y, X)$  et,

pour  $(Y, Z) \in |\mathcal{C}^{op}| = |\mathcal{C}|$ ,

$(\pi_X)_{YZ} = comp : \mathcal{C}(Y, X) \otimes \mathcal{C}(Z, Y) \rightarrow \mathcal{C}(Z, X)$  ce qui a un sens car  $\mathcal{C}^{op}(Y, Z) \otimes^* |y_X|(Y) = \mathcal{C}(Y, X) \otimes \mathcal{C}(Z, Y)$  et  $|y_X|(Z) = \mathcal{C}(Z, X)$ .

- Pour  $(X, Y) \in |\mathcal{C}|^2$  et  $Z \in |\mathcal{C}^{op}|$ ,

$$((\mathcal{C}(X, Y) \wedge y_X)(Z) \xrightarrow{(\Pi_{XY})_Z} (y_Y)(Z)) = (\mathcal{C}(X, Y) \otimes \mathcal{C}(Z, X) \xrightarrow{comp} \mathcal{C}(Z, Y))$$

**Références**

- [1] J. BENABOU, *Les catégories multiplicatives*, Rap. Sém. Math. Pure, Louvain, no 27 (1972).
- [2] R. GUITART, *Tenseurs et Machines*, Cahiers de Topologie et Géométrie Différentielle Catégorique ( 1980),volume XXI-1, p.5-62.
- [3] G.M. KELLY, *Basic Concepts of Enriched Category Theory*. vol.64, Cambridge University Press. Lecture Note. (1982).
- [4] J. PENON, *Compatibilité entre deux conceptions d'algèbre sur une opérade*, Cahiers de Topologie et Géométrie Différentielle Catégorique ( 2018),volume LX-3, p.298-310.
- [5] X. ROCHARD, *Théorie tannakienne non additive*, Thèse (1998).
- [6] R.J. WOOD, *Indicial methods for relative categories*, Thesis Dalhousie Univ. at Halifax (1978).

Jacques PENON  
25, rue Chapsal,  
94340, Joinville-le-Pont  
France  
Email : `tryphon.penon@gmail.com`

## *Backsets and Open Access*

All the papers published in the "*Cahiers*" since their creation are freely downloadable on the site of NUMDAM for

Volumes I to VII and Volumes VIII to LII

and, from Volume L up to now on the 2 sites of the "*Cahiers*":

<https://mes-ehres.fr>

<https://cahierstgdc.com/>

Are also freely downloadable the *Supplements* published in 1980-83 :

### *Charles Ehresmann: Œuvres Complètes et Commentées*

These Supplements (edited by Andrée Ehresmann) consist of 7 books collecting all the articles published by the mathematician Charles Ehresmann (1905-1979), who created the Cahiers in 1958. The articles are followed by long comments (in English) to update and complement them.

Part I: 1-2. *Topologie Algébrique et  
Géométrie Différentielle*

Part II: 1. *Structures locales*  
2. *Catégories ordonnées; Applications en Topologie*

Part III: 1. *Catégories structurées et Quotients*  
2. *Catégories internes et Fibrations*

Part IV: 1. *Esquisses et Complétions.*  
2. *Esquisses et structures monoïdales fermées*

Mme Ehresmann, Faculté des Sciences, LAMFA.  
33 rue Saint-Leu, F-80039 Amiens. France. ehres@u-picardie.fr

Tous droits de traduction, reproduction et adaptation réservés pour tous pays.

Commission paritaire n° 58964

ISSN 1245-530X (IMPRIME)

ISSN 2681-2363 (EN LIGNE)

