CAHIERS DE TOPOLOGIE ET GEOMETRIE DIFFERENTIELLE CATEGORIQUES VOLUME LXV-1 (2024)

L'ENRICHISSEMENT ET SES DIFFÉRENTS POINTS DE VUE, I

Jacques PENON

Résumé. $\mathbb{V}$ étant une catégorie monoïdale, il y a trois façons d'enrichir une catégorie dans $\mathbb{V}$. On obtient les trois concepts de 1) catégorie $\mathbb{V}$-*enrichie* (ou $\mathbb{V}$-*catégorie* - voir [3]), 2) catégorie $\mathbb{V}$-*prétensorisée* (voir [1], [5] et [4]), 3) catégorie $\mathbb{V}$-*précotensorisées*. On montre dans cette partie I comment passer des uns aux autres et les équivalences qui en résultent. Dans la partie II on introduira le concept de catégorie *mutante* sur $\mathbb{V}$ (voir [2]) qui généralise les trois concepts précédents. On construira alors les trois plongements 2-pleinement fidèles attendus vers la 2-catégorie des catégories mutantes (sur $\mathbb{V}$).

Abstract. Let $\mathbb{V}$ be a monoidal category. There are three manners to enrich a general category in $\mathbb{V}$. We get the three following concepts :
1) $\mathbb{V}$-enriched category (or $\mathbb{V}$-category - see [3]), 2) $\mathbb{V}$-pretensorised category (see [1], [5] and [4]), 3) $\mathbb{V}$-precotensorised category. In this part I, we show how to pass from one to the other and the equivalences of 2-category which result of them. In the part II we will introduce the concept of *mutant* category on $\mathbb{V}$ (see [2]) for generalise the three concepts come before. We will build three 2-functors full and faithfull to the 2-category of mutant categories (on $\mathbb{V}$).

Keywords. Monoidal category. Enriched category. Bicategory. Fibred category.
Mathematics Subject Classification (2020). 18D20.

Introduction aux deux parties

• Le concept de catégorie monoïdale est particulièrement central en théorie des catégories car il permet une généralisation du concept même de catégorie.

C'est ce que sont les catégories $\mathbb{V}$-enrichies (aussi appelées $\mathbb{V}$-catégories ou catégorie relative dans $\mathbb{V}$ voir [1] et [3]). Comme leur nom l'indique ces "catégories" (généralisées) sont attachées à un $\mathbb{V}$ qui est précisément une catégorie monoïdale. En plus de conserver la plupart des propriétés habituelles des catégories (elles ont d'ailleurs une vraie catégorie sous-jacente) elles vont hériter des particularités de $\mathbb{V}$ qui viennent les étoffer. Elles les "enrichissent" (d'où leur terminologie). Mais, partant toujours d'une même catégorie monoïdale $\mathbb{V}$, il y a d'autres façon d'enrichir une catégorie comme par exemple en faisant opérer $\mathbb{V}$ sur cette catégorie (à la façon d'un monoïde opérant sur un ensemble). Ce concept, moins connu, appelé "Action à gauche de $\mathbb{V}$ sur une catégorie" (voir [1]), ou encore"$\mathbb{V}$-module" (voir [5]) ou "catégorie $\mathbb{V}$-tensorisée" (voir [4]) n'est pas sans rapport avec les catégories $\mathbb{V}$-enrichies et l'on peut passer d'un concept à l'autre selon les propriétés "universelles" de ceux-ci.
Mais avant d'aborder techniquement ces questions dans les chapitres qui vont suivre il est important de préciser un peu ce que l'on veut dire.

• (*Partie I*) — Pour une catégorie enrichie $\mathcal{C}$ dans une catégorie monoïdale $\mathbb{V} = (\underline{V}, I, \otimes, ...)$ deux éventualités s'offrent à elle. Elle peut être " à tenseurs" ou " à cotenseurs".
— Si on envisage la première possibilité, on constate que $\mathbb{V}$ se met à opérer (à gauche) sur la catégorie $\underline{\mathcal{C}}$ sous-jacente à $\mathcal{C}$. De façon plus précise, on a un foncteur "produit tensoriel extérieur" $\wedge : \underline{V} \times \underline{\mathcal{C}} \to \underline{\mathcal{C}}$ et deux familles naturelles de flèches $s_X : I \wedge X \to X$ et $am_{A,B,X} : (A \otimes B) \wedge X \to A \wedge (B \wedge X)$ (où $\forall X \in |\underline{\mathcal{C}}|, s_X$ est inversible) vérifiant des axiomes de cohérence copiés sur ceux des catégories monoïdales.
— De même, si on s'intéresse à la deuxième possibilité, c'est $\underline{V}^{op}$ qui opère à droite sur la catégorie $\underline{\mathcal{C}}$. Là encore, de façon plus précise, on a un foncteur "Hom interne" $H : \underline{\mathcal{C}} \times \underline{V}^{op} \to \underline{\mathcal{C}}$ (Notons $X^A = H(X, A)$) et deux familles naturelles de flèches $\sigma_X : X \to X^I$ et $\alpha m_{A,B,X} : (X^B)^A \to X^{B \otimes A}$ (où $\forall X \in |\underline{\mathcal{C}}|, \sigma_X$ est inversible) vérifiant des axiomes de cohérence "duaux" de ceux signalés précédemment.

On a appelé catégorie $\mathbb{V}$-*prétensorisée* une catégorie quelconque $\underline{E}$ munie d'un foncteur $\wedge : \underline{V} \times \underline{E} \to \underline{E}$ et de deux familles de flèches (s_X) et $(am_{A,B,X})$ comme ci-dessus, vérifiant les axiomes de cohérence signalés plus haut. De même, on a appelé catégorie $\mathbb{V}$-*précotensorisée* une catégorie quelconque $\underline{E}$ munie d'un foncteur $H : \underline{E} \times \underline{V}^{op} \to \underline{E}$ et de deux familles de flèches (σ_X) et $(\alpha m_{A,B,X})$ comme ci-dessus, vérifiant les axiomes de cohérence comme signalés précédemment.

Mais, chose surprenante, ces deux structures, la prétensorisée et la précotensorisée, n'ont pas oublié le caractère enrichi dont elles sont issues.
En effet, si pour une catégorie $\mathbb{V}$-prétensorisée $\underline{E}$, on nomme *enrichissable* celle pour laquelle, pour tout X de $|\underline{E}|$ le foncteur $(-) \wedge X : \underline{V} \to \underline{E}$ admet un adjoint à droite, ou si pour une catégorie $\mathbb{V}$-précotensorisée $\underline{E}$, on nomme aussi *enrichissable*, celle pour laquelle, pour tout X de $|\underline{E}|$ le foncteur $X^{(-)}$: $\underline{V}^{op} \to \underline{E}$ admet un adjoint à gauche, alors dans chaque cas on construit canoniquement une catégorie enrichie $\mathcal{E}$ sur $\mathbb{V}$ telle que $\underline{\mathcal{E}} \simeq \underline{E}$. De la même façon, les caractères précotensorisée ou prétensorisée sont aussi présent potentiellement pour les catégories $\mathbb{V}$-prétensorisées ou $\mathbb{V}$-précotensorisées. En effet, $\mathbb{E} = (\underline{E}, \wedge, ...)$ étant une catégorie $\mathbb{V}$-prétensorisée, si on convient d'appeler *cotensorisable* celle pour lequel, pour tout A de $|\underline{V}|$ le foncteur $A \wedge (-) : \underline{E} \to \underline{E}$ admet un adjoint à droite, on construit, dans cette situation, une structure précotensorisée canonique sur $\underline{E}$. De même, pour une catégorie $\mathbb{V}$-précotensorisée $\mathbb{E} = (\underline{E}, H, ...)$, on dit qu'elle est *tensorisable* si pour tout A de $|\underline{V}|$ le foncteur $(-)^A : \underline{E} \to \underline{E}$ admet un adjoint à gauche. Là encore on construit, dans cette catégorie, une structure prétensorisée canonique sur $\underline{E}$.

On résume tout ce qui vient d'être dit avec le schéma suivant :

$$\begin{tikzcd}
& \boxed{\text{cat. enrich.}} \arrow[dl, shift left, "\text{à } tens."] \arrow[dr, shift right, "\text{à } cotens."'] & \\
\boxed{\text{cat. prétens.}} \arrow[ur, shift left, "enrichissable"] \arrow[rr, shift left, "cotensorisable"] & & \boxed{\text{cat. précot.}} \arrow[ul, shift right, "enrichissable"'] \arrow[ll, shift left, "tensorisable"]
\end{tikzcd}$$

En observant ce schéma on ne peut que constater que les trois concepts précédents décrivent en fait une même "idée" sous différentes formes (ou présentations).
Cette impression se confirme encore en constatant qu'on peut faire des morphismes "mixtes" c'est- à-dire entre deux présentations différentes. On donne le cas particulier qui suit, qu'on a appelé une $\mathbb{V}$-*passerelle* P entre une catégorie $\mathbb{V}$-enrichie $\mathcal{C}$ et une catégorie $\mathbb{V}$-prétensorisée $\mathbb{E}$. C'est la donnée

d'une application $|P| : |\mathcal{C}| \to |\mathbb{E}|$ et d'une famille de flèches de $\mathbb{E}$,

$$(\mathcal{C}(X, Y) \wedge |P|(X) \to |P|(Y))$$

qui, comme les foncteurs que ces donnés généralisent, préservent l'identité et commutent avec la composition (voir I, section 5).

• (*Partie II*) — À ce stade de réflexion sur cette "idée d'enrichissement" commune aux trois concepts précédemment étudiés il était impératif de lui donner un sens mathématique. Un nouveau concept s'impose. Nous lui avons donné le nom de *catégorie mutante* (sur $\mathbb{V}$) (René Guitart l'avait appelé *bicatégorie* $\mathbb{V}$*-graduée* voir [2]). En voici une définition précise :
C'est la donnée $\mathcal{B}$:
— d'une bicatégorie $\mathbb{B}$,
— d'un morphisme strict de bicatégorie $U : \mathbb{B} \to \mathbb{V}$ (où la catégorie monoïdale $\mathbb{V}$ est vue comme une bicatégorie à un objet $\star$, ses flèches (resp. 2-cellules) sont les objets (resp.flèches) de la catégorie monoïdale).
Ces deux données sont astreintes à vérifier l'axiome suivant : Pour tout $X, Y \in |\mathbb{B}|$, le foncteur $U_{XY} : \mathbb{B}(X, Y) \to \mathbb{V}(UX, UY) = \mathbb{V}(\star, \star) = \underline{V}$ est une fibration discrète.
Comme on l'espérait, les catégories $\mathbb{V}$-enrichies, les catégories $\mathbb{V}$-prétensorisées et les catégories $\mathbb{V}$-précotensorisées forment des classes d'exemples de catégories mutantes. On dit de celles-ci que ce sont des exemples de base de catégories mutantes. Mais chose étonnante, on montre que tout catégorie fibrée $\mathbb{E}$ sur une catégorie de base $\underline{B}$ à produits fibrés donne à chacune de ses fibres $\mathbb{E}_B$ une structure de catégorie mutante sur la catégorie cartésienne (donc monoïdale) $\underline{B}/B$.
L'étude des catégories mutantes apporte aussi son lot de surprises. On construit ainsi sur chacune d'elle une composition (dite) stricte entre les flèches de $\underline{\mathcal{B}}$ (ce sont les flèches de $\mathbb{B}$ qui s'envoient sur I par U) avec les autres flèches de $\mathbb{B}$ (composition à droite ou à gauche). En effet cette composition est strictement associative et a strictement une unité à droite et à gauche. En particulier $\underline{\mathcal{B}}$ forme une catégorie qu'on appelle la catégorie sous-jacente à $\mathcal{B}$. Puis on construit canoniquement un foncteur $Tri : \underline{V}^{op} \times \underline{\mathcal{B}}^{op} \times \underline{\mathcal{B}} \to \mathbb{E}ns$. Ce foncteur Tri va permettre de définir trois spécificités possibles pour une catégorie mutante (on les appelle des "saveurs" en prenant exemple sur la physique des particules). Ces trois saveurs sont l'*enrichie*, la *tensorisée* et

la *cotensorisée*. Évidemment, les trois exemples de base de catégories mutantes ont des saveurs homonymes. De façon précise. Après avoir remarqué que les catégories $\mathbb{V}$-enrichies, les $\mathbb{V}$-tensorisées, les $\mathbb{V}$-cotensorisées et les mutantes sur $\mathbb{V}$, forment chacune d'elles une 2-catégorie notée respectivement $\mathbb{V}\text{-}Cat, \mathbb{V}\text{-}Pretens, \mathbb{V}\text{-}Precot$ et $Cat\mu(\mathbb{V})$, on construit des plongements 2-pleinement fidèles $\mu e : \mathbb{V}\text{-}Cat \to Cat\mu(\mathbb{V}), \mu t : \mathbb{V}\text{-}Pretens \to Cat\mu(\mathbb{V})$ et $\mu c : \mathbb{V}\text{-}Precot \to Cat\mu(\mathbb{V})$. On plonge aussi les $\mathbb{V}$-passerelles dans $Cat\mu(\mathbb{V})$. Remarquons enfin que, pour une catégorie fibrée $\mathbb{E}$ sur une catégorie $\underline{B}$ à produits fibrés, alors $\mathbb{E}$ est localement petite ssi pour tout $B \in |\underline{B}|, \mathbb{E}_B$, en tant que catégorie mutante sur $\underline{B}/B$, est de saveur enrichie.

Remerciements

Je voudrais remercier l'université catholique de Louvain la Neuve de m'avoir permis d'exposer pour la première fois, en mars 2019, les grandes lignes de ce travail.
Je tiens aussi à remercier E. Dubuc qui, après m'avoir fait découvrir l'article de X.Rochard, m'a signalé sa définition des $\mathbb{V}$-modules à Hom internes. En réalisant que ceux-ci ne correspondaient pas avec les catégories $\mathbb{V}$-tensorisées enrichissables cela m'a incité à développer la théorie des catégories $\mathbb{V}$-tensorisées pour aboutir au travail présenté ici.

PARTIE I
VUE D'ENSEMBLE DE L'ENRICHISSEMENT

Sommaire

1. Catégories enrichies à tenseurs

Fixons au départ une catégorie monoïdale $\mathbb{V} = (\underline{V}, I, \otimes, u_g, u_d, ass)$ et donnons nous, pour commencer, une catégorie enrichie $\mathcal{C}$ dans $\mathbb{V}$. Notons $\underline{\mathcal{C}}$ la catégorie sous-jacente à $\mathcal{C}$ et :

Pour chaque $X \in |\mathcal{C}|$, $\underline{y}^X : \underline{\mathcal{C}} \to \underline{V}$ et $\underline{y}_X : \underline{\mathcal{C}}^{op} \to \underline{V}$ les foncteurs définis...
- sur un objet $Y \in |\underline{\mathcal{C}}|$, par $\underline{y}^X(Y) = \mathcal{C}(X,Y)$ et $\underline{y}_X(Y) = \mathcal{C}(Y,X)$.
- sur une flèche $f : Y \to Y'$ de $\mathcal{C}$ (soit une flèche $f : I \to \mathcal{C}(Y,Y')$ de $\mathbb{V}$), $\underline{y}^X(f)$ est le composé suivant :

$$\mathcal{C}(X,Y) \xrightarrow{u_g} I \otimes \mathcal{C}(X,Y) \xrightarrow{f \otimes Id} \mathcal{C}(Y,Y') \otimes \mathcal{C}(X,Y) \xrightarrow{comp} \mathcal{C}(X,Y') \ .$$

Similairement $\underline{y}_X(f)$ est le composé suivant :

$$\mathcal{C}(Y',X) \xrightarrow{u_d} \mathcal{C}(Y',X) \otimes I \xrightarrow{Id \otimes f} \mathcal{C}(Y',X) \otimes \mathcal{C}(Y,Y') \xrightarrow{comp} \mathcal{C}(Y,X) \ .$$

Rappelons maintenant les définitions suivantes :

Définition 1.1. : 1) On dit que $\mathcal{C}$ est *à tenseurs* si pour tout $X \in |\mathcal{C}|$ le foncteur $\underline{y}^X : \underline{\mathcal{C}} \to \underline{V}$ admet un adjoint à gauche (On fixe $(-) \wedge X : \underline{V} \to \underline{\mathcal{C}}$ un adjoint à gauche et $\eta^X : Id_{\underline{V}} \to \underline{y}^X(- \wedge X)$ une unité de l'adjonction).
2) On dit que $\mathcal{C}$ est *à cotenseurs* si pour tout $X \in |\mathcal{C}|$ le foncteur $\underline{y}_X : \underline{\mathcal{C}}^{op} \to \underline{V}$ admet un adjoint à gauche (On fixe $X^{(-)} : \underline{V} \to \underline{\mathcal{C}}^{op}$ un adjoint à gauche et $\varepsilon^X : Id_{\underline{V}} \to \underline{y}_X(X^{(-)})$ une unité de l'adjonction).

Proposition 1.2. : On suppose $\mathcal{C}$ à tenseurs. Alors on peut munir $\underline{\mathcal{C}}$ des données suivantes:
1) Un foncteur $\wedge : \underline{V} \times \underline{\mathcal{C}} \to \underline{\mathcal{C}}$,
2) Deux familles naturelles de flèches $(I \wedge X \xrightarrow{s_X} X)_{X \in |\mathcal{C}|}$ et $((A \otimes B) \wedge X \xrightarrow{am_{A,B,X}} A \wedge (B \wedge X))_{(A,B,X) \in |\underline{V} \times \underline{V} \times \underline{\mathcal{C}}|}$.
Ces données satisfont les propriétés suivantes :
a) Les flèches s_X sont inversibles.
b) Pour tout $A \in |\underline{V}|$ et $X \in |\underline{\mathcal{C}}|$ les deux triangles suivants commutent:

$$\begin{tikzcd}
(I \otimes A) \wedge X \arrow[rr, "am"] \arrow[dr, "u_g \wedge Id"'] & & I \wedge (A \wedge X) \arrow[dl, "s"] \\
& A \wedge X &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
(A \otimes I) \wedge X \arrow[rr, "am"] \arrow[dr, "u_d \wedge Id"'] & & A \wedge (I \wedge X) \arrow[dl, "Id \wedge s"] \\
& A \wedge X &
\end{tikzcd}$$

c) Pour tout $A, B, C \in |\underline{V}|$ et $X \in |\underline{\mathcal{C}}|$ le diagramme suivant commute:

$$\begin{tikzcd}
((A \otimes B) \otimes C) \wedge X \arrow[rr, "ass \wedge Id"] \arrow[d, "am"'] & & (A \otimes (B \otimes C)) \wedge X \arrow[d, "am"] \\
(A \otimes B) \wedge (C \wedge X) \arrow[dr, "am"'] & & A \wedge ((B \otimes C)) \wedge X) \arrow[dl, "Id \wedge am"] \\
& A \wedge (B \wedge (C \wedge X)) &
\end{tikzcd}$$

Preuve : - Commençons par construire le foncteur $\wedge : \underline{V} \times \underline{\mathcal{C}} \to \underline{\mathcal{C}}$. On connait déjà pour chaque $X \in |\underline{\mathcal{C}}|$, $(-) \wedge X : \underline{V} \to \underline{\mathcal{C}}$. Définissons maintenant, pour chaque $A \in |\underline{V}|$, $A \wedge (-) : \underline{\mathcal{C}} \to \underline{\mathcal{C}}$. Sur une flèche $x : X \to X'$ de $\underline{\mathcal{C}}$, $Id \wedge x : A \wedge X \to A \wedge X'$ est l'unique flèche de $\underline{\mathcal{C}}$ qui rend le carré suivant commutatif dans $\underline{V}$:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\eta_A^{X'}"] \arrow[d, "\eta_A^X"'] & \mathcal{C}(X', A \wedge X') \arrow[d, "\underline{y}_{A \wedge X'}(x)"] \\
\mathcal{C}(X, A \wedge X) \arrow[r, "\underline{y}^X(Id \wedge x)"'] & \mathcal{C}(X, A \wedge X')
\end{tikzcd}$$

$\wedge$ se définit alors sur une flèche quelconque $(a, x) : (A, X) \to (A', X')$ en posant

$A \wedge X \xrightarrow{a \wedge x} A' \wedge X' \;=\; A \wedge X \xrightarrow{a \wedge Id} A' \wedge X \xrightarrow{Id \wedge x} A' \wedge X' \;=$

$A \wedge X \xrightarrow{Id \wedge x} A \wedge X' \xrightarrow{a \wedge Id} A' \wedge X'$

Cette dernière identité résulte des identités suivantes :

$\underline{y}^X(Id \wedge x).\underline{y}^X(a \wedge Id).\eta_A^X = \underline{y}_{A' \wedge X'}(x).\eta_{A'}^{X'}.a = \underline{y}^X(a \wedge Id).\underline{y}^X(Id \wedge x).\eta_A^X$

où la seconde identité résulte de cette autre identité dénotée $(I1)$: pour tout $(x, y) : (X, Y) \to (X', Y')$ de $\underline{\mathcal{C}} \times \underline{\mathcal{C}}$:

$$\underline{y}_{Y'}(x).\underline{y}^{X'}(y) \underset{I1}{=} \underline{y}^X(y).\underline{y}_Y(x)$$

La fonctorialité de $\wedge$ résulte de celles de $(-) \wedge X$ et $A \wedge (-)$ (La fonctorialité de $A \wedge (-)$ résulte aussi de l'identité $(I1)$ ci-dessus).

- Pour construire s_X, pour chaque $X \in |\mathcal{C}|$, et montrer que c'est un isomorphisme, il suffit de montrer que $(X, id_X : I \to \mathcal{C}(X, X))$ est un objet libre

associé à I, pour le foncteur $\underline{y}^X$. $s_X : I \wedge X \to X$ est alors l'unique flèche de $\underline{\mathcal{C}}$ qui vérifie l'identité $\underline{y}^X(s_X).\eta_I^X = id_X$. La naturalité de s_X en X se montre sans difficulté.
- Pour chaque $(A, B, X) \in |\underline{V} \times \underline{V} \times \underline{\mathcal{C}}|$,
$am_{A,B,X} : (A \otimes B) \wedge X \to A \wedge (B \wedge X)$ est l'unique flèche de $\underline{\mathcal{C}}$ qui fait commuter le carré suivant dans $\underline{V}$:

$$\begin{tikzcd}
A \otimes B \arrow[r, "\eta_A^{B \wedge X} \otimes \eta_B^X"] \arrow[d, "\eta^X_{A \otimes B}"'] & \mathcal{C}(B \wedge X, A \wedge (B \wedge X)) \otimes \mathcal{C}(X, B \wedge X) \arrow[d, "comp"] \\
\mathcal{C}(X, (A \otimes B) \wedge X) \arrow[r, "\underline{y}^X(am_{A,B,X})"'] & \mathcal{C}(X, A \wedge (B \wedge X))
\end{tikzcd}$$

- La naturalité de am se montre sur les trois types de flèche suivants : $(a, Id, Id), (Id, b, Id), (Id, Id, x)$ où a, b sont dans $\underline{V}$ et x est dans $\underline{\mathcal{C}}$. On utilise pour chacun d'eux les identités suivantes $(I2)$, $(I3)$ et $(I4)$, où
$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} T$ sont des flèches de $\underline{\mathcal{C}}$:

$$comp_{X,Y,T}.(\underline{y}^Y(h) \otimes Id_{\mathcal{C}(X,Y)}) \underset{I2}{=} \underline{y}^X(h).comp_{X,Y,Z}$$

$$comp_{X,Z,T}.(Id_{\mathcal{C}(Z,T)} \otimes \underline{y}^X(g)) \underset{I3}{=} comp_{X,Y,T}.(\underline{y}_T(g) \otimes Id_{\mathcal{C}(X,Y)})$$

$$comp_{X,Z,T}.(Id_{\mathcal{C}(Z,T)} \otimes \underline{y}_Z(f) \underset{I4}{=} \underline{y}_T(f).comp_{Y,Z,T}$$

.. Pour le premier type de flèche, cela résulte des identités suivantes :
$\underline{y}^X(am).\underline{y}^X((a \otimes Id) \wedge Id).\eta^X_{A \otimes B} = comp.(\eta_{A'}^{B \wedge X} \otimes .\eta_B^X).(a \otimes Id) =$
$\underline{y}^X(a \wedge (Id \wedge Id)).\underline{y}^X(am).\eta^X_{A \otimes B}$ où la seconde identité résulte de $(I2)$.
.. Pour le second type de flèche, cela résulte de :
$\underline{y}^X(am).\underline{y}^X((Id \otimes b) \wedge Id).\eta^X_{A \otimes B} = comp.(\eta_A^{B' \wedge X} \otimes \eta_{B'}^X).(Id \otimes b) =$
$\underline{y}^X(Id \wedge (b \wedge Id)).\underline{y}^X(am).\eta^X_{A \otimes B}$ où la seconde identité résulte de $(I2)$ et $(I3)$.
.. Pour le troisième type de flèche, cela résulte de :
$\underline{y}^X(am).\underline{y}^X(Id \wedge x).\eta^X_{A \otimes B} = \underline{y}_{A \wedge (B \wedge X')}(x).comp.(\eta_A^{B \wedge X'} \otimes .\eta_B^{X'}) =$
$\underline{y}^X(Id \wedge (Id \wedge x)).\underline{y}^X(am).\eta^X_{A \otimes B}$ où la première identité résulte de $(I1)$ et la seconde identité résulte de$(I2)$, $(I3)$ et $(I4)$.
- La commutation des triangles du (b):
.. Pour le premier triangle, cela résulte des identités suivantes :

$\underline{y}^X(u_g \wedge Id).\eta^X_{I\otimes A} = \eta^X_A.u_g = \underline{y}^X(s).\underline{y}^X(am).\eta^X_{I\otimes A}$ où la seconde identité résulte de $(I2)$.
.. Pour le deuxième triangle, cela résulte des identités suivantes :
$\underline{y}^X(u_d \wedge Id).\eta^X_{A\otimes I} = \eta^X_A.u_d = \underline{y}^X(Id \wedge s).\underline{y}^X(am).\eta^X_{A\otimes I}$où la seconde identité résulte de $(I2)$.
- Pour montrer la commutation du pentagone du (c). Notons f_g (resp. f_d) la flèche composée de gauche (resp. droite) provenant du pentagone. L'identité $f_g = f_d$ va résulter des identités successives suivantes, avec $T = C \wedge X$, et $U = B \wedge (C \wedge X), V = A \wedge (B \wedge (C \wedge X)), W = (B \otimes C) \wedge X$:
$\underline{y}^X(f_d).\eta^X_{(A\otimes B)\otimes C} =$
$comp_{X,U,V}.(Id_{\mathcal{C}(U,V)} \otimes \underline{y}^X(am_{B,C,X})).(\eta^U_A \otimes \eta^X_{B\otimes C}).ass_{A,B,C} =$
$comp_{X,T,V}.(comp_{T,U,V} \otimes Id_{\mathcal{C}(X,T)}).((\eta^U_A \otimes \eta^T_B) \otimes \eta^X_C) = \underline{y}^X(f_g).\eta^X_{(A\otimes B)\otimes C}$.
où la première identité résulte de $(I2)$ et $(I3)$ et la troisième identité résulte de$(I2)$.

Proposition 1.3. :Soient $\mathcal{C}, \mathcal{C}' \in |\mathbb{V}\text{-}Cat|$. On suppose $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ à tenseurs.
1) On se donne en plus un foncteur enrichi $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$. Notons $\underline{F} : \underline{\mathcal{C}} \to \underline{\mathcal{C}'}$ son foncteur sous-jacent (on utilise aussi les données $\wedge$, s et am construites à la proposition précédente). $\underline{F}$ est alors muni d'une famille naturelle $(\phi_{A,X} : A \wedge F(X) \to F(A \wedge X))_{(A,X)\in|\underline{V}\times\underline{\mathcal{C}}|}$ satisfaisant les conditions :
(Ms) Pour tout $X \in |\mathcal{C}|$ le triangle suivant commute :

$$\begin{tikzcd}
I \wedge F(X) \arrow[rr, "\phi_{I,X}"] \arrow[dr, "s_{FX}"'] & & F(I \wedge X) \arrow[dl, "F(s_X)"] \\
& FX &
\end{tikzcd}$$

(Mam) Pour tout $A, B \in |\underline{V}|$ et $X \in |\mathcal{C}|$, le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd}
(A \otimes B) \wedge FX \arrow[rr, "am"] \arrow[d, "\phi"'] & & A \wedge (B \wedge FX) \arrow[d, "Id\wedge\phi"] \\
F((A \otimes B) \wedge X) \arrow[dr, "\underline{F}(am)"'] & & A \wedge F(B \wedge X) \arrow[dl, "\phi"] \\
& F(A \wedge (B \wedge X)) &
\end{tikzcd}$$

2) On se donne cette fois, une transformation naturelle enrichie $t : F \to F' : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$. Alors, la transformation naturelle sous-jacente vérifie la condition suivante :
$(C\phi)$ Pour tout $A \in |\underline{V}|$ et $X \in |\mathcal{C}|$, le carré suivant commute :

$$\begin{tikzcd} A \wedge FX \arrow[r, "Id \wedge t_X"] \arrow[d, "\phi"'] & A \wedge F'X \arrow[d, "\phi'"] \\ F(A \wedge X) \arrow[r, "t_{A\wedge X}"'] & F'(A \wedge X) \end{tikzcd}$$

Preuve : 1) Soient $A \in |\underline{V}|$ et $X \in |\mathcal{C}|$. On définit $\phi_{A,X}$ comme l'unique flèche $A \wedge F(X) \to F(A \wedge X)$ dans $\underline{\mathcal{C}'}$ qui rend commutatif le carré suivant dans $\mathbb{V}$:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\eta_A^X"] \arrow[d, "\eta_A^{FX}"'] & \mathcal{C}(X, A \wedge X) \arrow[d, "F_{X,A\wedge X}"] \\ \mathcal{C}'(FX, A \wedge FX) \arrow[r, "\underline{y}^{FX}(\phi_{A,X})"'] & \mathcal{C}'(FX, F(A \wedge X)) \end{tikzcd}$$

- La naturalité de ϕ se montre sur les deux types de flèche suivants : (a, Id) et (Id, x) où a est dans $\underline{V}$ et x est dans $\underline{\mathcal{C}}$. On utilise pour chacun d'eux les identités suivantes, $(J1)$ et $(J2)$, où $X \xrightarrow{x} Y \xrightarrow{y} Z$ sont dans $\mathcal{C}$:

$$F_{X,Z}.\underline{y}^X(y) \underset{J1}{=} \underline{y}^{FX}(\underline{F}y).F_{X,Y}$$

$$F_{X,Z}.\underline{y}_Z(x) \underset{J2}{=} \underline{y}_{FZ}(\underline{F}x).F_{Y,Z}$$

Plus précisemment,
.. Pour le premier type de flèche, cela résulte des identités suivantes :
$\underline{y}^{FX}(\underline{F}(a \wedge Id)).\underline{y}^{FX}(\phi).\eta_A^{FX} = F_{X,A'\wedge X}.\eta_{A'}^X.a = \underline{y}^{FX}(\phi).\underline{y}^{FX}(a \wedge Id).\eta_A^{FX}$
où la première identité résulte de $(J1)$.
.. Pour le second type de flèche, cela résulte de :
$\underline{y}^{FX}(\underline{F}(Id \wedge x)).\underline{y}^{FX}(\phi).\eta_A^{FX} = F_{X,A\wedge X'}.\underline{y}_{A\wedge X'}(x).\eta_A^{X'} =$
$\underline{y}^{FX}(\phi).\underline{y}^{FX}(Id \wedge \underline{F}(x)).\eta_A^{FX}$ où la première identité résulte de $(J1)$ et la seconde identité résulte de$(I1)$ et $(J2)$.
- La propriété (Ms) résulte des l'identités suivantes :

$\underline{y}^{FX}(\underline{F}(s_X)).\underline{y}^{FX}(\phi_{I,X}).\eta_I^{FX} = id_{FX} = \underline{y}^{FX}(s_{FX}).\eta_I^{FX}$, où la première identité résulte de $(J1)$.
- La propriété (Mam) résulte des identités suivantes :
$\underline{y}^{FX}(\underline{F}(am)).\underline{y}^{FX}(\phi).\eta_{A\otimes B}^{FX} =$
$comp.(\underline{y}^{F(B\wedge X)}(\phi) \otimes \underline{y}^{FX}(\phi)).(\eta_A^{F(B\wedge X)} \otimes \eta_B^{FX}) =$
$\underline{y}^{FX}(\phi).\underline{y}^{FX}(Id\wedge\phi).\underline{y}^{FX}(am).\eta_{A\otimes B}^{FX}$, où la première identité résulte de $(J1)$ et la seconde identité résulte de$(I1),(I2),(I3)$.
2) La commutation de $(C\phi)$ résulte des l'identités suivantes.
$\underline{y}^{FX}(t_{A\wedge X}).\underline{y}^{FX}(\phi).\eta_A^{FX} = \underline{y}_{F'(A\wedge X)}(t_X).\underline{y}^{F'X}(\phi').\eta_A^{F'X} =$
$\underline{y}^{FX}(\phi').\underline{y}^{FX}(Id \wedge t_X).\eta_A^{FX}$ où la seconde identité résulte de $(I1)$.

• Ces deux propositions nous conduisent à donner les définitions suivantes :

Définition 1.4. :1) On appelle catégorie $\mathbb{V}$-*prétensorisée (à gauche)* la donnée $\mathbb{E}$:
- d'une catégorie $\underline{E}$,
- d'un foncteur $\wedge : \underline{V} \times \underline{E} \to \underline{E}$,
- de deux familles de flèches : $(I \wedge X \xrightarrow{s_X} X)_{X\in|\underline{E}|}$ et
$((A \otimes B) \wedge X \xrightarrow{am_{A,B,X}} A \wedge (B \wedge X))_{(A,B,X)\in|\underline{V}\times\underline{V}\times\underline{E}|}$.
Ces données sont astreintes à satisfaire les propriétés $(a),(b)$ et (c) de la proposition 1.2 . Lorsque, pour tout A,B,X, $am_{A,B,X}$ est inversible, on dit que $\mathbb{E}$ est $\mathbb{V}$-tensorisée (voir [4] et [5]).
2) $\mathbb{E},\mathbb{E}'$ étant des catégories $\mathbb{V}$-prétensorisées, un morphisme $\mathbb{E} \to \mathbb{E}'$ est la donnée :
- d'un foncteur $F : \underline{E} \to \underline{E}'$,
- d'une famille de flèches $(\phi_{A,X} : A \wedge F(X) \to F(A \wedge X))_{(A,X)\in|\underline{V}\times\underline{E}|}$ de $\mathbb{E}'$, qui est naturelle en (A,X).
Ces données doivent satisfaire les propriétés (Ms) et (Mam) de la proposition 1.3.
3) $(F,\phi),(F',\phi') : \mathbb{E} \to \mathbb{E}'$ étant deux morphismes entre catégories $\mathbb{V}$-prétensorisées, un 2-morphisme $t : (F,\phi) \to (F',\phi')$ est la donnée d'une transformation naturelle $t : F \to F'$ vérifiant la propriété $(C\phi)$ de la proposition 1.3.

Remarque 1.5. : X. Rochard définit aussi des morphismes entre ses $\mathbb{V}$-modules (sa terminologie pour les catégories $\mathbb{V}$-tensorisées). Ils correspondent aux morphismes (F, ϕ) entre catégories $\mathbb{V}$-tensorisées pour lesquels la transformation naturelle ϕ est inversible (voir [5]).

• À partir de ces données on construit une 2-catégorie, notée $\mathbb{V}$-$Pretens$. Les propositions précédentes nous permettent de construire un 2-foncteur $\Phi : \mathbb{V}\text{-}ET \to \mathbb{V}\text{-}Pretens$, où $\mathbb{V}$-ET est la sous-2-catégorie pleine de $\mathbb{V}$-Cat formée des catégories enrichies à tenseurs (On note de même $\mathbb{V}$-EC la sous-2-catégorie pleine de $\mathbb{V}$-Cat formée des catégories enrichies à co-tenseurs). En fait, la vérification que $\mathbb{V}$-$Pretens$ est une 2-catégorie et que Φ est un 2-foncteur est quasi-immédiate, à l'exception de la commutation de Φ avec la composition. Dans ce cas, si $\mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{C}' \xrightarrow{F'} \mathcal{C}"$ sont des flèches de $\mathbb{V}$-ET, alors l'identité $\Phi(F'.F) = \Phi(F').\Phi(F)$ résulte de l'identité suivante :
$\underline{y}^{F'FX}(\underline{F'}\phi).\underline{y}^{F'FX}(\phi'_{A,FX}).\eta_A^{F'FX} = F'_{FX,F(A\wedge X)}.F_{X,A\wedge X}.\eta_A^X$ où on utilise l'identité $(J1)$.

Nous allons maintenant, dans la section suivante, nous efforcer de suivre une démarche allant en sens inverse.

2. Les catégories $\mathbb{V}$-prétensorisées

Les catégories $\mathbb{V}$-prétensorisées (Déf. 1.4) généralisent donc les catégories $\mathbb{V}$-tensorisées (voir [5] et [4]).

Exemple 2.1. :1) Nous venons de voir que toute catégorie $\mathbb{V}$-enrichie à tenseurs génère un exemple de catégorie $\mathbb{V}$-prétensorisée. À cette occasion, donnons un exemple de catégorie $\mathbb{V}$-enrichie $\mathcal{C}$ telle que $\Phi(\mathcal{C})$ n'est pas $\mathbb{V}$-tensorisée (i.d. ses flèches $am_{A,B,X}$ ne sont pas nécessairement inversibles dans $\underline{\mathcal{C}}$) :
- Partons d'un espace topologique E. alors $\mathcal{P}(E)$ (l'ensemble des parties de E) est un ensemble ordonné. On peut donc le voir comme une catégorie qui est même à produits (avec l'intersection) donc monoïdale. L'ensemble $\mathcal{F}$ des parties fermées de E peut lui aussi être vu comme une catégorie. C'est même une catégorie enrichie dans $\mathcal{P}(E)$ en posant pour $F, F' \in \mathcal{F}$, $\mathcal{F}(F, F') = F^c \cup F'$ (où F^c est le complémentaire de F dans E). Cette catégorie enrichie est à tenseurs et on voit que pour tout $A \in \mathcal{P}(E)$ et $F \in \mathcal{F}$, $A \wedge F = \overline{A \cap F}$ (l'adhérence de $A \cap F$ dans E). $\mathcal{F}$ muni de $\wedge : \mathcal{P}(E) \times \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ est donc

une catégorie prétensorisée où $s_F = Id$. Par contre pour $A, B \in \mathcal{P}(E)$ et $F \in \mathcal{F}$, l'inclusion $(A \cap B) \wedge F \subset A \wedge (B \wedge F)$ qui n'est autre que la flèche $am_{A,B,F}$, n'est pas toujours un isomorphisme (ici une identité). Il suffit de prendre $E = \mathbb{R}$ (muni de la topologie usuelle). $A = \mathbb{Q},\ B = \mathbb{Q}^c$ et $F = [0, 1]$. Alors $(A \cap B) \wedge F = \varnothing$ et $A \wedge (B \wedge F) = [0, 1]$.
2) Soit $\mathbb{B}$ une bicatégorie. Fixons deux objets $X, Y \in |\mathbb{B}|$. Alors $\mathbb{B}(Y, X)$ a une structure de catégorie. Notons la $\underline{E}$ (où la composition provient de la composition verticale de $\mathbb{B}$) et $\mathbb{B}(X, X)$ a une structure de catégorie monoïdale. Notons-la $\mathbb{V}$ (où le produit tensoriel provient de la composition horizontale de $\mathbb{B}$). Le foncteur $\wedge : \underline{V} \times \underline{E} \to \underline{E}$ provient lui aussi de la composition horizontale de $\mathbb{B}$. La transformation naturelle s est une restriction du u_g de $\mathbb{B}$ et am est une restriction de l'associativité de $\mathbb{B}$. On obtient ainsi une catégorie $\mathbb{V}$-tensorisée.
3) Un cas particulier de l'exemple précédent est obtenu en prenant pour $\mathbb{B}$ une catégorie monoïdale $\mathbb{V}$ (Notons $\star$ l'unique objet de la bicatégorie). Ainsi $\mathbb{V}$ devient une catégorie $\mathbb{V}$-tensorisée en prenant $X = Y = \star$. On retrouve l'exemple 1 donné dans [4](2.3).
4) Un deuxième cas particulier est obtenu en prenant $\mathbb{B} = \mathbb{C}at$, $X = \underline{C}$ dans $|\mathbb{C}at|$ et $Y = \underline{1}$ ("la" catégorie finale). Si on identifie $\mathbb{B}(Y, X) = [\underline{1}, \underline{C}] \simeq \underline{C}$, on retrouve l'exemple donné dans [4] (exemple 2). Cet exemple est aussi signalé dans [1].
5) Redonnons l'exemple 3 de [4](2.3). $\underline{E}$ étant une catégorie à limites à gauche finies et $\mathbb{M} = (M, \eta, \mu)$ une monade cartésienne sur $\underline{E}$. On sait que $\underline{E}/M(1)$ peut être muni d'une structure monoïdale $\mathbb{V}$ où $I = (1, \eta_1)$ et pour $(C, \pi), (C', \pi') \in |\mathbb{V}|$, $(C, \pi) \otimes (C', \pi') = (\hat{C}, \hat{\pi})$ où $\hat{C}$ est le produit fibré de $C \xrightarrow{\pi} M(1) \xleftarrow{M!} M(C')$, et où

$$\hat{\pi} = (\ \hat{C} \xrightarrow{proj} M(C') \xrightarrow{M(\pi')} M^2(1) \xrightarrow{\mu_1} M(1)\ ).$$

On fait de $\underline{E}$ une catégorie $\mathbb{V}$-tensorisée où pour $(C, \pi) \in |\mathbb{V}|$ et $X \in |\underline{E}|$, $(C, \pi) \wedge X$ est le produit fibré de $C \xrightarrow{\pi} M(1) \xleftarrow{M!} M(X)$.
6) Soit $\underline{B}$ une catégorie à produits fibrés et $\mathbb{E}$ une catégorie fibrée sur $\underline{B}$. On suppose que pour tout $f : X \to Y$ de $\underline{B}$, le foncteur changement de base $f^* : \mathbb{E}_Y \to \mathbb{E}_X$ admet un adjoint à gauche (noté f_*). Alors, pour tout $B \in |\underline{B}|$, $\underline{B}/B$ est une catégorie cartésienne donc monoïdale et la fibre $\mathbb{E}_B$ a une structure de catégorie $\underline{B}/B$-prétensorisée, où pour $(A, a) \in |\underline{B}/B|$ et

$X \in |\mathbb{E}_B|$ on prend $(A, a) \wedge X = a_* a^*(X)$.

Remarques 2.2. : 1) Dans l'exemple 6, la fibre $\mathbb{E}_B$ qui est une catégorie $\underline{B}/B$-prétensorisée (sous les hypothèses proposées dans l'exemple) n'est pas toujours $\underline{B}/B$-tensorisée (comme contre-exemple on peut, en s'inspirant de l'exemple (1) précédent, considérer le foncteur $\mathcal{P}(E)^{op} \to \underline{Cat},\ A \mapsto F(A)$ où E est un espace topologique et $F(A)$ est l'ensemble des parties fermées de A, vu comme sous-espace topologique de E).
2) Lorsqu'en plus la catégorie fibrée $\mathbb{E}$ vérifie le critère de Beck, alors pour tout $B \in |\underline{B}|$, $\mathbb{E}_B$ est une catégorie $\underline{B}/B$-tensorisée, car $am_{(A,f),(B',b),X}$ s'exprime à l'aide de la transformation naturelle canonique $a_* f'^* \to f^* b_*$ résultant du carré cartésien suivant dans $\underline{B}$:

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "a"'] & B' \arrow[d, "b"] \\ A \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

Définition 2.3. :On dit qu'une catégorie $\mathbb{V}$-prétensorisée $\mathbb{E} = (\underline{E}, \wedge, ...)$ est *enrichissable* si pour tout $X \in |\underline{E}|$, le foncteur $(-) \wedge X : \underline{V} \to \underline{E}$ admet un adjoint à droite. On note $(-)^X$ le choix d'un adjoint à droite et $Ev^X : (-)^X \wedge X \to (-)$ celui d'une co-unité de cette adjonction.

• On note $\mathbb{V}$-TE la sous-2-catégorie pleine de $\mathbb{V}$-$Pretens$ ayant pour objets les catégories $\mathbb{V}$-prétensorisées enrichissables. Pour avoir des exemples nous renvoyons à [4].

Proposition 2.4. :Si $\mathbb{E}$ est enrichissable il existe une structure de catégorie $\mathbb{V}$-enrichie canonique $\mathcal{E}$ et un isomorphisme $\Gamma : \underline{E} \to \underline{\mathcal{E}}$.

<u>*Preuve*</u> : Même preuve que dans [4] (section 2) où $\mathcal{E}(X, Y) = (-)^X(Y)$ Pour la construction de Γ, on a : $|\Gamma| = Id$ et, pour toute flèche $f : X \to Y$ de $\underline{E}$, $\Gamma(f) : I \to \mathcal{E}(X, Y)$ est l'unique flèche de $\underline{V}$ telle que le carré suivant commute :

$$\begin{tikzcd} I \wedge X \arrow[r, "\Gamma(f)\wedge Id"] \arrow[d, "s"'] & \mathcal{E}(X,Y) \wedge X \arrow[d, "Ev"] \\ X \arrow[r, "f"'] & Y \end{tikzcd}$$

Proposition 2.5. : 1) Soient $\mathbb{E}$ et $\mathbb{E}'$ deux catégories $\mathbb{V}$-prétensorisées enrichissables et $(F, \phi) : \mathbb{E} \to \mathbb{E}'$ un morphisme. Alors, il existe un foncteur $\mathbb{V}$-enrichi canonique $\mathcal{F} : \mathcal{E} \to \mathcal{E}'$, faisant commuter le carré suivant :

$$\begin{tikzcd} \underline{E} \arrow[r, "F"] \arrow[d, "\Gamma"'] & \underline{E'} \arrow[d, "\Gamma'"] \\ \underline{\mathcal{E}} \arrow[r, "\underline{\mathcal{F}}"'] & \underline{\mathcal{E}'} \end{tikzcd}$$

où $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ sont les catégories $\mathbb{V}$-enrichies canoniques associées à $\mathbb{E}$ et $\mathbb{E}'$.
2) Soient maintenant $(F, \phi), (F', \phi') : \mathbb{E} \to \mathbb{E}'$ deux morphismes et $t : (F, \phi) \to (F', \phi')$ une cellule. Alors, il existe une transformation naturelle $\mathbb{V}$-enrichie canonique $\theta : \mathcal{F} \to \mathcal{F}' : \mathcal{E} \to \mathcal{E}'$, vérifiant l'identité suivante :$Id_{\Gamma'}.t = \underline{\theta}.Id_{\Gamma}$, où $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$ sont les foncteurs $\mathbb{V}$-enrichis canoniques associés à (F, ϕ) et (F', ϕ').

__Preuve__ : 1) Construisons $\mathcal{F}$. On pose $|\mathcal{F}| = |F|$. Puis, pour X, Y dans $|\mathcal{E}| = |\underline{E}|$ on considère l'unique flèche $\mathcal{F}_{XY} : \mathcal{E}(X, Y) \to \mathcal{E}'(FX, FY)$ de $\underline{V}$ qui fait commuter le carré suivant :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{E}(X,Y) \wedge FX \arrow[r, "\mathcal{F}_{XY} \wedge Id"] \arrow[d, "\phi"'] & \mathcal{E}'(FX,FY) \wedge FX \arrow[d, "Ev"] \\ F(\mathcal{E}(X,Y) \wedge X) \arrow[r, "F(Ev)"'] & FY \end{tikzcd}$$

On vérifie facilement que $\mathcal{F}_{XX}.id_X = id_{FX}$. (On utilise l'axiome (Ms)).
Pour la vérification de l'identité :
$comp_{FX,FY,FZ}.(\mathcal{F}_{YZ} \otimes \mathcal{F}_{XY} = \mathcal{F}_{XZ}.comp_{X,Y,Z}$, on montre les identités suivantes (où $A = \mathcal{E}(X, Y), B = \mathcal{E}(Y, Z), U = \mathcal{E}(X, Y) \wedge X$):
$Ev^{FX}_{FZ}.(\mathcal{F}_{XZ} \wedge Id_{FX}).(comp_{X,Y,Z} \wedge Id_{FX}) =$
$F(Ev^{Y}_{Z}).F(Id_A \wedge Ev^{X}_{Y}).\phi_{B,U}.(Id_B \wedge \phi_{A,X}).am_{B,A,FX} =$
$Ev^{FX}_{FZ}.(comp_{FX,FY,FZ} \wedge Id_{FX}).(\mathcal{F}_{YZ} \otimes \mathcal{F}_{XY}) \wedge Id_{FX}$. (pour la première identité on utilise (Mam)).
La vérification de la commutation du carré proposé se fait sans difficulté.
2) Construisons θ. Pour tout $X \in |\mathcal{E}| = |\underline{E}|$, on pose $\theta_X = \Gamma(t_X)$ (voir la proposition précédente). On montre ensuite que θ est une transformation naturelle enrichie.

Pour la vérification de l'identité :
$\underline{y}^{FX}(\theta_Y).\mathcal{F}_{XY} = \underline{y}_{F'Y}(\theta_X).\mathcal{F}'_{XY}$, on utilise les propriétés $(K1)$ et $(K2)$:

$$\underline{y}^X\Gamma(f) \underset{K1}{=} \mathcal{E}(Id_X, f), \ \ \underline{y}_X\Gamma(f) \underset{K2}{=} \mathcal{E}(f, Id_X),$$

pour tout $f : Y \to Y'$ dans $\underline{E}$, puis on montre les identités suivantes (où $A = \mathcal{E}(X, Y)$) :
$Ev^{FX}_{F'Y}.(\mathcal{E}'(Id_{FX}, t_Y) \wedge Id_{FX}).(\mathcal{F}_{XY} \wedge Id_{FX}) = F'(Ev^X_Y).t_{A\wedge X}.\phi_{A,X} = Ev^{FX}_{F'Y}.(\mathcal{E}'(t_X, Id_{F'Y}) \wedge Id_{FX}.(\mathcal{F}'_{XY} \wedge Id_{FX})$,
où pour la seconde identité on utilise $(C\phi)$. La vérification de l'identité donnée dans l'énoncé se fait sns difficulté.

• À partir des deux propositions précédentes on construit canoniquement un 2-foncteur $\Psi : \mathbb{V}\text{-}TE \to \mathbb{V}\text{-}Cat$ (la vérification de la 2-fonctorialité se fait sans difficulté). En fait, on constate que pour tout $\mathbb{E} \in |\mathbb{V}\text{-}TE|, \Psi(\mathbb{E})$ est à tenseurs. On le voit en remarquant que, pour tout $X \in |\underline{E}|$ le triangle (T) suivant commute :

$$\begin{tikzcd}
\underline{E} \arrow[rr, "\Gamma"] \arrow[dr, "\mathcal{E}(Id_X,-)"'] & & \mathcal{E} \arrow[dl, "\underline{y}^X"] \\
& \underline{V} &
\end{tikzcd}$$

On peut alors restreindre Ψ à $\mathbb{V}\text{-}TE \to \mathbb{V}\text{-}ET$. De façon symétrique on constate que pour tout $\mathcal{C} \in |\mathbb{V}\text{-}ET|, \Phi(\mathcal{C})$ est enrichissable (immédiat) et donc qu'on peut aussi restreindre Φ à $\mathbb{V}\text{-}ET \to \mathbb{V}\text{-}TE$.

Proposition 2.6. :La paire de 2-foncteurs Φ et Ψ produit une 2-équivalence

$$\mathbb{V}\text{-}ET \cong \mathbb{V}\text{-}TE.$$

Preuve : 1) Pour l'isomorphie $\Psi.\Phi \simeq Id$: Soit $\mathcal{C} \in |\mathbb{V}\text{-}ET|$ et posons $(\underline{\mathcal{C}}, \wedge, s, am) = \Phi(\mathcal{C})$ et $\hat{\mathcal{C}} = \Psi\Phi(\mathcal{C})$. Comme, pour tout $X \in |\mathcal{C}|$,
$\underline{y}^X : \underline{\mathcal{C}} \to \underline{V}$ est un adjoint à gauche de $(-)\wedge X : \underline{V} \to \underline{\mathcal{C}}$, il existe un isomorphisme canonique $\gamma^X : \underline{y}^X \to \hat{\mathcal{C}}(Id_X, -)$. Cela nous permet de construire un isomorphisme $\mathbb{V}$-enrichi $\gamma_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \to \hat{\mathcal{C}}$ (où $|\gamma_{\mathcal{C}}| = Id$ et $(\gamma_{\mathcal{C}})_{XY} = \gamma^X_Y$). La vérification de l'identité $\gamma^X_X.id_X = \hat{id}_X$ se fait sans difficulté. Pour l'identité $\hat{comp}_{X,Y,Z}.(\gamma^Y_Z \otimes \gamma^X_Y) = \gamma^X_Z.comp_{X,Y,Z}$, on montre les identités suivantes (où $A = \mathcal{C}(X, Y), B = \mathcal{C}(Y, Z)$) :
$\hat{Ev}^X_Y.(\gamma^X_Z \wedge Id_X).(comp_{X,Y,Z} \wedge Id_X) = Ev^Y_Z.(Id_B \wedge Ev^X_Y).am_{B,A,X} =$

$\hat{Ev}_Y^X.(co\hat{m}p_{X,Y,Z} \wedge Id_X).(\gamma_Z^Y \otimes \gamma_Y^X) \wedge Id_X$.
Pour montrer que $\gamma_{\mathcal{C}}$ est naturel en $\mathcal{C}$, on montre que pour tout foncteur $\mathbb{V}$-enrichi $\mathcal{F} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ on a les identités suivantes (où $A = \mathcal{C}(X,Y)$ et $\underline{\mathcal{F}}$ est le foncteur sous-jacent à $\mathcal{F}$) :
$\hat{Ev}_{\mathcal{F}Y}^{\mathcal{F}X}.(\hat{\mathcal{F}}_{XY} \wedge Id_{\mathcal{F}X}).(\gamma_Y^X \wedge Id_{\mathcal{F}X}) = \underline{\mathcal{F}}(Ev_Y^X).\phi_{A,X} =$
$Ev_{FY}^{FX}.(\mathcal{F}_{XY} \wedge Id_{FX}) = \hat{Ev}_{\mathcal{F}Y}^{\mathcal{F}X}.(\gamma_Y^X \wedge Id_{\mathcal{F}X}).(\mathcal{F}_{XY} \wedge Id_{\mathcal{F}X})$.
La seconde identité résulte des l'identités
$\underline{y}^{\mathcal{F}X}(Ev_{\mathcal{F}Y}^{\mathcal{F}X}).\underline{y}^{\mathcal{F}X}(\mathcal{F}_{XY} \wedge Id_{\mathcal{F}X}).\eta_A^{\mathcal{F}X} = \mathcal{F}_{XY} =$
$\underline{y}^{\mathcal{F}X}\underline{\mathcal{F}}(Ev_Y^X).\underline{y}^{\mathcal{F}X}(\phi_{A,X}).\eta_A^{\mathcal{F}X}$ où, la encore, la seconde identité résulte de $(J1)$.
Pour la 2-naturalité en $\mathcal{C}$ de $\gamma_{\mathcal{C}}$, on montre que pour toute transformation naturelle enrichie $t : \mathcal{F} \to \mathcal{F}' : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ on a, pour tout $X \in |\mathcal{C}|$:
$(\hat{t}.Id_\gamma)_X = \hat{t}_X = \underline{\gamma}(t_X) = (Id_\gamma.t)_X$ (où $\gamma = \gamma_{\mathcal{C}}$ ou $\gamma_{\mathcal{C}'}$ et $\hat{t} = \Psi\Phi(t)$). La deuxième égalité résulte des identités suivantes :
$\hat{Ev}_{\mathcal{F}'X}^{\mathcal{F}X}.(\gamma_{\mathcal{F}X\mathcal{F}'X} \wedge Id_{\mathcal{F}X}).(t_X \wedge Id_{\mathcal{F}X}) = Ev_{\mathcal{F}'X}^{\mathcal{F}X}.(t_X \wedge Id_{\mathcal{F}X}) = t_X.s_{FX} =$
$\hat{Ev}_{\mathcal{F}'X}^{\mathcal{F}X}.(\hat{t}_X \wedge Id_{\mathcal{F}X})$.
La deuxième de ces nouvelles identités résultant elle-même des identités :
$\underline{y}^{\mathcal{F}X}(Ev_{\mathcal{F}'X}^{\mathcal{F}X}).\underline{y}^{\mathcal{F}X}(t_X \wedge Id_{\mathcal{F}X}).\eta_I^{\mathcal{F}X} = t_X = \underline{y}^{\mathcal{F}X}(t_X).\underline{y}^{\mathcal{F}X}(s_{\mathcal{F}X}).\eta_I^{\mathcal{F}X}$.

2) Pour l'isomorphisme $\Phi.\Psi \simeq Id$: Soit $\mathbb{E} \in |\mathbb{V}\text{-}TE|$. Notons $\mathcal{E} = \Psi(\mathbb{E})$ et $(\underline{\mathcal{E}}, \underline{\wedge}, \underline{s}, \underline{am}) = \Phi(\mathcal{E})$. À cause de la commutation du triangle (T) (voir les commentaires avant cette proposition), on voit que, pour tout $X \in |\underline{E}|$, il existe un isomorphisme $\theta^X : (-)\underline{\wedge}X \to \Gamma.(-) \wedge X : \underline{V} \to \underline{\mathcal{E}}$. En fait, pour $(A,X) \in |\underline{V} \times \underline{E}|$, $\theta_A^X : A\underline{\wedge}X \to A \wedge X$ est naturel en (A,X). Pour cela on montre que, pour toute flèche $x : X \to X'$ de $\mathbb{E}$, on a les identités suivantes :
$\underline{y}^X\Gamma(Id_A \wedge x).\underline{y}^X(\theta_A^X).\bar{\eta}_A^X = \mathcal{E}(x, Id_{A\wedge X'}).\eta_A^{X'} = \underline{y}^X(\theta_A^{X'}).\underline{y}^X(Id_A\underline{\wedge}\Gamma x).\bar{\eta}_A^X$.
Dans la première identité on utilise $(K1)$ et pour la deuxième on utilise $(K2)$ et $(I1)$. On montre ensuite que $(\Gamma, \theta) : \mathbb{E} \to \Phi\Psi(\mathbb{E})$ est un morphisme de $\mathbb{V}$-$Pretens$. L'axiome (Ms) se montre facilement. Pour (Mam), il faut montrer que, pour $A, B \in |\underline{V}|$ et $X \in |\underline{E}|$, on a l'identité :
$\theta_A^{B\wedge X}.Id_A\underline{\wedge}\theta_B^X.\underline{am}_{A,B,\Gamma X} = \Gamma(am_{A,B,X}).\theta_{A\otimes B}^X$. Cela va résulter des identités suivantes (où $Y = B \wedge X$, $Z = A \wedge (B \wedge X)$, $\underline{Y} = B\underline{\wedge}X$, $U = \mathcal{E}(X, \underline{Y})$) :
$\underline{y}^X\Gamma(am_{A,B,X}).\underline{y}^X(\theta_{A\otimes B}^X).\bar{\eta}_{A\otimes B}^X = comp_{X,Y,Z}.(\eta_A^Y \otimes \eta_B^X) =$

$comp_{X,\underline{Y},Z}.(\underline{y}_Z(\theta^X_B) \otimes Id_U).(\eta^Y_A \otimes Id_U).(Id_A \otimes \bar{\eta}^X_B) =$
$\underline{y}^X(\theta^Y_A).\underline{y}^X(Id_A \underline{\triangle} \theta^X_B).\underline{y}^X(\underline{am}_{A,B,X}).\bar{\eta}^X_{A\otimes B}.$
Dans la première identité on utilise $(K1)$, dans la seconde on utilise $(I3)$ et dans la troisième $(I1)$ et $(I2)$.
(Γ, θ) dépendant de $\mathbb{E}$, renotons le $\Gamma_{\mathbb{E}}$. Pour montrer la naturalité en $\mathbb{E}$ de $\Gamma_{\mathbb{E}}$ il faut montrer que pour toute flèche $(F, \phi) : \mathbb{E} \to \mathbb{E}'$ de $\mathbb{V}$-TE, le carré suivant commute:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{E} \arrow[r, "(F,\phi)"] \arrow[d, "\Gamma_{\mathbb{E}}"'] & \mathbb{E}' \arrow[d, "\Gamma_{\mathbb{E}'}"] \\ \hat{\mathbb{E}} \arrow[r, "(\underline{\mathcal{F}},\hat{\phi})"'] & \hat{\mathbb{E}}' \end{tikzcd}$$

où on a noté $\hat{\mathbb{E}} = \Phi\Psi(\mathbb{E})$, $\mathcal{F} = \Psi(F, \phi)$, $(\underline{\mathcal{F}}, \hat{\phi}) = \Phi(\mathcal{F})$. La commutation au niveau des foncteurs sous-jacents a déjà été signalée (voir la proposition 2.5). Il faut ensuite vérifier que pour tout $A \in |\underline{V}|$ et $X \in |\underline{E}|$ le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} A\underline{\triangle}\Gamma F(X) \arrow[r, "Id"] \arrow[d, "\theta^{FX}_A"'] & A\underline{\triangle}\underline{\mathcal{F}}\Gamma(X) \arrow[r, "\hat{\phi}_{A,\Gamma X}"] & \underline{\mathcal{F}}(A\underline{\triangle}\Gamma X) \arrow[d, "\underline{\mathcal{F}}(\theta^X_A)"] \\ \Gamma(A \wedge FX) \arrow[r, "\Gamma\phi_{A,X}"] & \Gamma F(A \wedge X) \arrow[r, "Id"] & \underline{\mathcal{F}}\Gamma(A \wedge X) \end{tikzcd}$$

Pour cela, on montre les identités suivantes :
$\underline{y}^{FX}\Gamma\phi_{A,X}.\underline{y}^{FX}(\theta^{FX}_A).\bar{\eta}^{FX}_A = F_{X,A\wedge X}.\eta^X_A = \underline{y}^{FX}\underline{\mathcal{F}}(\theta^X_A).\underline{y}^{FX}(\hat{\phi}_{A,X}).\bar{\eta}^{FX}_A.$
Dans la première identité on utilise $(K1)$ et dans la seconde on utilise $(J1)$.
- La 2-naturalité de $\Gamma_{\mathbb{E}}$, en $\mathbb{E}$, est immédiate à vérifier.
- Enfin, le fait que $\Gamma_{\mathbb{E}}$ est inversible dans $\mathbb{V}$-TE résulte du lemme suivant :

Lemme 2.7. :Si $(F, \phi) : \mathbb{E} \to \mathbb{E}'$ est une flèche de $\mathbb{V}$-$Pretens$ telle que F et ϕ sont des isomorphismes, alors (F, ϕ) est inversible.

Preuve : (du lemme) L'inverse de (F, ϕ) est (F^{-1}, ψ) où pour (A, X') dans $|\underline{V} \times \underline{E'}|$, $\psi_{A,X'} = F^{-1}(\phi^{-1}_{A,F^{-1}X'})$. La vérification de (Ms) se fait sans difficulté et pour (Mam) on utilise le fait que (F, ϕ) vérifie (Mam) et la naturalité de ϕ^{-1}.

3. Les catégories $\mathbb{V}$-précotensorisées

Définition 3.1. :Soit $\mathbb{E} = (\underline{E}, \wedge, s, am)$ une catégorie $\mathbb{V}$-prétensorisée. On dit qu'elle est *cotensorisable* si, pour tout $A \in |\underline{V}|$ le foncteur $A \wedge (-) : \underline{E} \to \underline{E}$ admet un adjoint à droite. On fixe $(-)^A : \underline{E} \to \underline{E}$, un adjoint à droite et $ev^A : A \wedge (-)^A \to (-)$ une co-unité à cette adjonction.

Remarque 3.2. : Dans [5] les catégories $\mathbb{V}$-tensorisées qui sont cotensorisables sont appelées des $\mathbb{V}$-modules à Hom internes.

Proposition 3.3. :On suppose que $\mathbb{E}$ est cotensorisable. Alors on peut munir $\underline{E}$ des données suivantes :
1) un foncteur $H : \underline{E} \times \underline{V}^{op} \to \underline{E}$,
2) deux familles naturelles de flèches $(\sigma_X : X \to H(X, I))_{X \in |\underline{E}|}$ et $(\alpha m_{X,A,B} : H(H(X, A), B) \to H(X, A \otimes B))_{(X,A,B) \in |\underline{E} \times \underline{V} \times \underline{V}|}$.
Ces données satisfont les propriétés suivantes :
a) Les flèches σ_X sont inversibles.
b) Pour tout $A \in |\underline{V}|$ et $X \in \underline{E}$ les deux triangles suivants commutent :

$$\begin{tikzcd} & H(X,A) \arrow[dl, "\sigma"'] \arrow[dr, "H(Id,u_d)"] & \\ H(H(X,A),I) \arrow[rr, "\alpha m"'] & & H(X, A \otimes I) \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} & H(X,A) \arrow[dl, "H(\sigma,Id)"'] \arrow[dr, "H(Id,u_g)"] & \\ H(H(X,I),A) \arrow[rr, "\alpha m"'] & & H(X, I \otimes A) \end{tikzcd}$$

c) Pour tout $A, B, C \in |\underline{V}|$ et $X \in |\underline{E}|$ le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} & H(H(H(X,A),B),C) \arrow[dl, "\alpha m"'] \arrow[dr, "H(\alpha m,Id)"] & \\ H(H(X,A),B \otimes C) \arrow[d, "\alpha m"'] & & H(H(X,A \otimes B),C) \arrow[d, "\alpha m"] \\ H(X, A \otimes (B \otimes C)) \arrow[rr, "H(Id,ass)"'] & & H(X,(A \otimes B) \otimes C) \end{tikzcd}$$

Dans la suite on notera $X^A = H(X, A)$ et $x^a = H(x, a)$.

Preuve : - Commençons par construire le foncteur $H : \underline{E} \times \underline{V}^{op} \to \underline{E}$. Pour tout $A \in |\underline{V}|$ on pose déjà $H(-, A) = (-)^A : \underline{E} \to \underline{E}$. Définissons maintenant, pour chaque $X \in \underline{E}$, $H(X, -) : \underline{V}^{op} \to \underline{E}$. Sur une flèche $a : A \to A'$ de $\underline{V}$, $H(Id_X, a) : X^{A'} \to X^A$ est l'unique flèche de $\underline{E}$ telle que le carré suivant commute :

$$\begin{tikzcd}
A \wedge X^{A'} \arrow[r, "Id \wedge H(Id,a)"] \arrow[d, "a \wedge Id"'] & A \wedge X^A \arrow[d, "ev"] \\
A' \wedge X^{A'} \arrow[r, "ev"'] & X
\end{tikzcd}$$

H se définit alors sur une flèche quelconque $(x, a) : (X, A) \to (X', A')$ de $\underline{E} \times \underline{V}^{op}$ en posant : $(X^A \xrightarrow{H(x,a)} X'^{A'}) = (X^A \xrightarrow{H(Id,a)} X^{A'} \xrightarrow{H(x,Id)} X'^{A'}) =$ $(X^A \xrightarrow{H(x,Id)} X'^A \xrightarrow{H(Id,a)} X'^{A'})$.

La dernière égalité résultant des identités suivantes :
$ev^{A'}_{X'}.(Id_{A'} \wedge H(x, Id_{A'})).(Id_{A'} \wedge H(Id_X, a)) = x.ev^A_X.(a \wedge Id_{H(X,A)}) =$ $ev^{A'}_{X'}.(Id_{A'} \wedge H(Id_{X'}, a)).(Id_{A'} \wedge H(x, Id_A))$.

La fonctorialité de $H(X, -)$ pour un couple de flèches $A \xrightarrow{a} A' \xrightarrow{a'} A''$, résulte des identités suivantes : $ev^A_X.(Id_A \wedge H(Id_X, a)).(Id_A \wedge H(Id_X, a')) =$ $ev^{A''}_X.((a'.a) \wedge Id_{H(X,A'')}) = ev^A_X.(Id_A \wedge H(Id_X, a'.a))$. La fonctorialité de H résulte de celles de $H(-, A)$ et $H(X, -)$.

- Pour construire σ_X, pour chaque $X \in |\underline{E}|$, et montrer que c'est un isomorphisme, il suffit de monter que le couple $(X, s^I_X : I \wedge X \to X)$ est un objet co-libre associé à X pour le foncteur $I \wedge (-)$.

σ_X est alors l'unique flèche de $\underline{E}$ qui fait commuter le triangle suivant :

$$\begin{tikzcd}
I \wedge X \arrow[rr, "Id \wedge \sigma_X"] \arrow[dr, "s_X"'] & & I \wedge X^I \arrow[dl, "ev"] \\
& X &
\end{tikzcd}$$

La naturalité de σ sur une flèche $x : X \to X'$ résulte des identités suivantes $ev^I_{X'}.(Id_I \wedge H(x, Id_I)).(Id_I \wedge \sigma_X) = x.s_X = ev^I_{X'}.(Id_I \wedge \sigma_{X'}).(Id_I \wedge x)$.

- Pour chaque $(X, A, B) \in |\underline{E} \times \underline{V}^{op} \times \underline{V}^{op}|$,

$\alpha m_{X,A,B} : H(H(X,A),B) \to H(X, A \otimes B)$ est l'unique flèche de $\underline{E}$ pour laquelle le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd}
(A \otimes B) \wedge H(H(X,A),B) \arrow[rr, "Id\wedge\alpha m"] \arrow[d, "am"'] & & (A \otimes B) \wedge H(X, A \otimes B) \arrow[dd, "ev"] \\
A \wedge (B \wedge H(H(X,A),B)) \arrow[dr, "Id\wedge ev"'] & & \\
& A \wedge H(X,A) \arrow[r, "ev"'] & X
\end{tikzcd}$$

La naturalité de αm se montre sur les flèches $(x, Id, Id), (Id, a, Id)$, (Id, Id, b) de $\underline{E} \times \underline{V}^{op} \times \underline{V}^{op}$ où $x : X \to X', a : A \to A', b : B \to B'$. Mais, si on pose $C = A \otimes B, Y = H(X,A), Z = H(H(X,A),B)$, $Y' = H(X,A'), Z' = H(H(X,A'),B), Z" = H(H(X,A),B')$, celles-ci résultent :

.. Pour la première flèche, des identités suivantes :
$ev^C_{X'}.(Id_C \wedge H(x, Id_C)).(Id_C \wedge \alpha m_{X,A,B}) = x.ev^A_X.(Id_A \wedge ev^B_Y).am_{A,B,Z} = ev^C_{X'}.(Id_C \wedge \alpha m_{X',A,B}).(Id_C \wedge H(H(x, Id_A), Id_B))$.

.. Pour la seconde flèche, des identités :
$ev^C_X.(Id_C \wedge H(Id_X, a \otimes Id_B)).(Id_C \wedge \alpha m_{X,A',B}) =$
$ev^{A'}_X.(Id_{A'} \wedge ev^B_{Y'}).am_{A',B,Z'}.((a \otimes Id_B) \wedge Id_{Z'}) =$
$ev^{A'}_X.(a \wedge Id_{Y'}).(Id_A \wedge ev^B_{Y'}).am_{A,B,Z'} =$
$ev^C_X.(Id_C \wedge \alpha m_{X,A,B}).(Id_C \wedge H(H(Id_X, a), Id_B))$.

.. Pour la troisième flèche :
$ev^C_X.(Id_C \wedge H(Id_X, Id_A \otimes b)).(Id_C \wedge \alpha m_{A,B,Z"}) =$
$ev^A_X.(Id_A \wedge ev^{B'}_Y).am_{A,B',Z"}.((Id_A \otimes b) \wedge Id_{Z"}) =$
$ev^C_X.(Id_C \wedge \alpha m_{X,A,B}).(Id_C \wedge H(H(Id_X, Id_A), b))$.

- Vérifions maintenant les propriétés $(b), (c)$ de l'énoncé après avoir posé $A' = I \otimes A, Y = H(X,A), A" = A \otimes I, D = A \otimes B, E = (A \otimes B) \otimes C$, $Z = H(H(X,A),B), T = H(H(H(X,A),B,C), F = B \otimes C$.

.. Pour (b)(deuxième triangle), cela résulte des identités suivantes :
$ev^{A'}_X.(Id_{A'} \wedge \alpha m_{X,I,A}).(Id_{A'} \wedge \sigma_A) = ev^A_X.(u_{g,A} \wedge Id_Y) =$
$ev^{A'}_X.(Id_{A'} \wedge H(Id_X, u_{g,A}))$.

.. Pour (b)(premier triangle), cela résulte de :
$ev^{A"}_X.(Id_{A"} \wedge \alpha m_{X,A,I}).(Id_{A"} \wedge \sigma_A) = ev^A_X.(u_{d,A} \wedge Id_Y) =$

$ev_X^{A"}.(Id_{A"} \wedge H(Id_X, u_{d,A}))$.
.. Pour (c), on montre les identités suivantes :
$ev_X^E.(Id_E \wedge \alpha m_{X,D,C}).(Id_E \wedge H(\alpha m_{X,A,B}, Id_C)) =$
$ev_X^D.(Id_D \wedge \alpha m_{X,A,B}).(Id_D \wedge ev_Z^C).am_{D,C,T} =$
$ev_X^A.(Id_A \wedge ev_Y^B).(Id_A \wedge (Id_B \wedge ev_Z^C)).(Id_A \wedge am_{B,C,T}).am_{A,F,T}.(ass_{A,B,C} \wedge Id_T) = ev_X^E.(Id_E \wedge H(Id_X, ass_{A,B,C})).(Id_E \wedge \alpha m_{X,A,F}).(Id_E \wedge \alpha m_{Y,B,C})$.

Remarque 3.4. : Lorsque am est inversible (c.a.d. lorsque $\mathbb{E}$ est $\mathbb{V}$-tensorisée) alors αm est, lui aussi, inversible (car $\alpha m_{A,B,-}$:
$H(-,B).H(-,A) \to H(-, A \otimes B)$ se déduit de $am_{A,B,-}$:
$(A \otimes B) \wedge (-) \to A \wedge (-).B \wedge (-)$ par adjonction à droite).

Proposition 3.5. : Soient $\mathbb{E}, \mathbb{E}' \in |\mathbb{V}\text{-}Pretens|$. On suppose que $\mathbb{E}$ et $\mathbb{E}'$ sont cotensorisables.
1) On se donne en plus un morphisme $(F, \phi) : \mathbb{E} \to \mathbb{E}'$. Alors, en plus des structures $(H, \sigma, \alpha m)$ dont on peut munir $\mathbb{E}, \mathbb{E}'$ (voir proposition précédente), on peut aussi munir $F : \underline{E} \to \underline{E'}$ d'une famille naturelle
$(\psi_{X,A} : F(X^A) \to F(X)^A)_{(X,A) \in |\underline{E} \times \underline{V}^{op}|}$ satisfaisant les conditions suivantes :
$(M\sigma)$ Pour tout $X \in |\underline{E}|$, le triangle suivant commute :

$$\begin{tikzcd} & F(X) \arrow[dl, "F(\sigma_X)"'] \arrow[dr, "\sigma_{FX}"] & \\ F(X^I) \arrow[rr, "\psi_{X,I}"'] & & F(X)^I \end{tikzcd}$$

$(M\alpha m)$ Pour tout $X \in |\underline{E}|$ et tout $A, B \in |\underline{V}|$, le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} F((X^A)^B) \arrow[rr, "\psi"] \arrow[d, "F(\alpha m)"'] & & F(X^A)^B \arrow[d, "\psi^{Id}"] \\ F(X^{A \otimes B}) \arrow[dr, "\psi"'] & & (F(X)^A)^B \arrow[dl, "\alpha m"] \\ & F(X)^{A \otimes B} & \end{tikzcd}$$

2) On se donne, cette fois, une 2-cellule $t : (F, \phi) \to (F', \phi') : \mathbb{E} \to \mathbb{E}'$ dans $\mathbb{V}$-$Pretens$. Alors la transformation naturelle sous-jacente vérifie la condition suivante :
$(C\psi)$ Pour tout $X \in |\underline{E}|$ et tout $A \in |\underline{V}|$ le carré suivant commute :

$$\begin{tikzcd} F(X^A) \arrow[r, "t_{X^A}"] \arrow[d, "\psi"'] & F'(X^A) \arrow[d, "\psi'"] \\ F(X)^A \arrow[r, "t_X^{Id}"'] & F'(X)^A \end{tikzcd}$$

__Preuve__ : 1) Soient $X \in |\underline{E}|$ et $A \in |\underline{V}|$. On définit $\psi_{X,A}$ comme l'unique flèche $F(X^A) \to F(X)^A$ dans $\underline{E'}$ qui rend commutatif le carré suivant :

$$\begin{tikzcd} A \wedge F(X^A) \arrow[r, "Id \wedge \psi_{X,A}"] \arrow[d, "\phi"'] & A \wedge (F(X)^A) \arrow[d, "ev"] \\ F(A \wedge X^A) \arrow[r, "F(ev)"'] & F(X) \end{tikzcd}$$

- La naturalité de ψ se montre sur les flèches (x, Id) et (Id, a) de $\underline{E} \times \underline{V}^{op}$ où $x : X \to X'$ et $a : A' \to A$.
.. Pour la première flèche, on montre les identités suivantes :
$ev^A_{FX'}.(Id_A \wedge F(x)^{Id_A}).(Id_A \wedge \psi_{X,A} = F(x).F(ev^A_X).\phi_{A,X^A} =$
$ev^A_{FX'}.(Id_A \wedge \psi_{X',A}).(Id_A \wedge F(x^{Id_A}).$
.. Pour la deuxième flèche, on montre encore que :
$ev^{A'}_{FX}.(Id_{A'} \wedge ((Id_{FX})^a).(Id_{A'} \wedge \psi_{X,A}) = F(ev^A_X).\phi_{A,X^A}.(a \wedge Id_{F(X^A)}) =$
$F(ev^{A'}_X).F(Id_{A'} \wedge (Id_X)^a).\phi_{A',X^A} = ev^{A'}_{FX}.(Id_{A'} \wedge \psi_{X,A'}).(Id_{A'} \wedge F((Id_X)^a)).$
.. Pour $(M\sigma)$, on montre que :
$ev^I_{FX}.(Id_I \wedge \sigma_{FX}) = s_{FX} = ev^I_{FX}.(Id_I \wedge \psi_{X,I}).(Id_I \wedge F(\sigma_X)).$
.. Pour $(M\alpha m)$, on montre successivement (en posant $C = A \otimes B$, $Y = X^A, Z = (X^A)^B$) :
$ev^C_{FX}.(Id_C \wedge \psi_{X,C}).(Id_C \wedge F(\alpha m_{X,A,B})) = F(ev^C_X).F(Id_C \wedge \alpha m_{X,A,B}).\phi_{C,Z}$
$= F(ev^A_X).F(Id_A \wedge ev^B_Y).\phi_{A,B\wedge Z}.(Id_A \wedge \phi_{B,Z}).am_{A,B,Z} =$
$ev^C_{FX}.(Id_C \wedge \alpha m_{FX,A,B}).(Id_C \wedge \psi^{Id_B}_{X,A}).(Id_C \wedge \psi_{Y,B}).$
2) La commutation du diagramme de $(C\psi)$ résulte des identités suivantes :
$ev^A_{F'X}.(Id_A \wedge t^{Id_A}_X).(Id_A \wedge \psi_{X,A}) = t_X.F(ev^A_X).\phi_{A,X^A} =$

$ev^A_{F'X}.(Id_A \wedge \psi'_{X,A}).(Id_A \wedge t_{X^A})$.

• Ces deux propositions nous conduisent à donner les définitions suivantes :

Définition 3.6. : 1) On appelle catégorie $\mathbb{V}$-*précotensorisée* la donnée $\mathbb{E}$:
- d'une catégorie $\underline{E}$,
- d'un foncteur $H : \underline{E} \times \underline{V}^{op} \to \underline{E}$,
- de deux familles naturelles de flèches $(\sigma_X : X \to H(X, I))_{X \in |\underline{E}|}$ et $(\alpha m_{X,A,B} : H(H(X, A), B) \to H(X, A \otimes B))_{(X,A,B) \in |\underline{E} \times \underline{V} \times \underline{V}|}$.

Ces données sont astreintes à satisfaire les propriétés $(a), (b), (c)$ données dans la proposition 3.3.
Lorsque pour tout $(X, A, B) \in |\underline{E} \times \underline{V}^{op} \times \underline{V}^{op}|, \alpha m_{X,A,B}$ est inversible on dit que $\mathbb{E}$ est une catégorie $\mathbb{V}$-*cotensorisée*.
2) $\mathbb{E}$ et $\mathbb{E}'$ étant des catégories $\mathbb{V}$-précotensorisées, un morphisme $\mathbb{E} \to \mathbb{E}'$ est la donnée :
- d'un foncteur $F : \underline{E} \to \underline{E}'$,
- d'une famille naturelle $(\psi_{X,A} : F(X^A) \to F(X)^A)_{(X,A) \in |\underline{E} \times \underline{V}^{op}|}$

Ces données doivent satisfaire les propriétés $(M\sigma)$ et $(M\alpha m)$ de la proposition précédente.
3)$(F, \phi), (F', \phi') : \mathbb{E} \to \mathbb{E}'$ étant deux morphismes entre catégories $\mathbb{V}$-précotensorisées, un 2-morphisme $t : (F, \phi) \to (F', \phi')$ est la donnée d'une transformation naturelle $t : F \to F'$ vérifiant la condition $(C\psi)$ de la proposition précédente.

• À partir de ces données on construit une 2-catégorie notée $\mathbb{V}$-$Precot$. Après avoir aussi noté $\mathbb{V}$-TC la sous-2-catégorie pleine de $\mathbb{V}$-$Pretens$ formée des objets cotensorisables, on construit, avec l'aide des deux propositions précédentes, un 2-foncteur $\Delta : \mathbb{V}\text{-}TC \to \mathbb{V}\text{-}Precot$. La vérification que $\mathbb{V}$-$Precot$ est une 2-catégorie et que Δ est un 2-foncteur est aisée.

4. Réduction des catégories $\mathbb{V}$-précotensorisées

Remarque 4.1. : Quand on compare les définitions de catégories $\mathbb{V}$-prétensorisées et $\mathbb{V}$-précotensorisées, on y voit plus qu'une simple analogie. Il y a clairement une dualité entre ces deux concepts. Mais de quel genre de dualité s'agit-il ? C'est ce que nous allons préciser maintenant. Grâce à cela les 2-foncteurs construit précédemment vont pouvoir se dualiser et produire de nouvelles équivalences de 2-catégories.

• $\mathbb{V} = (\underline{V}, \otimes, I, u_g, u_d, ass)$ étant une catégorie monoïdale, on note $\mathbb{V}^*$ la catégorie monoïdale $(\underline{V}^*, \otimes^*, I^*, u_g^*, u_d^*, ass^*)$ où,
- $\underline{V}^* = \underline{V}$,
- Pour $A, B \in |\underline{V}|, A \otimes^* B = B \otimes A$ (même chose pour les flèches),
- $I^* = I$,
- Pour $A \in |\underline{V}|, (u_{g,A}^* : I^* \otimes^* A \to A) = (u_{d,A} : A \otimes I \to A)$,
- $(u_{d,A}^* : A \otimes^* I^* \to A) = (u_{g,A} : I \otimes A \to A)$,
- Pour $A, B, C \in |\underline{V}|, (ass_{A,B,C}^* : (A \otimes^* B) \otimes^* C \to A \otimes^* (B \otimes^* C)) = (ass_{C,B,A}^{-1} : C \otimes (B \otimes A) \to (C \otimes B) \otimes A)$.

• Donnons nous maintenant une catégorie $\mathbb{V}$-cotensorisée $\mathbb{E} = (\underline{E}, H, \sigma, \alpha m)$. On lui associe la catégorie $\mathbb{V}^*$-prétensorisée $Red(\mathbb{E}) = (\underline{E}^{op}, \wedge, s, am)$, où $\wedge : \underline{V} \times \underline{E}^{op} \to \underline{E}^{op}$ est le foncteur composé suivant :

$$\underline{V} \times \underline{E}^{op} \xrightarrow{sym} \underline{E}^{op} \times \underline{V} \xrightarrow{Id} (\underline{E} \times \underline{V}^{op})^{op} \xrightarrow{H^{op}} \underline{E}^{op} .$$

- Pour tout $X \in |\underline{E}^{op}| = |\underline{E}|, (s_X : I \wedge X \to X) = (\sigma_X : X \to X^I)^{op}$.
- Pour tout $A, B \in |\underline{V}|$ et $X \in |\underline{E}^{op}| = |\underline{E}|$,

$$(\ (A \otimes^* B) \wedge X \xrightarrow{am_{A,B,X}} A \wedge (B \wedge X)\ ) = (\ (X^B)^A \xrightarrow{\alpha m_{X,B,A}} X^{B \otimes A}\ )^{op}$$

En fait, cette construction se prolonge en un 2-foncteur inversible $Red : \mathbb{V}\text{-}Precot \to (\mathbb{V}^*\text{-}Pretens)^{opv}$ (où la notation$(-)^{opv}$ signifie qu'on a dualisé la composition verticale).
- Sur une flèche $(F, \psi) : \mathbb{E} \to \mathbb{E}'$ de $\mathbb{V}$-$Precot$ on a :

$$(\ Red(\mathbb{E}) \xrightarrow{Red(F,\psi)} Red(\mathbb{E}')\ ) = (\ Red(\mathbb{E}) \xrightarrow{(F^{op},\phi)} Red(\mathbb{E}')\ ).$$

où pour $A \in |\underline{V}|, X \in |\underline{E}^{op}|$,

$$(\ A \wedge F^{op}(X) \xrightarrow{\phi_{A,X}} F^{op}(A \wedge X)\ ) = (\ F(X^A) \xrightarrow{\psi_{X,A}} F(X)^A\ )^{op}.$$

- Sur une 2-cellule $t : (F,\psi) \to (F',\psi') : \mathbb{E} \to \mathbb{E}'$ de $\mathbb{V}$-$Precot$ on a :
$Red(t) = t^{op}$ où $(\ F'^{op}(X) \xrightarrow{t_X^{op}} F^{op}(X)\ ) = (\ F(X) \xrightarrow{t_X} F'(X)\ )^{op}$.

• Soit $\mathbb{E} = (\underline{E}, H, \sigma, \alpha m)$ une catégorie $\mathbb{V}$-précotensorisée.

Définition 4.2. : 1) On dit que $\mathbb{E}$ est *enrichissable* si, pour tout $X \in |\underline{E}|$, le foncteur $X^{(-)} : \underline{V}^{op} \to \underline{E}$ admet un adjoint à gauche. Notons $\mathbb{V}$-CE la sous-2-catégorie pleine de $\mathbb{V}$-$Precot$ dont les objets sont enrichissables.
2) On dit que $\mathbb{E}$ est *tensorisable* si, pour tout $A \in |\underline{V}|$, le foncteur $(-)^A : \underline{E} \to \underline{E}$ admet un adjoint à gauche. Notons $\mathbb{V}$-CT la sous-2-catégorie pleine de $\mathbb{V}$-$Precot$ dont les objets sont tensorisables.

Remarque 4.3. :Ayant noté $(\underline{E}^{op}, \wedge, s, am) = Red(\mathbb{E})$, on voit que, pour tout $A \in |\underline{V}|$, le foncteur $(-)^A : \underline{E} \to \underline{E}$ admet un adjoint à gauche ssi $A \wedge (-) : \underline{E}^{op} \to \underline{E}^{op}$ admet un adjoint à droite et donc $\mathbb{E}$ est tensorisable ssi $Red(\mathbb{E})$ est cotensorisable. On peut donc considérer la restriction
$Red : \mathbb{V}\text{-}CT \to (\mathbb{V}^*\text{-}TC)^{opv}$.

• Notons $\nabla : \mathbb{V}\text{-}CT \to \mathbb{V}\text{-}Pretens$ le 2-foncteur composé suivant :

$$(\ \mathbb{V}\text{-}CT \xrightarrow{Red} (\mathbb{V}^*\text{-}TC)^{opv} \xrightarrow{\Delta^{opv}} (\mathbb{V}^*\text{-}Precot)^{opv} \xrightarrow{Red^{opv}} \mathbb{V}\text{-}Pretens$$

Soit $\mathbb{E} \in |\mathbb{V}\text{-}CT|$. Écrivons $\mathbb{E} = (\underline{E}, H, \sigma, \alpha m)$ et $\nabla(\mathbb{E}) = (\underline{E}, \wedge, s, am)$.

Décrivons maintenant succintement les ingrédients de cette catégorie $\mathbb{V}$-prétensorisée. On remarque déjà que, pour tout
$A \in |\underline{V}|,\ A \wedge (-) \dashv (-)^A$. Notons ve^A l'unité de cette adjonction.
- Pour chaque $X \in |\underline{E}|$ et chaque flèche $a : A \to A'$ de $\underline{V}$,
$a \wedge Id : A \wedge X \to A' \wedge X$ est l'unique flèche de $\underline{E}$, rendant le carré suivant commutatif dans $\underline{E}$:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "ve"] \arrow[d, "ve"'] & (A' \wedge X)^{A'} \arrow[d, "Id^a"] \\
(A \wedge X)^A \arrow[r, "(a\wedge Id)^{Id}"'] & (A' \wedge X)^A
\end{tikzcd}$$

- Pour chaque $X \in |\underline{E}|, s_X : I \wedge X \to X$ est l'unique flèche de $\underline{E}$, rendant le triangle suivant commutatif dans $\underline{E}$:

$$\begin{tikzcd}
 & X \arrow[dl, "ve"'] \arrow[dr, "\sigma_X"] & \\
(I \wedge X)^I \arrow[rr, "s_X^{Id}"'] & & X^I
\end{tikzcd}$$

-Pour chaque $A, B \in |\underline{V}|$ et $X \in |\underline{E}|, am_{B,A,X} : (B \otimes A) \wedge X \to B \wedge (A \wedge X)$ est l'unique flèche de $\underline{E}$, rendant le diagramme suivant commutatif dans $\underline{E}$:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "ve"] \arrow[dd, "ve"'] & (A \wedge X)^A \arrow[dr, "ve^{Id}"] & \\
 & & ((B \wedge (A \wedge X))^B)^A \arrow[d, "\alpha m"] \\
((B \otimes A) \wedge X)^{B \otimes A} \arrow[rr, "am^{Id}"'] & & (B \wedge (A \wedge X))^{B \otimes A}
\end{tikzcd}$$

- Si maintenant $(F, \psi) : \mathbb{E} \to \mathbb{E}'$ est une flèche de $\mathbb{V}$-CT et $(F, \phi) = \nabla(F, \psi)$ alors, pour tout $A \in |\underline{V}|$ et $X \in |\underline{E}|$, $\phi_{A,X} : A \wedge F(X) \to F(A \wedge X)$ est l'unique flèche de $\underline{E}$, rendant le carré suivant commutatif dans $\underline{E}$:

$$\begin{tikzcd}
F(X) \arrow[r, "F(ve)"] \arrow[d, "ve"'] & F((A \wedge X)^A) \arrow[d, "\psi"] \\
(A \wedge F(X))^A \arrow[r, "\phi^{Id}"'] & F(A \wedge X)^A
\end{tikzcd}$$

Enfin, si $t : (F, \psi) \to (F', \psi') : \mathbb{E} \to \mathbb{E}'$ est une 2-cellule de $\mathbb{V}$-CT, on a en fait $\nabla(t) = t$.

Lorsque $\mathbb{E}_0 \in |\mathbb{V}\text{-}TC|$ et $\mathbb{E}_1 \in |\mathbb{V}\text{-}CT|$, on constate que $\Delta(\mathbb{E}_0) \in |\mathbb{V}\text{-}CT|$ et $\nabla(\mathbb{E}_1) \in |\mathbb{V}\text{-}TC|$. On peut donc considérer les 2-foncteurs restrictions suivants :

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{V}\text{-}TC \arrow[r, shift left, "\Delta"] & \mathbb{V}\text{-}CT \arrow[l, shift left, "\nabla"]
\end{tikzcd}$$

Proposition 4.4. : On a la 2-équivalence suivante :

$$\mathbb{V}\text{-}TC \overset{\simeq}{=} \mathbb{V}\text{-}CT$$

<u>*Preuve*</u> : 1) L'isomorphisme $\iota : Id \to \nabla\Delta$ est donné, pour chaque $\mathbb{E} \in |\mathbb{V}\text{-}TC|$, par $\iota_{\mathbb{E}} = (Id, \delta) : \mathbb{E} \to \nabla\Delta(\mathbb{E})$ où, après avoir noté $\mathbb{E} = (\underline{E}, \wedge, s, am)$,
$\Delta(\mathbb{E}) = (\underline{E}, H, \sigma, \alpha m)$ et $\nabla\Delta(\mathbb{E}) = (\underline{E}, \underline{\wedge}, \underline{s}, \underline{am})$, pour tout $A \in |\underline{V}|$,
$\delta^A : A\underline{\wedge}(-) \to A \wedge (-)$ est la transformation naturelle inversible provenant du fait que $A \wedge (-)$ et $A\underline{\wedge}(-)$ sont tous deux adjoints à gauche de $(-)^A$.
- Le fait que δ^A_X soit naturel en (A, X) résulte de la commutation des diagrammes suivants (où $X \in |\underline{E}|$, $a : A \to A'$ est dans $\mathbb{V}$ et où on a posé $Y = A' \wedge X)$:
$(a \wedge Id_X)^{Id_A}.(\delta^A_X{}^{Id_A}).\underline{ve}^A_X = (a \wedge Id_X)^{Id_A}.ve^A_X = (Id^a_Y).ve^{A'}_X =$
$(\delta^{A'}_X\underline{\wedge}Id_A).(a\underline{\wedge}Id_X)^{Id_A}.\underline{ve}^A_X$
où la deuxième identité résulte des nouvelles identités suivantes :
$ev^A_Y.(Id_A \wedge (a \wedge Id_X)^{Id_A}).(Id_A \wedge ve^A_X) = a \wedge Id_X =$
$ev^A_Y.(Id_A \wedge (Id^a_Y)).(Id_A \wedge ve^A_X)$
- On montre ensuite que $\iota_{\mathbb{E}} = (Id, \delta)$ est un morphisme de catégories $\mathbb{V}$-prétensorisées.
.. Pour (Ms) cela résulte des identités suivantes :
$\underline{s}^{Id_I}_X.\underline{ve}^I_X = \sigma_X = s^{Id_I}_X.ve^I_X = s^{Id_I}_X.\delta^I_X{}^{Id_I}.\underline{ve}^I_X$, où la seconde identité résulte, elle même, des nouvelles identités suivantes :
$ev^I_X.(Id_I \wedge \sigma_X) = s_X = ev^I_X.(Id_I \wedge s^{Id_I}_X).(Id_I \wedge ev^I_X)$.
.. Pour (Mam) cela résulte des identités suivantes (où $A, B \in |\underline{V}|$ et $X \in |\underline{E}|$ et où on écrit aussi, pour simplifier, $C = A \otimes B,\ Y = B \wedge X,$
$Z = A \wedge (B \wedge X)$):
$am^{Id_C}_{A,B,X}.\delta^C_X{}^{Id_C}.\underline{ve}^C_X = am^{Id_C}_{A,B,X}.ve^C_X = \alpha m_{Z,A,B}.ve^A_Y{}^{Id_B}.ve^B_X =$
$\delta^{A^C}_Y.(Id_A\underline{\wedge}\delta^B_X)^{Id_C}.\underline{am}^{Id_C}_{A,B,X}.\underline{ve}^C_X$ où la seconde identité résulte, elle même, des nouvelles identités suivantes :
$ev^C_Z.(Id_C \wedge (am^{Id_C}_{A,B,X})).(Id_C \wedge ve^C_X) = am_{A,B,X} =$
$ev^C_Z.(Id_C \wedge \alpha m_{Z,A,B}).(Id_C \wedge (ve^A_Y{}^{Id_B})).(Id_C \wedge ve^B_X)$
- Montrons que $\iota_{\mathbb{E}}$ est naturel en $\mathbb{E}$. Soit $(F, \phi) : \mathbb{E} \to \mathbb{E}'$ une flèche de $\mathbb{V}\text{-}TC$. Notons $\nabla\Delta(\mathbb{E}) = (\underline{E}, \underline{\wedge}, \underline{s}, \underline{am}),\ \nabla\Delta(\mathbb{E}') = (\underline{E'}, \underline{\wedge'}, \underline{s'}, \underline{am'})$,
$(F, \psi) = \Delta(F, \phi)$ et $(F, \underline{\phi}) = \nabla\Delta(F, \phi))$. Pour montrer la naturalité de ι sur (F, ϕ) il nous faut montrer, pour tout $A \in |\underline{V}|$ et $X \in |\underline{E}|$, la commutation

du carré suivant :

$$\begin{tikzcd} A\underline{\wedge}'F(X) \arrow[r, "\underline{\phi}_{A,X}"] \arrow[d, "\delta'^{A}_{FX}"'] & F(A\underline{\wedge}X) \arrow[d, "F\delta^A_X"] \\ A\underline{\wedge}'F(X) \arrow[r, "\phi_{A,X}"'] & F(A\wedge X) \end{tikzcd}$$

Cela résulte des identités suivantes (où $Y = A \wedge X$):
$F(\delta^A_X)^{Id_A}.\underline{\phi}^{Id_A}_{A,X}.\underline{ve}^A_{FX} = \psi_{Y,A}.F(ve^A_Y) = \phi^{Id_A}_{A,X}.ve^A_{FX} = \phi^{Id_A}_{A,X}.(\delta'^A_{FX})^{Id_A}.\underline{ve}^A_{FX}$
où la seconde identité résulte, elle même, des nouvelles identités suivantes :
$ev^A_{FY}.(Id_A \wedge' \phi^{Id_A}_{A,X}).(Id_A \wedge' ve^A_{FX}) = \phi_{A,X} =$
$ev^A_{FY}.(Id_A \wedge' \psi_{Y,A}).(Id_A \wedge' F(ve^A_X))$
- La 2-naturalité de $\iota_{\mathbb{E}}$ se montre sans difficulté.

2) L'isomorphisme $\Delta\nabla \simeq Id$ résulte de l'isomorphisme $\nabla\Delta \simeq Id$ en appliquant le 2-foncteur Red.

Proposition 4.5. : On a la 2-équivalence suivante :

$$\mathbb{V}\text{-}EC \ \overset{\sim}{=} \ \mathbb{V}\text{-}CE$$

Preuve : 1) On commence par construire un 2-foncteur

$$Op : \mathbb{V}\text{-}Cat \to (\mathbb{V}^*\text{-}Cat)^{opv}.$$

Il est défini,
- sur un objet $\mathcal{C} \in |\mathbb{V}\text{-}Cat|$, par $Op(\mathcal{C}) = \mathcal{C}^{op}$, où $|\mathcal{C}^{op}| = |\mathcal{C}|$ et $\mathcal{C}^{op}(X,Y) = \mathcal{C}(Y,X)$. On vérifie qu'on construit ainsi une catégorie $\mathbb{V}^*$-enrichie.
- sur une flèche $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ de $\mathbb{V}\text{-}Cat, Op(\ \mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{C}'\ ) = (\ \mathcal{C}^{op} \xrightarrow{F^{op}} \mathcal{C}'^{op}\ )$ (où $|F^{op}| = |F|$ et $F^{op}_{XY} = F_{XY}$),
- sur une 2-cellule $t : F \to F' : \mathcal{C} \to \mathcal{C}', Op(t) = t^{op} : F'^{op} \to F^{op}$ (où $(\ I^* \xrightarrow{t^{op}_X} \mathcal{C}'^{op}(F'^{op}X, F^{op}X)\ ) = (\ I \xrightarrow{t_X} \mathcal{C}'(FX, F'X)\ )$).
2) On remarque ensuite que le 2-foncteur Op se factorise par le 2-foncteur $\mathbb{V}\text{-}EC \to (\mathbb{V}^*\text{-}ET)^{opv}$ car on voit, pour une catégorie $\mathbb{V}$-enrichie $\mathcal{C}$, qu'elle est à co-tenseurs ssi $\mathcal{C}^{op}$ est à tenseurs. Comme pour le foncteur Op , cette factorisation est un 2-isomorphisme.
3) D'un autre côté, soit $\mathbb{E}$ une catégorie $\mathbb{V}$-précotensorisée. Alors on voit facilement que $\mathbb{E}$ est enrichissable ssi $Red(\mathbb{E})$ est enrichissable. On obtient

ainsi à nouveau une factorisation $\mathbb{V}\text{-}CE \to (\mathbb{V}^*\text{-}TE)^{opv}$ du 2-foncteur Red. Là encore le 2-foncteur Red et sa factorisation sont des 2-isomorphismes.
4) On est maintenant en mesure de construire les 2-foncteurs $\tilde{\Phi}$ et $\tilde{\Psi}$ composés suivants :

$$\mathbb{V}\text{-}EC \xrightarrow{Op} (\mathbb{V}^*\text{-}ET)^{opv} \xrightarrow{\Phi^{opv}} (\mathbb{V}^*\text{-}TE)^{opv} \xrightarrow{Red^{-1}} \mathbb{V}\text{-}CE$$

$$\mathbb{V}\text{-}CE \xrightarrow{Red} (\mathbb{V}^*\text{-}TE)^{opv} \xrightarrow{\Psi^{opv}} (\mathbb{V}^*\text{-}ET)^{opv} \xrightarrow{Op^{-1}} \mathbb{V}\text{-}EC$$

5) On a les isomorphismes $\tilde{\Psi}.\tilde{\Phi} \simeq Id$ et $\tilde{\Phi}.\tilde{\Psi} \simeq Id$, obtenus à partir des isomorphismes $\Psi.\Phi \simeq Id$ et $\Phi.\Psi \simeq Id$ (voir la proposition 2.6).

5. Les passerelles

Remarque 5.1. : On a constaté que, sur une catégorie monoïdale $\mathbb{V}$, les concepts de catégorie enrichie, catégorie prétensorisée et catégorie précotensorisée se correspondent deux à deux. Il semble donc que chacun d'eux représente une même idée d'enrichissement mais déclinée de façon différente. Ce qui va suivre va abonder dans le même sens puisqu'on va construire des morphismes entre deux différentes de ces représentations (précisemment entre les catégories $\mathbb{V}$-enrichies et les catégories $\mathbb{V}$-prétensorisées).

Définition 5.2. :1) Soient $\mathcal{C}$ une catégorie $\mathbb{V}$-enrichie et $\mathbb{E} = (\underline{E}, \wedge, s, am)$ une catégorie $\mathbb{V}$-prétensorisée. On appelle $\mathbb{V}$-*passerelle* de $\mathcal{C}$ dans $\mathbb{E}$ la donnée P,
- d'une application $|P| : |\mathcal{C}| \to |\underline{E}|$,
- pour chaque couple $(X, Y) \in |\mathcal{C}|^2$ d'une flèche
$\pi_{XY} : \mathcal{C}(X, Y) \wedge |P|(X) \to |P|(Y)$ dans $\underline{E}$ (Dans la suite on écrira $P(X)$ au lieu de $|P|(X)$, pour chaque $X \in |\mathcal{C}|$).
Ces données sont astreintes à vérifier les conditions suivantes :
(PU) Pour tout $X \in |\mathcal{C}|$, le triangle suivant commute dans $\mathbb{E}$:

$$\begin{tikzcd} I \wedge PX \arrow[rr, "id_X \wedge Id"] \arrow[dr, "s_{PX}"'] & & \mathcal{C}(X,X) \wedge PX \arrow[dl, "\pi_{XX}"] \\ & PX & \end{tikzcd}$$

(PC) Pour tout $X, Y, Z \in |\mathcal{C}|$, le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd}
(\mathcal{C}(Y,Z) \otimes \mathcal{C}(X,Y)) \wedge PX \arrow[rr, "am"] \arrow[d, "comp \wedge Id"'] & & \mathcal{C}(Y,Z) \wedge (\mathcal{C}(X,Y) \wedge PX) \arrow[d, "Id \wedge \pi_{XY}"] \\
\mathcal{C}(X,Z) \wedge PX \arrow[dr, "\pi_{XZ}"'] & & \mathcal{C}(Y,Z) \wedge PY \arrow[dl, "\pi_{YZ}"] \\
& PZ &
\end{tikzcd}$$

2) $P, Q : \mathcal{C} \to \mathbb{E}$ étant des $\mathbb{V}$-passerelles, un morphisme $t : P \to Q$ est la donnée d'une famille de flèches $(t_X : PX \to QX)_{X \in |\mathcal{C}|}$ telle que, pour tout couple $(X, Y) \in |\mathcal{C}|^2$ le carré suivant commute (où $P = (|P|, \pi)$ et $Q = (|Q|, \kappa)$):

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}(X,Y) \wedge PX \arrow[r, "Id \wedge t_X"] \arrow[d, "\pi_{XY}"'] & \mathcal{C}(X,Y) \wedge QX \arrow[d, "\kappa_{XY}"] \\
PY \arrow[r, "t_Y"'] & QY
\end{tikzcd}$$

Les $\mathbb{V}$-passerelles $\mathcal{C} \to \mathbb{E}$ et les morphismes entre ces $\mathbb{V}$-passerelles forment une catégorie notée $\mathbb{V}$-$Pass(\mathcal{C}, \mathbb{E})$.

Remarque 5.3. : Dans [1] J.Benabou définit le concept de $\mathbb{V}$-préfaisceau (ou encore $\mathbb{V}$-foncteur vers $\mathbb{V}$), qui est un cas particulier de celui de $\mathbb{V}$-passerelle (c'est le cas particulier où la catégorie $\mathbb{V}$-prétensorisée, entrant dans la définition, n'est autre que $\mathbb{V}$ elle même).

Exemples 5.4. : 1) Soit $\mathcal{M} = (M, \eta, \mu)$ une monade sur une catégorie $\underline{C}$. On peut la voir comme un monoïde dans la catégorie monoïdale stricte $\mathbb{V}$ des endofoncteurs de $\underline{C}$. De plus, on a vu qu'on pouvait faire de $\underline{C}$ une catégorie $\mathbb{V}$-tensorisée $\mathbb{C}$ où $F \wedge X = F(X)$ (voir 2.1(4)). On constate alors que les $\mathbb{V}$-passerelles $\mathcal{M} \to \mathbb{C}$ correspondent aux algèbres de $\mathcal{M}$. On a en fait $Alg(\mathcal{M}) \simeq \mathbb{V}$-$Pass(\mathcal{M}, \mathbb{C})$.
2) Plus généralement, $\mathbb{V}$ étant une catégorie monoïdale, $\mathcal{M}$ un monoïde dans $\mathbb{V}$ (vu comme catégorie $\mathbb{V}$-enrichie à un seul objet $\star$) et $\mathbb{E}$ une catégorie $\mathbb{V}$-tensorisée, on a une équivalence de catégorie $Alg(\mathcal{M}^\wedge) \simeq \mathbb{V}$-$Pass(\mathcal{M}, \mathbb{E})$ (pour la monade $\mathcal{M}^\wedge$ voir [4]) (On associe à l'algèbre (X, a) la passerelle

$P = (|P|, \pi)$ où $|P|(\star) = X$ et $\pi_{\star\star} = a$).
3)(voir aussi [1]) Soit maintenant $\mathbb{V}$ une catégorie monoïdale et $\mathcal{C}$ une catégorie enrichie dans $\mathbb{V}$. Pour chaque $X \in |\mathcal{C}|$, on construit une $\mathbb{V}$-passerelle $y^X : \mathcal{C} \to \mathbb{V}$. Elle est donnée par $y^X = (\mathcal{C}(X, -), \pi^X)$ où π^X est la famille $(\pi^X_{YZ})_{(Y,Z)\in|\mathcal{C}|^2}$ avec $\pi^X_{YZ} = (comp : \mathcal{C}(Y,Z) \otimes \mathcal{C}(X,Y) \to \mathcal{C}(X,Z))$.
4) Voir la passerelle y définie plus loin.

• *Foncteur sous-jacent d'une passerelle* :
Soient $\mathcal{C}$ une catégorie enrichie dans $\mathbb{V}$ et $\mathbb{E} = (\underline{E}, \wedge, ...)$ une catégorie $\mathbb{V}$-prétensorisée. $P : \mathcal{C} \to \mathbb{E}$ étant maintenant une $\mathbb{V}$-passerelle, on lui associe un foncteur $\underline{P} : \underline{\mathcal{C}} \to \underline{E}$ (où $\underline{\mathcal{C}}$ est la catégorie sous-jacente à $\mathcal{C}$). Écrivons $P = (|P|, \pi)$. Alors :
- Évidemment $|\underline{P}| = |P|$.
- Si maintenant $f : X \to Y$ est une flèche de $\underline{\mathcal{C}}$ (donc $f : I \to \mathcal{C}(X,Y)$ est une flèche de $\mathbb{V}$) alors $\underline{P}(f) : PX \to PY$ est donné par le composé suivant dans $\mathbb{E}$:

$$PX \xrightarrow{s^{-1}} I \wedge PX \xrightarrow{f\wedge Id} \mathcal{C}(X,Y) \wedge PX \xrightarrow{\pi_{XY}} PY$$

En fait, on construit un foncteur canonique $U : \mathbb{V}\text{-}Pass(\mathcal{C}, \mathbb{E}) \to [\underline{\mathcal{C}}, \underline{E}]$ où U est défini sur un objet comme ci-dessus et sur une flèche $t : P \to P', U(t)$ est la transformation naturelle $\underline{P} \to \underline{P'}$ définie par la famille t elle même. La fonctorialité de U est immédiate.

• *Le distributeur* $\mathbb{V}$-$Pass$:
On cherche à composer les $\mathbb{V}$-passerelles à droite et à gauche.
- Pour cela, soient $\mathcal{C}, \mathcal{C}' \in |\mathbb{V}\text{-}Cat|$ et $\mathbb{E}, \mathbb{E}' \in |\mathbb{V}\text{-}Pretens|$ et considérons la situation suivante :

$$\mathcal{C}' \xrightarrow{F} \mathcal{C} \xrightarrow{P} \mathbb{E} \xrightarrow{\Phi} \mathbb{E}'$$

où F est un foncteur $\mathbb{V}$-enrichi, $P = (|P|, \pi)$ une $\mathbb{V}$-passerelle et $\Phi = (f, \phi)$ un morphisme de $\mathbb{V}$-$Pretens$. À partir de ces données on obtient les $\mathbb{V}$-passerelles composées suivantes :
1) $P.F : \mathcal{C}' \to \mathbb{E}$ est défini par $P.F = (|P|.|F|, \pi')$ où,
pour $X', Y' \in |\mathcal{C}'|$, $\pi'_{X'Y'}$ est le composé suivant :

$$\mathcal{C}'(X', Y') \wedge PF(X') \xrightarrow{F_{X'Y'}\wedge Id} \mathcal{C}(F(X'), F(Y')) \wedge PF(X') \xrightarrow{\pi_{FX',FY'}} PF(Y')$$

2) $\Phi.P : \mathcal{C} \to \mathbb{E}'$ est défini par $\Phi.P = (|f|.|P|, \bar{\pi})$ où, pour $X, Y \in |\mathcal{C}|$, $\bar{\pi}_{XY}$ est le composé suivant :

$$\mathcal{C}(X,Y) \wedge fPX \xrightarrow{\phi} f(\mathcal{C}(X,Y) \wedge PX) \xrightarrow{f\pi_{XY}} fPY$$

- De même au niveau des 2-cellules, si $t : F_0 \to F_1 : \mathcal{C}' \to \mathcal{C}$ est une 2-cellule de $\mathbb{V}$-Cat, $p : P_0 \to P_1$ une flèche de $\mathbb{V}$-$Pass(\mathcal{C}, \mathbb{E})$ et $\theta : \Phi_0 \to \Phi_1 : \mathbb{E} \to \mathbb{E}'$ une 2-cellule de $\mathbb{V}$-$Pretens$(où $\Phi_i = (f_i, \phi_i)$), on obtient les morphismes de $\mathbb{V}$-passerelles composés suivants :
1) - Lorsque $p = Id$ (alors $P_0 = P_1 = P$), $Id_P.t : P.F_0 \to P.F_1$ est donné, pour $X' \in |\mathcal{C}'|$, par : $(Id_P.t)_{X'} =$
$(\ PF_0X' \xrightarrow{s^{-1}} I \wedge PF_0X' \xrightarrow{t_{X'} \wedge Id} \mathcal{C}(F_0X', F_1X') \wedge PF_0X' \xrightarrow{\pi_{F_0X', F_1X'}} PF_1X'\ )$
- Lorsque $t = Id$ (où $F_0 = F_1 = F$), $p.Id_F : P_0.F \to P_1.F$ est donné, pour $X' \in |\mathcal{C}'|$, par $(p.Id_F)_{X'} = p_{FX'}$.
2)- Lorsque $p = Id$ (alors $P_0 = P_1 = P$), $\theta.Id_P : \Phi_0.P \to \Phi_1.P$ est donné, pour $X \in |\mathcal{C}|$, par $(\theta.Id_P)_X = \theta_{PX} : f_0PX \to f_1PX$.
- Lorsque $\theta = Id$ (alors $\Phi_0 = \Phi_1 = \Phi = (f, \phi)$), $Id_\Phi.p : \Phi.P_0 \to \Phi.P_1$ est donné, pour $X \in |\mathcal{C}|$, par $(Id_\Phi.p)_X = f(p_X) : fP_0X \to fP_1X$.
À l'aide de ces différentes constructions on obtient un 2-foncteur :

$$\mathbb{V}\text{-}Pass : (\mathbb{V}\text{-}Cat)^{oph} \times (\mathbb{V}\text{-}Pretens) \to \mathbb{C}at$$

(où $(-)^{oph}$ signifie qu'on dualise ici la composition horizontale). En d'autres termes on a construit ainsi un 2-distributeur $\mathbb{V}$-$Cat \to \mathbb{V}$-$pretens$.

Proposition 5.5. :Fixons une catégorie $\mathbb{V}$-prétensorisée $\mathbb{E}$. On suppose que $\mathbb{E}$ est enrichissable. Alors le 2-préfaisceau $\mathbb{V}$-$Pass(-, \mathbb{E}) : (\mathbb{V}\text{-}Cat)^{oph} \to \mathbb{C}at$ est 2-représentable.

Preuve : $\mathbb{E}$ étant enrichissable, fixons, pour chaque $X \in |\underline{E}|$, un adjoint à droite $\mathcal{E}(X, -)$ de $(-) \wedge X$ et $Ev^X : \mathcal{E}(X, -) \wedge X \to (-)$ une co-unité de cette adjonction. On note encore $\mathcal{E}$ la catégorie $\mathbb{V}$-enrichie canonique obtenue à l'aide de ces choix.
- On voit immédiatement que $E = (Id_{|\underline{E}|}, \varepsilon)$ (où $\varepsilon = (\varepsilon_{XY})_{X,Y \in |\mathcal{C}|}$ et $\varepsilon_{XY} = Ev^X_Y$) est une $\mathbb{V}$-passerelle $\mathcal{E} \to \mathbb{E}$.
- Montrons que $(\mathcal{E}, E)$ est une 2-représentation de $\mathbb{V}$-$Pass(-, \mathbb{E})$.
Soit $\mathcal{C} \in |\mathbb{V}\text{-}Cat|$.

.. Soit aussi $P = (|P|, \pi) \in |\mathbb{V}\text{-}Pass(\mathcal{C}, \mathbb{E})|$. Pour chaque $X, Y \in |\mathcal{C}|$, considérons $F_{XY} : \mathcal{C}(X,Y) \to \mathcal{E}(PX, PY)$ l'unique flèche de $\mathbb{V}$ telle que le triangle suivant commute dans $\mathbb{E}$:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}(X,Y) \wedge PX \arrow[rr, "F_{XY} \wedge Id"] \arrow[dr, "\pi_{XY}"'] & & \mathcal{E}(PX,PY) \wedge PX \arrow[dl, "Ev"] \\
& PY &
\end{tikzcd}$$

Montrons que $F = (|P|, (F_{XY})_{(X,Y) \in |\mathcal{C}|^2})$ définit un $\mathbb{V}$-foncteur $\mathcal{C} \to \mathcal{E}$.
... L'axiome des unités est facile à vérifier.
... Pour l'axiome de composition cela résulte des identités suivantes (où $X, Y, Z \in |\mathcal{C}|$ et $A = \mathcal{C}(X,Y), B = \mathcal{C}(Y,Z)$) :
$Ev^{PX}_{PZ}.(F_{XZ} \wedge Id_{PX}).(comp_{XYZ} \wedge Id_{PX}) = \pi_{YZ}.(Id_B \wedge \pi_{XY}).am_{B,A,PX} = Ev^{PX}_{PZ}.(comp_{PX,PY,PZ} \wedge Id_{PX}).((F_{YZ} \otimes F_{XY}) \wedge Id_{PX})$
On voit immédiatement que $E.F = P$ et que F est l'unique $\mathbb{V}$-foncteur $\mathcal{C} \to \mathcal{E}$ vérifiant cette identité.
.. Soit $p : P \to P'$ une flèche de $\mathbb{V}\text{-}Pass(\mathcal{C}, \mathbb{E})$. Pour chaque $X \in |\mathcal{C}|$, posons $t_X = \Gamma(p_X)$ et montrons que $t = (t_X)_{X \in |\mathcal{C}|}$ est une transformation naturelle $\mathbb{V}$-enrichie $F \to F'$ (F et F' étant les uniques $\mathbb{V}$-foncteurs tels que $E.F = P$, $E.F' = P'$). Pour cela il faut montrer que pour tout $X, Y \in |\mathcal{C}|$ le carré suivant commute :

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}(X,Y) \arrow[r, "F_{XY}"] \arrow[d, "F'_{XY}"'] & \mathcal{E}(PX,PY) \arrow[d, "\underline{y}^{PX}(t_Y)"] \\
\mathcal{E}(P'X,P'Y) \arrow[r, "\underline{y}_{P'Y}(t_X)"'] & \mathcal{E}(PX,P'Y)
\end{tikzcd}$$

Or cela résulte des identités suivantes :
$Ev^{PX}_{P'Y}.(\underline{y}^{PX}(t_Y) \wedge Id_{PX}).(F_{XY} \wedge Id_{PX}) = t_Y.\pi_{XY} =$
$Ev^{PX}_{P'Y}.(\underline{y}_{P'Y}(t_X) \wedge Id_{PX}).(F_{XY} \wedge Id_{PX})$ où pour la première identité on utilise $(K1)$ et pour la seconde c'est $(K2)$.
Enfin, le fait que $t : F \to F'$ est l'unique flèche de $\mathbb{V}\text{-}Cat(\mathcal{C}, \mathcal{E})$ telle que $(\ E.F \xrightarrow{Id_E.t} E.F'\ ) = (\ P \xrightarrow{p} P'\ )$ résulte de la définition de t.

Corollaire 5.6. :([4]) $\mathbb{V}$ étant une catégorie monoïdale, $\mathbb{E}$ une catégorie $\mathbb{V}$-tensorisée enrichissable et $\mathcal{M}$ un monoïde dan $\mathbb{V}$, alors on a un isomorphisme canonique :

$$Alg(\mathcal{M}^\wedge) \simeq \mathbb{V}\text{-}Cat(\mathcal{M}, \mathcal{E})$$

où $\mathcal{E}$ désigne la catégorie enrichie sur $\mathbb{V}$ canonique associée à $\mathbb{E}$.

Preuve : Car $Alg(\mathcal{M}^\wedge) \simeq \mathbb{V}\text{-}Pass(\mathcal{M}, \mathbb{E}) \simeq \mathbb{V}\text{-}Cat(\mathcal{M}, \mathcal{E})$ où le premier isomorphisme résulte de l'exemple 5.4(2) et le second de la proposition précédente.

• *La passerelle* y:
Fixons une catégorie $\mathbb{V}$-enrichie $\mathcal{C}$. Montrons que $\mathbb{V}^*\text{-}Pass(\mathcal{C}^{op}, \mathbb{V}^*)$ a une structure de catégorie $\mathbb{V}$-tensorisée (où $\mathbb{V}^*$ désigne encore la catégorie $\mathbb{V}^*$-tensorisée associée à la catégorie monoïdale $\mathbb{V}^*$). Construisons déjà le foncteur $\wedge : \underline{V} \times (\mathbb{V}^*\text{-}Pass(\mathcal{C}^{op}, \mathbb{V}^*)) \to \mathbb{V}^*\text{-}Pass(\mathcal{C}^{op}, \mathbb{V}^*)$,
- sur un objet (A, P) (où $P = (|P|, \pi)$) , $A \wedge P = (|A \wedge P|, A \wedge \pi)$ où,
.. $|A \wedge P| : |\mathcal{C}^{op}| \to |\mathbb{V}^*|, X \mapsto A \otimes P(X)$,
.. pour $X, Y \in |\mathcal{C}^{op}| = |\mathcal{C}|$, $(A \wedge \pi)_{XY}$ est le composé suivant :

$$(A \otimes P(X)) \otimes \mathcal{C}(Y, X) \xrightarrow{ass} A \otimes (P(X) \otimes \mathcal{C}(Y, X)) \xrightarrow{Id \otimes \pi_{XY}} A \otimes P(Y)$$

Ce qui a un sens car $\mathcal{C}^{op}(X, Y) \otimes^* (A \wedge P)(X) = (A \otimes P(X)) \otimes \mathcal{C}(Y, X)$, $P(X) \otimes \mathcal{C}(Y, X) = \mathcal{C}^{op}(X, Y) \otimes^* P(X)$ et $A \otimes P(Y) = (A \wedge P)(Y)$.
- sur une flèche $(a, p) : (A, P) \to (A', P')$, $a \wedge p : A \wedge P \to A' \wedge P'$ est le morphisme de $\mathbb{V}^*$-passerelle défini, pour $X \in |\mathcal{C}^{op}|$, par
$(\ (A \wedge P)(X) \xrightarrow{(a \wedge p)_X} (A' \wedge P')(X)\ ) = (\ A \otimes P(X) \xrightarrow{a \otimes p_X} A' \otimes P'(X)\ )$.
On obtient la catégorie $\mathbb{V}$-tensorisée $(\mathbb{V}^*\text{-}Pass(\mathcal{C}^{op}, \mathbb{V}^*), \wedge, s, am)$ (où s et am proviennent de u_g et ass de la catégorie monoïdale $\mathbb{V}$).

On construit maintenant une passerelle $y : \mathcal{C} \to \mathbb{V}^*\text{-}Pass(\mathcal{C}^{op}, \mathbb{V}^*)$ en posant $y = (|y|, \Pi)$ où
- $|y| : |\mathcal{C}| \to |\mathbb{V}^*\text{-}Pass(\mathcal{C}^{op}, \mathbb{V}^*)|$ est donné, pour $X \in |\mathcal{C}|$,
par $|y|(X) = y_X = (|y_X|, \pi_X)$ avec $|y_X| : |\mathcal{C}^{op}| \to |\mathbb{V}^*|, Y \mapsto \mathcal{C}(Y, X)$ et, pour $(Y, Z) \in |\mathcal{C}^{op}| = |\mathcal{C}|$,
$(\pi_X)_{YZ} = comp : \mathcal{C}(Y, X) \otimes \mathcal{C}(Z, Y) \to \mathcal{C}(Z, X)$ ce qui a un sens car $\mathcal{C}^{op}(Y, Z) \otimes^* |y_X|(Y) = \mathcal{C}(Y, X) \otimes \mathcal{C}(Z, Y)$ et $|y_X|(Z) = \mathcal{C}(Z, X)$.
- Pour $(X, Y) \in |\mathcal{C}|^2$ et $Z \in |\mathcal{C}^{op}|$,

$$(\,(\mathcal{C}(X, Y) \wedge y_X)(Z) \xrightarrow{(\Pi_{XY})_Z} (y_Y)(Z)\,) = (\,\mathcal{C}(X, Y) \otimes \mathcal{C}(Z, X) \xrightarrow{comp} \mathcal{C}(Z, Y)\,)$$

Références

[1] J. BENABOU, *Les catégories multiplicatives*, Rap. Sém. Math. Pure, Louvain, no 27 (1972).

[2] R. GUITART, *Tenseurs et Machines*, Cahiers de Topologie et Géométrie Différentielle Catégorique (1980),volume XXI-1, p.5-62.

[3] G.M. KELLY, *Basic Concepts of Enriched Category Theory.* vol.64, Cambridge University Press. Lecture Note. (1982).

[4] J. PENON, *Compatibilité entre deux conceptions d'algèbre sur une opérade*, Cahiers de Topologie et Géométrie Différentielle Catégorique (2018),volume LX-3, p.298-310.

[5] X. ROCHARD, *Théorie tannakienne non additive*, Thèse (1998).

[6] R.J. WOOD, *Indicial methods for relative categories*, Thesis Dalhousie Univ. at Halifax (1978).

Jacques PENON
25, rue Chapsal,
94340, Joinville-le-Pont
France
Email : tryphon.penon@gmail.com