CAHIERS DE TOPOLOGIE ET GEOMETRIE DIFFERENTIELLE CATEGORIQUES

VOLUME LXV-3 (2024)

L'ENRICHISSEMENT ET SES DIFFÉRENTS POINTS DE VUE, II

Jacques PENON

Résumé. $\mathbb{V}$ étant une catégorie monoïdale, il y a trois façons d'enrichir une catégorie dans $\mathbb{V}$. On obtient les trois concepts de 1) catégorie $\mathbb{V}$-*enrichie* ou $\mathbb{V}$-*catégorie* (voir [3]), 2) catégorie $\mathbb{V}$-*prétensorisée* (voir [1], [5] et [4]), 3) catégorie $\mathbb{V}$-*précotensorisées*. On a montré dans la partie I comment passer des uns aux autres et les équivalences qui en résultent. Dans cette partie II on introduit le concept de catégorie *mutante* sur $\mathbb{V}$ (voir [2]) qui généralise les trois concepts précédents. On construit alors trois plongements 2-pleinement fidèles vers la 2-catégorie des catégories mutantes (sur $\mathbb{V}$).

Abstract. Let $\mathbb{V}$ be a monoidal category. For a general category, there are three manners to enrich them in $\mathbb{V}$. We get the three following concepts : 1) $\mathbb{V}$-enriched category (or $\mathbb{V}$-category- see [3]), 2) $\mathbb{V}$-pretensorised category (see [1], [5] and [4]), 3) $\mathbb{V}$-precotensorised category. In the part I, we showed how to pass from one to the other and the equivalences of 2-categories which result of them. In this part II we introduce the concept of mutant category on $\mathbb{V}$ (see [2]) for generalise the three concepts come before. We build three 2-functors full and faithfull to the 2-category of mutant categories (on $\mathbb{V}$).

Keywords. Monoidal category. Enriched category. Bicategory. Fibred category.

Mathematics Subject Classification (2020). 18D20.

.

PARTIE II
UN CONCEPT RÉSUMANT L'ENSEMBLE

Sommaire

1. Catégories mutantes
2. Composition stricte
3. Saveur d'une catégorie mutante
4. Plongement dans la 2-catégorie $Cat\mu(\mathbb{V})$
5. Complément sur les saveurs

Introduction de la partie II

On se reportera à l'introduction commune aux deux parties, en tête de la partie I. On a vu, dans cette partie I, que catégories enrichies, catégories prétensorisées et catégories précotensorisées étaient des présentations différentes d'une même idée : il est temps maintenant de conceptualiser cette idée. C'est ce que nous abordons dans cette partie II avec le concept de *catégorie mutante*.

1. Catégories mutantes

Définition 1.1. :(voir [2]) Fixons une catégorie monoïdale $\mathbb{V}$. Une *catégorie mutante sur* $\mathbb{V} = (\underline{V}, \otimes, ...)$ est la donnée :
- d'une bicatégorie $\mathbb{B}$,
- d'un morphisme strict de bicatégorie $U : \mathbb{B} \to \mathbb{V}$ (où $\mathbb{V}$ est vu comme une bicatégorie à un objet $\star$. Ses flèches sont les objets de $\underline{V}$. Ses 2-cellules sont les flèches de $\underline{V}$. On a encore $Id_\star = I$).
Ces données satisfont l'axiome suivant :
(CM) Pour tout $X, Y \in |\mathbb{B}|$,
$U_{XY} : \mathbb{B}(X,Y) \to \mathbb{V}(UX, UY) = \mathbb{V}(\star, \star) = \underline{V}$ est une fibration discrète.

Dans la suite on notera $\otimes$ la composition horizontale de $\mathbb{B}$ et "." sa composition verticale (en accord avec les notations pour $\mathbb{V}$).

Remarque 1.2. : C'est René Guitart, à la suite des travaux de J.Wood sur les $\hat{\mathbb{V}}$-catégories (voir [6]), qui a introduit ce concept pour la première fois dans [2], sous le nom de *bicatégorie* $\mathbb{V}$*-graduée*.

Exemples 1.3. : 1) (voir aussi [2]) Soit $\mathcal{C}$ une catégorie enrichie dans $\mathbb{V}$. On lui associe la catégorie mutante suivante $\mu e(\mathcal{C}) = (\mathbb{B}, U)$ où :
- $|\mathbb{B}| = |\mathcal{C}|$,
- Pour $X, Y \in |\mathbb{B}|$, $\mathbb{B}(X,Y)$ est la catégorie $\underline{V}/\mathcal{C}(X,Y)$.
.. Si maintenant $(A, f)) \in |\mathbb{B}(X,Y)|$ et $(B, g) \in |\mathbb{B}(Y,Z)|$ alors leur composé est donné par :
$(B, g) \otimes (A, f) = (B \otimes A, g \circ f)$, où $g \circ f : B \otimes A \to \mathcal{C}(X,Z)$ est donné par :

$$g \circ f = (\ B \otimes A \xrightarrow{g \otimes f} \mathcal{C}(Y,Z) \otimes \mathcal{C}(X,Y) \xrightarrow{comp} \mathcal{C}(X,Z)\ )$$

.. la composition verticale de 2-cellules est donnée par la composition dans $\underline{V}/\mathcal{C}(X,Y)$.
.. La composition horizontale de 2-cellules : Pour le couple (b, a), où $b : (B, g) \to (B', g') : Y \to Z$ et $a : (A, f) \to (A', f') : X \to Y$,
on a $((B, g) \otimes (A, f) \xrightarrow{b \otimes a} (B', g') \otimes (A', f')) =$
$(B \otimes A, g \circ f) \xrightarrow{b \otimes a} (B' \otimes A', g' \circ f'))$ (c.a.d. le produit tensoriel dans $\mathbb{V}$).
.. Pour tout $X, Y \in |\mathbb{B}|, U_{XY} : \underline{V}/\mathcal{C}(X,Y) \to \underline{V}$ est le foncteur d'oubli habituel qui est clairement une fibration discrète.

2) (voir la remarque qui suit) Soit maintenant $\mathbb{E} = (\underline{E}, \wedge, s, am)$ une catégorie $\mathbb{V}$-prétensorisée. On lui associe alors la catégorie mutante suivante $\mu t(\mathbb{E}) = (\mathbb{B}, U)$ où :
- $|\mathbb{B}| = |\underline{E}|$,
- Pour $X, Y \in |\mathbb{B}|$, $|\mathbb{B}(X,Y)| = \{(A, f)/A \in |\underline{V}|, f \in \underline{E}(A \wedge X, Y)\}$. Et si $(A, f), (A', f') \in |\mathbb{B}(X,Y)|$, une flèche $a : (A, f) \to (A', f')$ dans $\mathbb{B}(X,Y)$ est une flèche $a : A \to A'$ dans $\underline{V}$ rendant le triangle suivant commutatif

dans $\underline{E}$:

$$\begin{tikzcd} A \wedge X \arrow[rr, "a\wedge Id"] \arrow[dr, "f"'] & & A' \wedge X \arrow[dl, "f'"] \\ & Y & \end{tikzcd}$$

.. Si maintenant $(A, f) \in |\mathbb{B}(X, Y)|$ et $(B, g) \in |\mathbb{B}(Y, Z)|$ alors leur composé est donné par :
$(B, g) \otimes (A, f) = (B \otimes A, g \circ f)$ où $g \circ f$ est donné par :

$$g \circ f = (\ (B \otimes A) \wedge X \xrightarrow{am} B \wedge (A \wedge X) \xrightarrow{Id\wedge f} B \wedge Y \xrightarrow{g} Z\ )$$

.. La composition verticale de 2-cellules est la composition dans $\underline{V}$.
.. La composition horizontale du couple de 2-cellules (b, a),
où $b : (B, g) \to (B', g') : Y \to Z$ et $a : (A, f) \to (A', f') : X \to Y$ est $b \otimes a : (B, g) \otimes (A, f) \to (B', g') \otimes (A', f')$.
.. Pour tout $X, Y \in |\mathbb{B}|, U_{XY} : \mathbb{B}(X, Y) \to \underline{V}$ est donné par $U_{XY}(A, f) = A$ et sur une flèche $U_{XY}((A, f) \overset{a}{\to} (A', f')) = (A \overset{a}{\to} A')$.

3) Soit $\mathbb{E} = (\underline{E}, H, \sigma, \alpha m)$ une catégorie $\mathbb{V}$-précotensorisée. On lui associe la catégorie mutante suivante $\mu c(\mathbb{E}) = (\mathbb{B}, U)$ où :
- $|\mathbb{B}| = |\underline{E}|$,
- Pour $X, Y \in |\mathbb{B}|, |\mathbb{B}(X, Y)| = \{(A, f)/A \in |\underline{V}|, f \in \underline{E}(X, Y^A)\}$. Et si $(A, f), (A', f') \in |\mathbb{B}(X, Y)|$, une flèche $a : (A, f) \to (A', f')$ dans $\mathbb{B}(X, Y)$ est une flèche $a : A \to A'$ dans $\underline{V}$ rendant le triangle suivant commutatif dans $\underline{E}$:

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "f'"'] \arrow[dr, "f"] & \\ Y^{A'} \arrow[rr, "Id^a"'] & & Y^A \end{tikzcd}$$

.. Si maintenant $(A, f) \in |\mathbb{B}(X, Y)|$ et $(B, g) \in |\mathbb{B}(Y, Z)|$ alors leur composé est donné par :
$(B, g) \otimes (A, f) = (B \otimes A, g \circ f)$ où $g \circ f$ est donné par :

$$g \circ f = (\ X \xrightarrow{f} Y^A \xrightarrow{g^{Id}} (Z^B)^A \xrightarrow{\alpha m} Z^{B\otimes A}\ ).$$

.. La composition verticale de 2-cellules est la composition dans $\underline{V}$.
.. La composition horizontale du couple de 2-cellules (b, a),

où $b : (B, g) \to (B', g') : Y \to Z$ et $a : (A, f) \to (A', f') : X \to Y$ est $b \otimes a : (B, g) \otimes (A, f) \to (B', g') \otimes (A', f')$.
.. Pour tout $X, Y \in |\mathbb{B}|, U_{XY} : \mathbb{B}(X, Y) \to \underline{V}$ est donné par $U_{XY}(A, f) = A$ et sur une flèche $U_{XY}((A, f) \xrightarrow{a} (A', f')) = (A \xrightarrow{a} A')$.

4) Soit $\mathbb{E} = (\underline{E}, U)$ une catégorie fibrée sur une catégorie $\underline{B}$ à produits fibrés. Fixons aussi un objet $B \in |\underline{B}|$. À ces données on associe la catégorie mutante sur $\underline{B}/B$ suivante : $(\mathbb{B}, U)$ où :
- $|\mathbb{B}| = |\mathbb{E}_B|$ ($\mathbb{E}_B$ étant la fibre au dessus de B).
- Pour $X, Y \in |\mathbb{B}|, |\mathbb{B}(X, Y)|$ est l'ensemble
$\{(A, a, x)/(A, a) \in |\underline{B}/B|, x \in \mathbb{E}_A(a^\star X, a^\star Y)\}$ et étant donné $(A, a, x), (A', a', x') \in |\mathbb{B}(X, Y)|$ une flèche $(A, a, x) \to (A', a', x')$ dans $\mathbb{B}(X, Y)$ est une flèche $\alpha : (A, a) \to (A', a')$ dans $\underline{B}/B$ telle que le carré suivant commute :

$$\begin{tikzcd}
a^\star X \arrow[r, "Id"] \arrow[d, "x"'] & (a'.\alpha)^\star X \arrow[r, "can", "\sim"'] & \alpha^\star a'^\star X \arrow[d, "\alpha^\star x'"] \\
a^\star Y \arrow[r, "Id"] & (a'.\alpha)^\star Y \arrow[r, "can", "\sim"'] & \alpha^\star a'^\star Y
\end{tikzcd}$$

.. Si maintenant $(A_0, a_0, x_0) \in |\mathbb{B}(X, Y)|$ et $(A_1, a_1, x_1) \in |\mathbb{B}(Y, Z)|$ alors leur composé est donné par :
$(A_1, a_1, x_1) \otimes (A_0, a_0, x_0) = (A_1 \underset{B}{\times} A_0, a_1 \otimes a_0, x_1 \circ x_0)$ où
$(A_1 \underset{B}{\times} A_0, a_1 \otimes a_0) = (A_1, a_1) \times (A_0, a_0)$ (le produit dans $\underline{B}/B$), et

$$x_1 \circ x_0 = (\ (a_1 \otimes a_0)^\star X \xrightarrow{\bar{x_0}} (a_1 \otimes a_0)^\star Y \xrightarrow{\bar{x_1}} (a_1 \otimes a_0)^\star Z\ )$$

où $\bar{x_0}$ et $\bar{x_1}$ sont donnés par les carrés commutatifs suivants :

$$\begin{tikzcd}
(a_1 \otimes a_0)^\star X \arrow[r, "can", "\sim"'] \arrow[d, "\bar{x}_0"'] & \pi_0^\star a_0^\star X \arrow[d, "\pi_0^\star x_0"] \\
(a_1 \otimes a_0)^\star Y \arrow[r, "can", "\sim"'] & \pi_0^\star a_0^\star Y
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
(a_1 \otimes a_0)^\star Y \arrow[r, "can", "\sim"'] \arrow[d, "\bar{x}_1"'] & \pi_1^\star a_1^\star Y \arrow[d, "\pi_1^\star x_1"] \\
(a_1 \otimes a_0)^\star Z \arrow[r, "can", "\sim"'] & \pi_1^\star a_1^\star Z
\end{tikzcd}$$

et où $a_1 \otimes a_0 = a_0.\pi_0 = a_1.\pi_1$ (π_0 et π_1 désignant les projections canoniques $A_1 \underset{B}{\times} A_0 \to A_0$ ou A_1).

.. La composition verticale de 2-cellules est la composition dans $\underline{B}/B$.
.. La composition horizontale du couple de 2-cellules (α_1, α_0) où
$\alpha_i : (A_i, a_i, x_i) \to (A'_i, a'_i, x'_i) : X_i \to Y_i$ avec $X_0 = X,\ X_1 = Y,$
$Y_0 = Y,\ Y_1 = Z$ est donné par :
$((A_1, a_1, x_1) \otimes (A_0, a_0, x_0) \xrightarrow{\alpha_1 \otimes \alpha_0} (A'_1, a'_1, x'_1) \otimes (A'_0, a'_0, x'_0)) =$
$(((A_1 \underset{B}{\times} A_0, a_1 \otimes a_0, x_1 \circ x_0) \xrightarrow{\alpha_1 \times \alpha_0} (A'_1 \underset{B}{\times} A'_0, a'_1 \otimes a'_0, x'_1 \circ x'_0))$ où
$\alpha_1 \times \alpha_0$ est le produit dans $\underline{B}/B$.
.. Pour $X, Y \in |\mathbb{B}| = |\mathbb{E}_B|, U_{XY} : \mathbb{B}(X, Y) \to \underline{V} = \underline{B}/B$ est donné sur
... les objets par $U_{XY}(A, a, x) = (A, a)$,
... les flèches par $U_{XY}(\alpha) = \alpha$.

Remarque 1.4. : L'exemple 1 précédent est déjà dans [2]. Y figure aussi l'exemple 2 dans le cas particulier où $\mathbb{E} = \mathbb{V}$.

Définition 1.5. :$(\mathbb{B}, U)$ et $(\mathbb{B}', U')$ étant deux catégories mutantes un *foncteur mutant* $(\mathbb{B}, U) \to (\mathbb{B}', U')$ est la donnée d'un morphisme strict de bicatégories $\Phi : \mathbb{B} \to \mathbb{B}'$ tel que le triangle ci-dessous commute :

$$\begin{tikzcd} \mathbb{B} \arrow[rr, "\Phi"] \arrow[dr, "U"'] & & \mathbb{B}' \arrow[dl, "U'"] \\ & \mathbb{V} & \end{tikzcd}$$

Remarque 1.6. : Pour le concept de transformation naturelle mutante nous avons besoin de la "composition stricte" que nous allons définir dans la prochaine section. C'est pourquoi nous renvoyons la définition des transformation naturelles mutantes à la section 2.

2. Composition stricte

• Fixons ici une catégorie mutante $\mathcal{B} = (\mathbb{B}, U)$ sur une catégorie monoïdale $\mathbb{V}$. Pour $X, Y \in |\mathbb{B}|$ et $A \in |\mathbb{V}|$, notons :

$$Hom_A(X, Y) = \{\phi \in |\mathbb{B}(X, Y)| / U_{XY}(\phi) = A\}$$

On écrira encore $X \xrightarrow[A]{\phi} Y$ pour $\phi \in Hom_A(X, Y)$. Remarquons que pour tout $X \in |\mathbb{B}|$, $Id_X \in Hom_I(X, X)$.

- Dans la situation suivante $X \xrightarrow[A]{\phi} Y \xrightarrow[I]{f} Z$, on définit $X \xrightarrow[A]{f\phi} Z$ de la façon suivante :
Comme $U(f \otimes \phi) = U(f) \otimes U(\phi) = I \otimes A$, que l'on a l'isomorphisme $u_g : I \otimes A \to A$ et que $U_{XZ} : \mathbb{B}(X,Z) \to \underline{V}$ est une fibration discrète, on peut définir $f\phi = (u_g^{-1})^\star(f \otimes \phi)$. On a $f\phi \in Hom_A(X,Z)$.

- De même, dans la situation inverse $X \xrightarrow[I]{f} Y \xrightarrow[A]{\phi} Z$, on définit

$X \xrightarrow[A]{\phi f} Z$ en posant $\phi f = (u_d^{-1})^\star(\phi \otimes f)$.

Remarque 2.1. : Lorsque $A = I$, et $X \xrightarrow[I]{g} Y \xrightarrow[I]{f} Z$, les deux possibilités de définition de gf précédentes coïncident car $u_g = u_d : I \otimes I \to I$.

Définition 2.2. :$f\phi$ et ϕf sont appelés les composés stricts de f par ϕ et ϕ par f.

• Étudions maintenant les propriétés de "la" composition stricte.

Proposition 2.3. : 1) Soit $\phi \in Hom_A(X,Y)$. Alors $\phi Id_X = \phi = Id_Y \phi$.
2) Considérons le triplet de flèches composables suivant :
$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} T$ dans $\mathbb{B}$. Dans les trois cas suivants :

$a)\ U(g) = U(h) = I,\ b)\ U(f) = U(h) = I,\ c)\ U(f) = U(g) = I,$

alors on a l'associativité $(hg)f = h(gf)$.

<u>*Preuve*</u> : 1) Car $U(u_g) = u_g$ et $U(u_d) = u_d$ (U est strict).
2) a) Résulte de la commutation du triangle (T_1) suivant dans $\mathbb{V}$ (où ici $B = I$ et $A = U(f)$):

$$\begin{tikzcd}
(B \otimes I) \otimes A \arrow[rr, "ass"] \arrow[dr, "u_d \otimes Id"'] & & B \otimes (I \otimes A) \arrow[dl, "Id \otimes u_g"] \\
& B \otimes A &
\end{tikzcd}$$

b) Résulte de la commutation du triangle (T_2) suivant dans $\mathbb{V}$ (où ici $B = I$ et $A = U(g)$) et de la naturalité de u_d dans $\mathbb{V}$:

$$\begin{tikzcd}
(B \otimes A) \otimes I \arrow[rr, "ass"] \arrow[dr, "u_d"'] & & B \otimes (A \otimes I) \arrow[dl, "Id \otimes u_d"] \\
& B \otimes A &
\end{tikzcd}$$

c) Mêmes arguments qu'au (a) (où ici $U(h) = B$ et $A = I$).

Proposition 2.4. : Considérons, à nouveau, le triplet de flèches composables suivant $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} T$ dans $\mathbb{B}$. Alors :
a) si $U(f) = I$, on a $(h \otimes g)f = h \otimes (gf)$,
b) si $U(g) = I$, on a $(hg) \otimes f = h \otimes (gf)$
c) si $U(h) = I$, on a $(hg) \otimes f = h(g \otimes f)$

<u>*Preuve*</u> : a) Résulte de la commutation dans $\mathbb{V}$ du triangle (T_2) dans la proposition précédente (où $U(g) = A, U(h) = B$). b) Résulte de la commutation dans $\mathbb{V}$ du triangle (T_1) dans la proposition précédente (où $U(f) = A, U(h) = B$). c) Résulte de la commutation suivante dans $\mathbb{V}$ (où $U(f) = A, U(g) = B$)

$$\begin{tikzcd}
(I \otimes B) \otimes A \arrow[rr, "ass"] \arrow[dr, "u_g \otimes Id"'] & & I \otimes (B \otimes A) \arrow[dl, "u_g"] \\
& B \otimes A &
\end{tikzcd}$$

Proposition 2.5. : 1) Soit $X \xrightarrow[A]{\alpha} Y$ une flèche de $\mathbb{B}$, alors on a :

$$Id_Y \otimes \alpha = u^\star_{g,A}(\alpha) \quad \text{et} \quad \alpha \otimes Id_X = u^\star_{d,A}(\alpha)$$

2) Soient $X \xrightarrow[A]{\alpha} Y \xrightarrow[B]{\beta} Z \xrightarrow[C]{\gamma} T$ trois flèches composables alors on a :

$$\gamma \otimes (\beta \otimes \alpha) = ass^\star_{C,B,A}((\gamma \otimes \beta) \otimes \alpha)$$

<u>*Preuve*</u> : Immédiat.

Définition 2.6. :$\mathcal{B} = (\mathbb{B}, U)$ étant une catégorie mutante sur $\mathbb{V}$, on appelle *catégorie sous-jacente* à $\mathcal{B}$ (et on la note $\underline{\mathcal{B}}$), la catégorie dont :
- les objets sont ceux de $\mathbb{B}$ (i.e. $|\underline{\mathcal{B}}| = |\mathbb{B}|$).
- les flèches sont données par $\underline{\mathcal{B}}(X, Y) = Hom_I(X, Y)$.
La composition de $\underline{\mathcal{B}}$ est la composition stricte. Les axiomes de catégorie résultent de la proposition 2.3.

• Considérons maintenant un foncteur mutant $\Phi : \mathcal{B} \to \mathcal{B}'$ où $\mathcal{B} = (\mathbb{B}, U)$ et $\mathcal{B}' = (\mathbb{B}', U')$.

Proposition 2.7. : Considérons dans $\mathcal{B}$ le couple de flèches composables suivant :

$$X \xrightarrow[A]{f} Y \xrightarrow[B]{g} Z$$

Alors, si $A = I$ ou $B = I$ on a l'identité suivante :

$$\Phi(gf) = \Phi(g)\Phi(f).$$

<u>*Preuve*</u> : Immédiat.

Définition 2.8. : $\Phi : \mathcal{B} \to \mathcal{B}'$ étant un foncteur mutant, on appelle *foncteur sous-jacent à* Φ le foncteur noté $\underline{\Phi} : \underline{\mathcal{B}} \to \underline{\mathcal{B}}'$, défini,
- sur les objets par $|\underline{\Phi}| = |\Phi|$,
- sur une flèche $f : X \to X'$ de $\underline{\mathcal{B}}$, par $\underline{\Phi}(f) = \Phi(f)$,
(Les axiomes de foncteur résultent de la proposition précédente).

• Nous sommes maintenant en mesure de définir les transformations naturelles mutantes.

Définition 2.9. :1) $\Phi, \Phi' : \mathcal{B} \to \mathcal{B}'$ étant deux foncteurs mutants, on appelle *transformation naturelle mutante* sur $\mathbb{V}$, et on note $t : \Phi \to \Phi'$, la donnée d'une famille de flèches de $\underline{\mathcal{B}}'$, $(t_X : \Phi X \to \Phi' X)_{X \in |\underline{\mathcal{B}}|}$, vérifiant la condition suivante :
Pour tout $X, Y \in |\underline{\mathcal{B}}|$ et toute flèche $\alpha : X \to Y$ de $\mathcal{B}$, on a l'identité $t_Y \Phi(\alpha) = \Phi'(\alpha) t_X$ (où ici la composition dans $\mathcal{B}'$ est stricte).
2) Clairement une transformation naturelle mutante $t : \Phi \to \Phi'$ produit canoniquement une transformation naturelle notée $\underline{t} : \underline{\Phi} \to \underline{\Phi}'$. On dit que c'est la *transformation naturelle sous-jacente à* t.

On vérifie sans difficulté que, catégories mutantes (sur $\mathbb{V}$), foncteurs mutants (sur $\mathbb{V}$) et transformation naturelles mutantes (sur $\mathbb{V}$) forment une 2-catégorie notée $Cat\mu(\mathbb{V})$. On a aussi un 2-foncteur canonique

$$U : Cat\mu(\mathbb{V}) \to \mathbb{C}at,$$

défini sur les objets par $U(\mathcal{B}) = \underline{\mathcal{B}}$, sur les flèches par $U(\Phi) = \underline{\Phi}$, sur les 2-cellules par $U(t) = \underline{t}$.

Les exemples de catégories mutantes donnés dans 1.3 se prolongent en des 2-foncteurs $\mu e : \mathbb{V}\text{-}Cat \to Cat\mu(\mathbb{V})$, $\mu t : \mathbb{V}\text{-}Pretens \to Cat\mu(\mathbb{V})$, $\mu c : \mathbb{V}\text{-}Precot \to Cat\mu(\mathbb{V})$. On les construit de la façon suivante:
• *Pour* μe :
- sur un objet $\mathcal{C} \in |\mathbb{V}\text{-}Cat|$, $\mu e(\mathcal{C})$ a été construit à l'exemple 1.3(1).
- sur une flèche $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ de $\mathbb{V}\text{-}Cat$ (c'est donc un $\mathbb{V}$-foncteur), $\mu e(F) : \mu e(\mathcal{C}) \to \mu e(\mathcal{C}')$ est lui même donné,
.. sur les objets par $|\mu e(F)| = |F|$.
.. sur les flèches, pour $X, Y \in |\mu e(\mathcal{C})| = |\mathcal{C}|$,
$\mu e(F)_{XY} : \mu e(\mathcal{C})(X,Y) \to \mu e(\mathcal{C}')(FX, FY)$ est le foncteur défini par $\mu e(F)_{XY} = \Sigma_{F_{XY}} : \underline{V}/\mathcal{C}(X,Y) \to \underline{V}/\mathcal{C}'(FX, FY)$. On voit facilement que $\mu e(F)$ est un foncteur mutant.
- sur une 2-cellule $t : F \to F' : \mathcal{C} \to \mathcal{C}', \mu e(t) : \mu e(F) \to \mu e(F')$ est la trasformation naturelle mutante donnée par
$\mu e(t) = ((I, t_X) : FX \to F'X)_{x \in |\mathcal{C}|}$.
Avant de montrer les axiomes d'une transformation naturelle mutante on a besoin de caractériser la composition stricte dans les catégories mutantes $\mu e(\mathcal{C})$). Or, dans la situation suivante :

$$X \xrightarrow{(I,f)} Y \xrightarrow{(A,\alpha)} Z \xrightarrow{(I,g)} T$$

où (I, f) et (I, g) sont des flèches de $\underline{\mu e(\mathcal{C})}$, on a : $(A, \alpha)(I, f) = (A, \alpha/f)$ et $(I, g)(A, \alpha) = (A, g/\alpha)$ où ...

$$\alpha/f = (\ A \xrightarrow{u_d^{-1}} A \otimes I \xrightarrow{\alpha \otimes f} \mathcal{C}(Y,Z) \otimes \mathcal{C}(X,Y) \xrightarrow{comp} \mathcal{C}(X,Z)\ )$$

$$g/\alpha = (\ A \xrightarrow{u_g^{-1}} I \otimes A \xrightarrow{g \otimes \alpha} \mathcal{C}(Z,T) \otimes \mathcal{C}(Y,Z) \xrightarrow{comp} \mathcal{C}(Y,T)\ )$$

La vérification des axiomes de transformation naturelle mutante se fait ensuite sans difficulté particulière. Enfin la vérification que μe est un 2-foncteur est longue et fastidieuse mais sans grande difficulté.

• *Pour* μt :
- Sur un objet $\mathbb{E} \in |\mathbb{V}\text{-}Pretens|$, $\mu t(\mathbb{E})$ a été construit aux exemples 1.3(2).
- Sur une flèche $(F, \phi) : \mathbb{E} \to \mathbb{E}'$, $\mu t(F, \phi) : \mu t(\mathbb{E}) \to \mu t(\mathbb{E}')$ est lui-même donné...
.. Sur les objets par $|\mu t(F, \phi)| = |F|$.

.. Sur les flèches, pour $X, Y \in |\mu t(\mathbb{E})| = |\underline{E}|$,
$\mu t(F, \phi)_{XY} : \mu t(\mathbb{E})(X, Y) \to \mu t(\mathbb{E}')(FX, FY)$ est le foncteur défini...
... sur un objet $(A, \alpha) \in |\mu t(\mathbb{E})(X, Y)|$, par $\mu t(F, \phi)_{XY}(A, \alpha) = (A, \bar{\alpha})$ où

$$\bar{\alpha} = (\ A \wedge FX \xrightarrow{\phi_{A,X}} F(A \wedge X) \xrightarrow{F(\alpha)} FY\ )$$

... sur une flèche $a : (A, \alpha) \to (A', \alpha')$ par $\mu t(F, \phi)_{XY}(a) = a$.
$\mu t(F, \phi)_{XY}$ est fonctoriel de façon évidente. On voit facilement ensuite que $\mu t(F, \phi)$ est un foncteur mutant.
- Sur une 2-cellule $t : (F, \phi) \to (F', \phi'), \mu t(t) : \mu t(F, \phi) \to \mu t(F', \phi')$ est la transformation naturelle mutante donnée par
$\mu t(t) = ((I, \tilde{t}_X) : FX \to F'X)_{X \in |\underline{E}|}$ où

$$\tilde{t}_X = (\ I \wedge FX \xrightarrow{s_{FX}} FX \xrightarrow{t_X} F'X\ )$$

Là encore, avant de montrer les axiomes d'une transformation naturelle mutante on caractérise la composition stricte dans les catégories mutantes $\mu t(\mathbb{E})$. Or, dans la situation suivante :

$$X \xrightarrow{(I,f)} Y \xrightarrow{(A,\alpha)} Z \xrightarrow{(I,g)} T$$

où (I, f) et (I, g) sont des flèches de $\underline{\mu t(\mathbb{E})}$, on a : $(A, \alpha)(I, f) = (A, \alpha/f)$ et $(I, g)(A, \alpha) = (A, g/\alpha)$ où...

$$\alpha/f = (\ A \wedge X \xrightarrow{u_d^{-1} \wedge Id} (A \otimes I) \wedge X \xrightarrow{am} A \wedge (I \wedge X) \xrightarrow{Id \wedge f} A \wedge Y \xrightarrow{\alpha} Z\ )$$

$$g/\alpha = (\ A \wedge Y \xrightarrow{u_g^{-1} \wedge Id} (I \otimes A) \wedge Y \xrightarrow{am} I \wedge (A \wedge Y) \xrightarrow{Id \wedge \alpha} I \wedge Z \xrightarrow{g} T\ )$$

La vérification des axiomes de transformation naturelle mutante se fait ensuite sans difficulté particulière. Comme pour μe, la preuve que μt est 2-fonctoriel est longue et fastidieuse mais sans difficulté notable.

• *Pour* μc:
Sa construction s'obtient grâce à celle de μt. Le 2-foncteur μc est défini comme étant le composé suivant :

$$\mathbb{V}\text{-}Precot \xrightarrow{Red} (\mathbb{V}^\star\text{-}Pretens)^{opv} \xrightarrow{\mu t^{opv}} Cat\mu(\mathbb{V}^\star)^{opv} \xrightarrow{et^{opv}} Cat\mu(\mathbb{V})$$

où $et = (-)^\star$ et où Red est défini dans la partie I, section 4.
Le 2-foncteur μc se caractérise de la façon suivante :
- Sur un objet $\mathbb{E}$, on retrouve la construction de $\mu c(\mathbb{E})$ donnée dans l'exemple 1.3(3).
- Sur une flèche $(F,\psi) : \mathbb{E} \to \mathbb{E}'$, $\mu c(F,\psi) : \mu c(\mathbb{E}) \to \mu c(\mathbb{E}')$ est donné...
.. sur les objets par $|\mu c(F,\psi)| = |F|$,
.. sur les flèches, pour $X, Y \in |\mu c(\mathbb{E})| = |\underline{E}|$,
$\mu c(F,\psi)_{XY} : \mu c(\mathbb{E})(X,Y) \to \mu c(\mathbb{E}')(FX,FY)$ est le foncteur défini...
... sur un objet $(A,\alpha) \in |\mu c(\mathbb{E})(X,Y)|$, par $\mu c(F,\psi)_{XY}(A,\alpha) = (A,\hat{\alpha})$ où, dans $\underline{E}'$,

$$\hat{\alpha} = (\ FY \xrightarrow{F\alpha} F(X^A) \xrightarrow{\psi_{X,A}} F(X)^A\ )$$

... sur une flèche $a : (A,\alpha) \to (A',\alpha')$ par $\mu c(F,\psi)_{XY}(a) = a.$
- Sur une 2-cellule $t : (F,\psi) \to (F',\psi')$,
$\mu c(t) = ((I,\check{t}_X) : FX \to F'X)_{X\in|\underline{E}|}$ où

$$\check{t}_X = (\ FX \xrightarrow{t_X} F'X \xrightarrow{\sigma} F'(X)^I)\ .$$

3. Saveurs d'une catégorie mutante

• Fixons une catégorie mutante $\mathcal{B} = (\mathbb{B}, U)$ sur une catégorie monoïdale $\mathbb{V}$. On construit un foncteur $Tri_{\mathcal{B}} : \underline{V}^{op} \times \underline{\mathcal{B}}^{op} \times \underline{\mathcal{B}} \to \underline{\mathbb{E}ns}$ (ou simplement Tri). Il est défini,
- sur un objet (A,X,Y) par $Tri(A,X,Y) = Hom_A(X,Y)$ (voir la notation à la section 2),
- sur une flèche $(a,x,y) : (A,X,Y) \to (A',X',Y')$, $Tri(A,X,Y)$ est l'application composée :

$$Hom_A(X,Y) \overset{a^\star(-)}{\to} Hom_{A'}(X,Y) \overset{(-)x}{\to} Hom_{A'}(X',Y) \overset{y(-)}{\to} Hom_{A'}(X',Y').$$

La première application vient du fait que $U_{XY} : \mathbb{B}(X,Y) \to \underline{V}$ est une fibration discrète. Les autres applications proviennent de la composition stricte. Pour montrer la fonctorialité de Tri on utilise la commutation des carrés $(C_1), (C_2)$ et (C_3) suivants :

$$\begin{array}{ccc} Hom_A(X,Y) & \xrightarrow{(-)x} & Hom_A(X',Y) \\ {\scriptstyle y(-)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle y(-)} \\ Hom_A(X,Y') & \xrightarrow[(-)x]{} & Hom_A(X',Y') \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} Hom_A(X,Y) & \xrightarrow{(-)x} & Hom_A(X',Y) \\ {\scriptstyle a^\star(-)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle a^\star(-)} \\ Hom_{A'}(X,Y) & \xrightarrow[(-)x]{} & Hom_{A'}(X',Y) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} Hom_A(X,Y) & \xrightarrow{y(-)} & Hom_A(X,Y') \\ {\scriptstyle a^\star(-)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle a^\star(-)} \\ Hom_{A'}(X,Y) & \xrightarrow[y(-)]{} & Hom_{A'}(X,Y') \end{array}$$

(Pour le premier carré cela résulte de l'associativité stricte et pour les deux autres l'axiome (CM) est appliqué à $U_{X'Y}$ et $U_{XY'}$).

Définition 3.1. : On dit que :
1) $\mathcal{B}$ est *de saveur enrichie* (ou simplement *de saveur* E) si :
Pour tout $X, Y \in |\underline{\mathcal{B}}|$, $Tri(-, X, Y) : \underline{V}^{op} \to \underline{\mathbb{E}ns}$ est représentable.
2) $\mathcal{B}$ est *de saveur tensorisée* (ou simplement *de saveur* T) si :
Pour tout $A \in |\underline{V}|$ et tout $X \in |\underline{\mathcal{B}}|$, $Tri(A, X, -) : \underline{\mathcal{B}} \to \underline{\mathbb{E}ns}$ est co-représentable.
3) $\mathcal{B}$ est *de saveur cotensorisée* (ou simplement *de saveur* C) si :
Pour tout $A \in |\underline{V}|$ et tout $Y \in |\underline{\mathcal{B}}|$, $Tri(A, -, Y) : \underline{\mathcal{B}}^{op} \to \underline{\mathbb{E}ns}$ est représentable.

• Étudions maintenant chacune des différentes saveurs :

Proposition 3.2. : On suppose que $\mathcal{B}$ est de saveur E. Alors il existe une catégorie enrichie $\mathcal{B}^e$ telle que $\mu e(\mathcal{B}^e) \simeq \mathcal{B}$.

Preuve : Pour chaque couple $(X, Y) \in |\mathcal{B}|^2$, choisissons une représentation $(\mathcal{B}^e(X, Y),\ X \xrightarrow[\mathcal{B}^e(X,Y)]{ev_{XY}} Y\ )$ du préfaisceau $Tri(-, X, Y)$.

1) À partir de cette famille de choix on construit canoniquement une catégorie enrichie (notée $\mathcal{B}^e$) où :
- $|\mathcal{B}^e| = |\mathcal{B}|$,
- Les Hom internes sont donnés par les $\mathcal{B}^e(X, Y)$,
- Pour tout $X \in |\mathcal{B}^e|, id_X : I \to \mathcal{B}^e(X, Y)$ est l'unique flèche de $\underline{V}$ telle

que $Tri(id_X, X, X)(ev_{XY}) = Id_X$ (i.e. $id_X^\star(ev_{XX}) = Id_X$).
- Pour tout $X, Y, Z \in |\mathcal{B}^e|$, $comp_{XYZ} : \mathcal{B}^e(Y, Z) \otimes \mathcal{B}^e(X, Y) \to \mathcal{B}^e(X, Z)$ est l'unique flèche de $\underline{V}$ telle que
$Tri(comp_{XYZ}, X, Z)(ev_{XZ}) = ev_{YZ} \otimes ev_{XY}$
(i.e. $comp_{XYZ}^\star(ev_{XZ}) = ev_{YZ} \otimes ev_{XY}$).
Vérifions maintenant les axiomes des catégories enrichies.
- L'unité à gauche : On montre sans difficulté l'identité suivante (où $A = \mathcal{B}^e(X, Y)$): $(comp_{XYY}.(id_Y \otimes Id_A))^\star(ev_{XY}) = u_{g,A}^\star(ev_{XY})$.
- L'unité à droite se montre de la même façon.
- L'associativité : Cela résulte des identités suivantes (où $U = \mathcal{B}^e(Z, T), V = \mathcal{B}^e(Y, Z), W = \mathcal{B}^e(X, Y)$):
$(comp_{XZT}.(Id_U \otimes comp_{XYZ}).ass_{UVW})^\star(ev_{XT}) = (ev_{ZT} \otimes ev_{YZ}) \otimes ev_{XY} = (comp_{XYT}.(comp_{YZT} \otimes Id_W))^\star(ev_{XT})$.
2) On construit ensuite un isomorphisme $\gamma^e : \mathcal{B} \to \mu e(\mathcal{B}^e)$. Il est donné...
- sur les objets par $|\gamma^e| = Id$,
- sur une flèche $\alpha : X \to Y$ de $\mathcal{B}$ par $\gamma^e(\alpha) = (A, f)$ où $A = U_{XY}(\alpha)$ et $f : A \to \mathcal{B}^e(X, Y)$ est l'unique flèche de $\underline{V}$ telle que $f^*(ev_{XY}) = \alpha$.
- sur une 2-cellule $a : \alpha \to \alpha' : X \to Y$ par $\gamma^e(a) = U_{XY}(a)$.
On vérifie facilement que γ^e est un isomorphisme où $\gamma^{e-1}(A, f) = f^*(ev_{XY})$ et sur une 2-cellule $a : (A, f) \to (A', f')$,
$\gamma^{e-1}(a) : \gamma^{e-1}(A, f) \to \gamma^{e-1}(A', f')$ est l'unique flèche de $\mathbb{B}(X, Y)$ de but $\gamma^{e-1}(A', f')$ telle que $U_{XY}(\gamma^{e-1}(a)) = a$.

Proposition 3.3. :On suppose que $\mathcal{B}$ est de saveur T. Alors il existe une catégorie prétensorisée $\mathcal{B}^t$ telle que $\mu t(\mathcal{B}^t) \simeq \mathcal{B}$.

Preuve : Pour chaque couple $(A, X) \in |\underline{V}| \times |\underline{\mathcal{B}}|$, choisissons une co-représentation $(A \wedge X,\ X \xrightarrow[A]{val_{A,X}} A \wedge X\ )$ de $Tri(A, X, -)$.
1) À partir de cette famille de choix on construit canoniquement une catégorie $\mathbb{V}$-prétensorisée notée $\mathcal{B}^t$ où $\mathcal{B}^t = (\underline{\mathcal{B}}, \wedge, s, am)$.
- $\wedge : \underline{V} \times \underline{\mathcal{B}} \to \underline{\mathcal{B}}$ est construit sur les objets comme précédemment. Sur une flèche $(a, x) : (A, X) \to (A', X')$, on disdingue les deux cas suivants :
.. si $x = Id$, alors $a \wedge Id : A \wedge X \to A' \wedge X$ est l'unique flèche de $\underline{\mathcal{B}}$ telle que $Tri(A', X, a \wedge Id_X)(val_{A,X})) = a^\star(val_{A',X})$
(i.e. $(a \wedge Id)val_{A,X} = a^\star(val_{A',X})$) (à gauche la composition est stricte).
.. si $a = Id$, alors $Id \wedge x : A \wedge X \to A \wedge X'$ est l'unique flèche de $\underline{\mathcal{B}}$ telle que

$Tri(A, X, Id_A \wedge x)(val_{A,X})) = val_{A,X'}x$ (i.e.$(Id \wedge x)val_{A,X} = val_{A,X'}x$) (les compositions sont strictes).
Dans le cas général on vérifie d'abord que le carré (C) suivant est commutatif dans $\underline{\mathcal{B}}$:

$$\begin{tikzcd} A \wedge X \arrow[r, "a\wedge Id"] \arrow[d, "Id\wedge x"'] & A' \wedge X \arrow[d, "Id\wedge x"] \\ A \wedge X' \arrow[r, "a\wedge Id"'] & A' \wedge X' \end{tikzcd}$$

(Cela résulte des identités suivantes : $(a\wedge Id)(Id\wedge x)val_{A,X} = a^{\star}(val_{A',X'})x$ $= (Id \wedge x)a^{\star}(val_{A',X}) = (Id \wedge x)(a \wedge Id)val_{A,X}$ où la seconde égalité résulte de (C_2) et (C_3)). On peut alors poser $a \wedge x = (Id_{A'} \wedge x)(a \wedge Id_X) = (a \wedge Id_{X'})(Id_A \wedge x)$. La fonctorialité de $\wedge$ résulte de celle de $(-) \wedge X$ et $A \wedge (-)$, pour tout $X \in |\underline{\mathcal{B}}|$ et $B \in |\underline{V}|$ (pour la première on utilise (C_3)) et de la commutation du carré (C).
- Pour chaque $X \in |\underline{\mathcal{B}}|, s_X : I \wedge X \to X$ est l'unique flèche de $\underline{\mathcal{B}}$ telle que $s_X val_{I,X} = Id_X$. Le fait que s_X est un isomorphisme résulte du fait que $Tri(I, X, -) = \underline{\mathcal{B}}(X, -)$. La naturalité de s est sans difficulté.
- Pour chaque $A, B \in |\underline{V}|, X \in |\underline{\mathcal{B}}|$, $am_{A,B,X} : (A\otimes B)\wedge X \to A\wedge(B\wedge X)$ est l'unique flèche de $\underline{\mathcal{B}}$ telle que $am_{A,B,X}val_{A\otimes B,X} = val_{A,B\wedge X} \otimes val_{B,X}$. La naturalité de $am_{A,B,X}$ se montre successivement en A, B et X.
.. En A, soit $a : A \to A'$ une flèche de $\underline{V}$. La commutation voulue résulte des identités suivantes : $(a \wedge Id)am\, val_{A\otimes B,X} = a^{\star}(val_{A',B\wedge X}) \otimes val_{B,X} = am((a \otimes Id) \wedge Id)val_{A\otimes B,X}$ où pour la seconde égalité on utilise (C_3).
.. En B, mêmes arguments qu'en A.
.. En X. Soit $x : X \to X'$ une flèche de $\underline{\mathcal{B}}$. La commutation voulue résulte des identités suivantes :
$(Id\wedge(Id\wedge x))am\, val_{A\otimes B,X} = (val_{A,B\wedge X'}\otimes val_{B,X'})x = am(Id\wedge x)val_{A\otimes B,X}$
- La vérification des axiomes (UG) et (UD) est sans difficulté.
- Pour l'axiome (AM) on utilise (C_3).
2) On construit ensuite un isomorphisme canonique $\gamma : \mathcal{B} \to \mu t(\mathcal{B}^t)$. Il est donné...
- sur les objets par $|\gamma| = Id$,
- sur une flèche $\alpha : X \to Y$ de $\mathbb{B}$, par $\gamma(\alpha) = (A, f)$ où $A = U_{XY}(\alpha)$ et $f : A \wedge X \to Y$ est l'unique flèche de $\underline{\mathcal{B}}$ telle que $f val_{A,X} = \alpha$ (la composition est stricte).
- sur une 2-cellule $a : \alpha \to \alpha' : X \to Y$ par $\gamma(a) = U_{XY}(a)$.

Le fait que γ est un isomorphisme de catégorie mutante est sans difficulté.

Proposition 3.4. :On suppose que $\mathcal{B}$ est de saveur C. Alors il existe une catégorie précotensorisée $\mathcal{B}^c$ telle que $\mu t(\mathcal{B}^c) \simeq \mathcal{B}$.

Preuve : - Avant de montrer cette proposition construisons $\mathcal{B}^\star$ la catégorie mutante (sur $\mathbb{V}^\star$) duale.
Elle est définie par $\mathcal{B}^\star = (\mathbb{B}^\star, U^\star)$ où $\mathbb{B}^\star$ est la bicatégorie opposée pour la loi $\otimes$, caractérisée par :
$|\mathbb{B}^\star| = |\mathbb{B}|,\ \forall X, Y \in |\mathbb{B}^\star|,\ \mathbb{B}^\star(X,Y) = \mathbb{B}(Y,X),\ \forall X \in |\mathbb{B}^\star|,\ id^\star_X = id_X$
et $\forall X, Y, Z \in |\mathbb{B}^\star|,\ (\ \mathbb{B}^\star(Y,Z) \times \mathbb{B}^\star(X,Z) \xrightarrow{\otimes^\star_{XYZ}} \mathbb{B}^\star(X,Z)\ ) =$
$(\ \mathbb{B}(Z,Y) \times \mathbb{B}(Y,X) \xrightarrow{\sim} \mathbb{B}(Y,X) \times \mathbb{B}(Z,Y) \xrightarrow{\otimes_{ZYX}} \mathbb{B}(Z,X)\ ).$
Pour $U^\star$, on a $|U^\star| = |U|$ et $\forall X, Y \in |\mathbb{B}^\star|,\ U^\star_{XY} = U_{YX}$.
On vérifie que $\underline{\mathcal{B}^\star} = (\underline{\mathcal{B}})^{op}$ et que $Tri^\star : \underline{V}^{op} \times (\underline{\mathcal{B}^\star})^{op} \times (\underline{\mathcal{B}^\star}) \to \underline{\mathbb{E}ns}$ est donné par $Tri^\star(A,X,Y) = Tri(A,Y,X)$ et pour
$(a,x,y) : (A,X,Y) \to (A',X',Y')$ dans $\underline{V}^{op} \times (\underline{\mathcal{B}^\star})^{op} \times (\underline{\mathcal{B}^\star}) =$
$\underline{V}^{op} \times \underline{\mathcal{B}} \times \underline{\mathcal{B}}^{op},\ Tri^\star(a,x,y) = Tri(a,y,x)$.
- Si on en revient à notre proposition, on constate que $\mathcal{B}$ est de saveur cotensorisée ssi pour tout $A \in |\underline{V}|$, pour tout $Y \in |\mathbb{B}|, Tri(A,-,Y)$: $(\underline{\mathcal{B}})^{op} \to \underline{\mathbb{E}ns}$ est représentable et donc ssi $Tri^\star(A,Y,-) : \underline{\mathcal{B}^\star} \to \underline{\mathbb{E}ns}$ est co-représentable c.a.d. que $\mathcal{B}^\star$ est de saveur tensorisée sur $\mathbb{V}^\star$. Donc $\mathcal{B}^\star \simeq \mu t(\mathcal{B}^{\star t})$ et donc $\mathcal{B} \simeq \mu t(\mathcal{B}^{\star t})^\star$. Ainsi, si on pose $\mathcal{B}^c = Red^{-1}(\mathcal{B}^{\star t})$, $\mathcal{B}^c$ est une catégorie $\mathbb{V}$-précotensorisée et $\mu c(\mathcal{B}^c) = \mu t(Red(\mathcal{B}^c))^\star$ se vérifie sans difficulté. On a donc bien $\mu c(\mathcal{B}^c) \simeq \mathcal{B}$.

Proposition 3.5. : Fixons deux catégories mutantes $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$. On les suppose toutes deux de saveurs E.
1) $\Phi : \mathcal{B} \to \mathcal{B}'$ étant un foncteur mutant, il existe un foncteur enrichi Φ^e : $\mathcal{B}^e \to \mathcal{B}'^e$ tel que le carré (C_e) suivant commute :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{B} \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "\gamma^e"'] & \mathcal{B}' \arrow[d, "\gamma'^e"] \\ \mu e(\mathcal{B}^e) \arrow[r, "\mu e(\Phi^e)"'] & \mu e(\mathcal{B}'^e) \end{tikzcd}$$

(pour les catégories enrichies $\mathcal{B}^e$ et $\mathcal{B}'^e$ et les isomorphismes γ^e et γ'^e voir la proposition 3.2).

2) $t : \Phi \to \Phi' : \mathcal{B} \to \mathcal{B}'$ étant une transformation naturelle mutante, il existe une transformation naturelle enrichie $t^e : \Phi^e \to \Phi'^e : \mathcal{B}^e \to \mathcal{B}'^e$ telle que :

$$(\gamma'^e.\Phi \xrightarrow{Id_{\gamma'^e}.t} \gamma'^e.\Phi') = (\mu e(\phi^e).\gamma^e \xrightarrow{\mu e(t^e).Id_{\gamma^e}} \mu e(\phi'^e).\gamma^e)$$

Preuve : 1) Comme pour la construction de $\mathcal{B}^e$, choisissons pour chaque $X, Y \in |\mathcal{B}|$, une représentation $(\mathcal{B}^e(X,Y), ev_{XY})$ de $Tri_{\mathcal{B}}(-,X,Y)$ puis, de la même façon, choisissons aussi, pour chaque $X', Y' \in |\mathcal{B}'|$ une représentation $(\mathcal{B}'^e(X',Y'), ev_{X'Y'})$ du préfaisceau $Tri_{\mathcal{B}'}(-,X',Y')$. À partir de ces deux familles de choix on a construit canoniquement des catégories enrichies $\mathcal{B}^e$ et $\mathcal{B}'^e$ et des isomorphismes de catégories mutantes $\gamma^e : \mathcal{B} \to \mu e(\mathcal{B}^e)$ et $\gamma'^e : \mathcal{B}' \to \mu e(\mathcal{B}'^e)$(voir 3.2). Pour chaque $X, Y \in |\mathcal{B}|$, puisque $\Phi_{XY}(ev_{XY}) \in Tri(\mathcal{B}^e(X,Y), \Phi X, \Phi Y)$, il existe une unique flèche $\Phi^e_{XY} : \mathcal{B}^e(X,Y) \to \mathcal{B}'^e(\Phi X, \Phi Y)$ telle que

$$Tri(\Phi^e_{XY}, \Phi X, \Phi Y)(ev_{\Phi X \Phi Y}) = \Phi_{XY}(ev_{XY})$$

i.e. $\Phi^{e*}_{XY}(ev_{\Phi X \Phi Y}) = \Phi_{XY}(ev_{XY})$. On construit ainsi un foncteur enrichi $\Phi^e : \mathcal{B}^e \to \mathcal{B}'^e$ tel que $|\Phi^e| = |\Phi|$.

Dans la vérification de la fonctionnalité...
- pour la commutation avec les unités, il suffit de montrer l'identité $(\Phi^e_{XX}.id_X)^*(ev_{\Phi X \Phi X}) = id^*_{\Phi X}(ev_{\Phi X \Phi X})$,
ce qui se fait sans difficulté.
- pour la commutation avec la composition, cela résulte des identités : $(comp.(\Phi^e_{YZ} \otimes \Phi^e_{XY}))^*(ev_{\Phi X \Phi Z}) = \Phi_{XZ}(ev_{YZ} \otimes ev_{XY}) = (\Phi^e_{XZ}.comp)^*(ev_{\Phi X \Phi Z})$.
- On montre enfin que le carré (C_e) de l'énoncé commute.

Sur les objets c'est immédiat. Sur une flèche $\alpha : X \to Y$ de $\mathcal{B}$, après avoir posé $A = U(\alpha)$, on voit que $\gamma'^e\Phi(\alpha) = (A, f')$ où $f' : A \to \mathcal{C}'(\Phi X, \Phi Y)$ est l'unique flèche de $\mathbb{V}$ telle que $f'^*(ev_{\Phi X \Phi Y}) = \Phi(\alpha)$ et $\mu e(\Phi^e)\gamma^e(\alpha) = (A, \bar{f})$ où $\bar{f} = (A \xrightarrow{f} \mathcal{C}(XY) \xrightarrow{\Phi^e_{XY}} \mathcal{C}'(\Phi X, \Phi Y))$, en notant f l'unique flèche de $\mathbb{V}$ telle que $f^*(ev_{XY}) = \alpha$. On vérifie ensuite que $f' = \bar{f}$, mais cela résulte des identités suivantes : $\bar{f}^*(ev_{\Phi X \Phi Y}) = \Phi_{XY}(\alpha) = f'^*(ev_{\Phi X \Phi Y})$. Enfin sur une 2-cellule c'est immédiat.

2) - Pour chaque $X \in |\mathcal{B}|$, comme $t_X \in Tri(I, \Phi X, \Phi' X)$, on peut considérer l'unique flèche $t^e_X : I \to \mathcal{B}'^e(\Phi X, \Phi' X)$ dans $\mathbb{V}$ telle que $t^{e*}_X(ev_{\Phi X \Phi' X}) = t_X$. Montrons qu'on construit ainsi une transformation naturelle enrichie $t^e : \Phi^e \to \Phi'^e$. Pour cela on montre que le diagramme

suivant commute, pour tout $X, Y \in |\mathcal{B}|$:

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{B}^e(X,Y) \arrow[dl, "\Phi^e_{XY}"'] \arrow[dr, "\Phi'^e_{XY}"] & \\
\mathcal{B}'^e(\Phi X, \Phi Y) \arrow[d, "u_g^{-1}"'] & & \mathcal{B}'^e(\Phi' X, \Phi' Y) \arrow[d, "u_d^{-1}"] \\
I \otimes \mathcal{B}'^e(\Phi X, \Phi Y) \arrow[d, "t^e_Y \otimes Id"'] & & \mathcal{B}'^e(\Phi' X, \Phi' Y) \otimes I \arrow[d, "Id \otimes t^e_X"] \\
\mathcal{B}'^e(\Phi Y, \Phi' Y) \otimes \mathcal{B}'^e(\Phi X, \Phi Y) \arrow[dr, "comp"'] & & \mathcal{B}'^e(\Phi' X, \Phi' Y) \otimes \mathcal{B}'^e(\Phi X, \Phi' X) \arrow[dl, "comp"] \\
 & \mathcal{B}'^e(\Phi X, \Phi' Y) &
\end{tikzcd}$$

Soit $x, y : \mathcal{B}^e(X,Y) \to \mathcal{B}'^e(\Phi X, \Phi' Y)$ les deux flèches composées de gauche et de droite. Pour montrer que $x = y$ on voit que $x^*(ev_{\Phi X, \Phi' Y}) = t_Y \Phi_{XY}(ev_{XY}) = \Phi'_{XY}(ev_{XY}) t_X = y^*(ev_{\Phi X, \Phi' Y})$.
- Enfin, pour montrer l'identité de l'énoncé, on voit que pour tout $X \in |\mathcal{B}|,\ \gamma'^e(t_X) = (I, t^e_X) = \mu e(t^e)_{\gamma X}$.

Proposition 3.6. : Fixons deux catégories mutantes $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$. On les suppose toutes deux de saveurs T.
1) $\Phi : \mathcal{B} \to \mathcal{B}'$ étant un foncteur mutant sur $\mathbb{V}$. alors il existe un morphisme de catégories $\mathbb{V}$-prétensorisées $\Phi^t : \mathcal{B}^t \to \mathcal{B}'^t$ tel que le carré (C_t) suivant commute :

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{B} \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "\gamma^t"'] & \mathcal{B}' \arrow[d, "\gamma'^t"] \\
\mu t(\mathcal{B}^t) \arrow[r, "\mu t(\Phi^t)"'] & \mu t(\mathcal{B}'^t)
\end{tikzcd}$$

où les catégories $\mathbb{V}$-prétensorisées $\mathcal{B}^t$ et $\mathcal{B}'^t$ et les morphismes de catégories mutantes γ^t et γ'^t ont été construits à la proposition 3.3.
2) $\theta : \Phi \to \Phi' : \mathcal{B} \to \mathcal{B}'$ étant une transformation naturelle mutante, il existe une 2-cellule $\theta^t : \Phi^t \to \Phi'^t : \mathcal{B}^t \to \mathcal{B}'^t$ dans $\mathbb{V}$-Pretens telle que :

$$(\ \gamma'^t.\Phi \xrightarrow{Id_{\gamma'^t}.\theta} \gamma'^t.\Phi'\ ) = (\ \mu t(\Phi^t).\gamma^t \xrightarrow{\mu t(\theta^t).Id_{\gamma^t}} \mu t(\Phi'^t).\gamma^t\ )$$

<u>*Preuve*</u> : 1)- Là encore, comme pour la construction de $\mathcal{B}^t$, choisissons, pour chaque $(A, X) \in |\underline{V}| \times |\underline{\mathcal{B}}|$ une co-représentation $(A \wedge X, val_{A,X})$ de $Tri_{\mathcal{B}}(A, X, -)$, puis de la même façon, pour chaque $(A', X') \in |\underline{V}| \times |\underline{\mathcal{B}'}|$, une co-représentation $(A' \wedge X', val_{A',X'})$ de $Tri_{\mathcal{B}'}(A', X', -)$. À partir de ces deux familles de choix, on a construit canoniquement des catégories $\mathbb{V}$-prétensorisées $\mathcal{B}^t$ et $\mathcal{B}'^t$ et des isomorphismes de catégories mutantes, soit $\gamma^t : \mathcal{B} \to \mu t(\mathcal{B}^t)$ et $\gamma'^t : \mathcal{B}' \to \mu t(\mathcal{B}'^t)$ (voir la proposition 3.3). Pour chaque $(A, X) \in |\underline{V}| \times |\underline{\mathcal{B}}|$, comme $\Phi(val_{A,X}) \in Tri(A, \Phi X, \Phi(A \wedge X))$ il existe une unique flèche $\phi_{A,X} : A \wedge \Phi X \to \Phi(A \wedge X)$ dans $\underline{\mathcal{B}'}$ telle que $\phi_{A,X} val_{A,\Phi X} = \Phi(val_{A,X})$ (à gauche la composition est stricte). On montre que $\phi_{A,X}$ est naturelle en A, X. Pour la naturalité en A, on montre que, pour toute flèche $a : A \to A'$ de $\mathbb{V}$ et $X \in |\underline{\mathcal{B}}|$ on a les identités suivantes $\Phi(a \wedge Id)\phi_{A,X} val_{A,\Phi X} = a^*\Phi(val_{A',X}) = \phi_{A',X}(a \wedge Id) val_{A,\Phi X}$. Pour la naturalité en X, on établit que , pour tout $A \in |\underline{V}|$, et toute flèche $x : X \to X'$ dans $\underline{\mathcal{B}}$ on a les identités suivantes $\Phi(Id \wedge x)\phi_{A,X} val_{A,\Phi X} = \Phi(val_{A,X'} x) = \phi_{A,X'}(Id \wedge \Phi x) val_{A,\Phi X}$. On vérifie ensuite les axiomes de morphisme entre catégories $\mathbb{V}$-prétensorisées.

- Pour l'axiome (MS) on établit les identités suivantes :
$\Phi(s_X)\phi_{I,X} val_{I,\Phi X} = Id_{\Phi X} = s_{\Phi X} val_{I,\Phi X}$.

- Pour l'axiome (Mam) on l'obtient grâce aux identités suivantes (où $A, B \in |\underline{V}|$ et $X \in |\underline{\mathcal{B}}|$):
$\phi_{A,B\wedge X}(Id_A \wedge \phi_{B,X}) am_{A,B,\Phi X}\, val_{A\otimes B,\phi X} = \Phi(val_{A,B\wedge X}) \otimes \Phi(val_{B,X}) = \Phi(am_{A,B,X})\phi_{A\otimes B,X} val_{A\otimes B,\Phi X}$.
Ainsi $\Phi^t = (\underline{\Phi}, \phi) : \mathcal{B}^t \to \mathcal{B}'^t$ est un morphisme de catégories $\mathbb{V}$-prétensorisées.

- Montrons maintenant la commutation du carré (C_t). Sur les objets c'est immédiat. Sur une flèche $\alpha : X \to Y$ de $\mathbb{B}$, on voit que $\gamma'^t\Phi(\alpha) = (A, f')$ où $A = U(\alpha)$ et $f' : A \wedge \Phi X \to \Phi Y$ est l'unique flèche de $\underline{\mathcal{B}'}$ telle que $f' val_{A,\Phi X} = \Phi(\alpha)$ et $\mu t(\Phi^t)\gamma^t(\alpha) = (A, \Phi(f)\phi_{A,X})$ où $f : A \wedge X \to Y$ est l'unique flèche de $\underline{\mathcal{B}}$ telle que $f val_{A,X} = \alpha$. L'identité $f' = \Phi(f)\phi_{A,X}$ se montre sans difficulté. Enfin la commutation de (C_t) sur les 2-cellules est immédiate.

2)- Pour tout $(A, X) \in |\underline{V}| \times |\underline{\mathcal{B}}|$, montrons que le carré suivant commute dans $\underline{\mathcal{B}'}$:

$$\begin{array}{ccc} A \wedge \Phi(X) & \xrightarrow{Id \wedge \theta_X} & A \wedge \Phi'(X) \\ {\scriptstyle \phi_{A,X}} \downarrow & & \downarrow {\scriptstyle \phi'_{A,X}} \\ \Phi(A \wedge X) & \xrightarrow[\theta_{A \wedge X}]{} & \Phi'(A \wedge X) \end{array}$$

(où $\Phi^t = (\underline{\Phi}, \phi), \Phi'^t = (\underline{\Phi'}, \phi')$). En fait cela résulte des identités suivantes : $\theta_{A \wedge X} \phi_{A,X} val_{A,\Phi X} = \Phi'(val_{A,X})\theta_X = \phi'_{A,X}(Id \wedge \theta_X) val_{A,\Phi X}$.
- pour l'identité de l'énoncé on voit que pour tout $X \in |\mathcal{B}|$,
$\gamma'^t(\theta_X) = (I, \bar{\theta}_X) = \mu t(\theta^t)_{\gamma^t X}$, où $\bar{\theta}_X = (\ I \wedge \Phi X \xrightarrow{s} \Phi X \xrightarrow{\theta_X} \Phi' X\ )$ (la première identité résultant du fait que $\bar{\theta}_X val_{I,\Phi X} = \theta_X$).

Remarque 3.7. : Dans la proposition qui suit on utilise le foncteur μp (où plus exactement le foncteur $\mu p_{\mathcal{B}^e \mathcal{B}'^t}$). Mais celui-ci ne sera défini qu'à la section suivante, autour de la proposition 4.6 (pour des questions d'organisation du texte). Nous vous renvoyons donc à cette section pour cette définition avant d'aborder la proposition suivante.

Proposition 3.8. : Soient encore deux catégories mutantes $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$. On suppose maintenant que $\mathcal{B}$ est de saveur E et $\mathcal{B}'$ est de saveur T.
1) $\Phi : \mathcal{B} \to \mathcal{B}'$ étant un foncteur mutant, il existe une passerelle $\Phi^p : \mathcal{B}^e \to \mathcal{B}'^t$ telle que le carré (C_p) suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{B} & \xrightarrow{\Phi} & \mathcal{B}' \\ {\scriptstyle \gamma^e} \downarrow & & \downarrow {\scriptstyle \gamma'^t} \\ \mu e(\mathcal{B}^e) & \xrightarrow[\mu p(\Phi^p)]{} & \mu t(\mathcal{B}'^t) \end{array}$$

où $\mathcal{B}^e$ est construit à la proposition 3.2 et $\mathcal{B}'^t$ l'est à la proposition 3.3 et enfin où $\mu p = \mu p_{\mathcal{B}^e \mathcal{B}'^t}$ est défini à la section suivante, comme averti dans la remarque 3.7.
2) Soit $\theta : \phi \to \phi' : \mathcal{B} \to \mathcal{B}'$ une transformation naturelle mutante. Il existe un morphisme canonique $\theta^p : \phi^p \to \phi'^p$ dans $\mathbb{V}$-$Pass(\mathcal{B}^e, \mathcal{B}'^t)$ telle que :

$$(\ \gamma'^t.\Phi \xrightarrow{Id_{\gamma'^t}.\theta} \gamma'^t.\Phi'\ ) = (\ \mu p(\Phi^p).\gamma^e \xrightarrow{\mu p(\theta^p).Id_{\gamma^e}} \mu p(\Phi'^p).\gamma^e\ )$$

.

<u>*Preuve*</u> : 1) Comme pour la construction de $\mathcal{B}^e$, choisissons pour chaque $X, Y \in |\mathcal{B}|$, une représentation $(\mathcal{B}^e(X,Y), ev_{XY})$ du préfaisceau $Tri_{\mathcal{B}}(-, X, Y)$ puis, comme pour la construction de $\mathcal{B}'^t$, choisissons, pour chaque $(A', X') \in |\underline{V}| \times |\underline{\mathcal{B}'}|$, une co-représentation $(A' \wedge X', val_{A',X'})$ de $Tri_{\mathcal{B}'}(A', X', -)$. Soient $X, Y \in |\mathcal{B}^e| = |\mathcal{B}|$. Comme $\Phi_{XY}(ev_{XY}) \in Tri(\mathcal{B}^e(X,Y), \Phi X, \Phi Y)$, il existe une unique flèche $\pi_{XY} : \mathcal{B}^e(X,Y) \wedge \Phi X \to \Phi Y$ dans $\underline{\mathcal{B}'}$ telle que $\pi_{XY} val_{\mathcal{B}^e(X,Y)\Phi X} = \Phi_{XY}(ev_{XY})$ (à gauche la composition est stricte). On note $\pi = (\pi_{XY})_{(X,Y) \in |\mathcal{B}^e|^2}$.
Montrons que le couple $(|\Phi|, \pi)$ est une $\mathbb{V}$-passerelle $\mathcal{B}^e \to \mathcal{B}'^t$.
- (PU) Résulte des identités suivantes (où pour $X \in |\mathcal{B}^e|$):
$\pi_{XX}(id_X \wedge Id_{\Phi X}) val_{I,\Phi X} = Id_{\Phi X} = s_X val_{I,\Phi X}$.
- (PC) Résulte, là encore, des identités suivantes, où pour X, Y, Z dans $|\mathcal{B}^e| = |\mathcal{B}|$ on note $U = \mathcal{B}(X,Y), V = \mathcal{B}(Y,Z)$:
$\pi_{YZ}(Id_V \wedge \pi_{XY}) am_{V,U,\Phi X} val_{V \otimes U, \Phi X} = \Phi_{YZ}(ev_{YZ}) \otimes \Phi_{XY}(ev_{XY}) = \pi_{XZ}(comp_{XYZ} \wedge Id_{\Phi X}) val_{V \otimes U, \Phi X}$.
On note Φ^p cette passerelle $\mathcal{B}^e \to \mathcal{B}'^t$.
- La commutation du carré (C_p) est immédiate sur les objets. Sur une flèche $\alpha : X \to Y$ de $\mathcal{B}$ on a $\gamma'^t \Phi(\alpha) = (A, f_0)$ où $A = U_{XY}(\alpha)$ et $f_0 : A \wedge \Phi X \to \Phi Y$ est l'unique flèche de $\underline{\mathcal{B}'}$ telle que $f_0 val_{A,\Phi X} = \Phi(\alpha)$.
Et d'un autre côté, on a $\mu p(\Phi^p).\gamma^e(\alpha) = \mu p(\Phi^p)(A, f) = (A, f_1)$ où $f : A \to \mathcal{B}^e(X,Y)$ est l'unique flèche de $\mathbb{V}$ telle que $f^*(ev_{XY}) = \alpha$ et où f_1 est la flèche composée suivante dans $\underline{\mathcal{B}'}$:
$A \wedge \Phi X \xrightarrow{f \wedge Id} \mathcal{B}^e(X,Y) \wedge \Phi X \xrightarrow{\pi_{XY}} \Phi Y$ et où π_{XY} provient de $\Phi^p = (|\Phi|, \pi)$. L'identité $f_0 = f_1$ se montre sans difficulté.
2) Montrons que la famille $(\theta_X : |\Phi|X \to |\Phi'|X)_{X \in |\mathcal{B}^e|}$ définit un morphisme de passerelles $\theta^p : \phi^p \to \phi'^p$ où $\phi^p = (|\Phi|, \pi), \phi'^p = (|\Phi'|, \pi')$.
- (MP) Résulte des identités suivantes, où $X, Y \in |\mathcal{B}^e| = |\mathcal{B}|$ en posant $A = \mathcal{B}^e(X,Y)$):
$\theta_Y \pi_{XY} val_{A,\Phi X} = \Phi'_{XY}(ev_{XY})\theta_X = \pi'_{XY}(Id_A \wedge \theta_X) val_{A,\Phi X}$.
- Pour l'identité du (2), on voit que, pour tout $X \in |\mathcal{B}|$, $\gamma'^t(\theta_X) = (I, f)$, où $f : I \wedge \Phi X \to \Phi' X$ est l'unique flèche de $\underline{\mathcal{B}'}$ telle que $f val_{I,\Phi X} = \theta_X$.
D'un autre côté $\mu p(\Phi^p)_{\gamma^e X} = (I, f')$ où f' est la flèche composée suivante dans $\underline{\mathcal{B}'}$: $I \wedge \Phi X \xrightarrow{s} \Phi X \xrightarrow{\theta_X} \Phi' X$. Le fait que $f = f'$ se montre sans difficulté.

4. Plongement dans la 2-catégorie $Cat\mu(\mathbb{V})$

• Le but principal de cette section est de montrer que les 2-foncteurs μe, μt et μc sont 2-pleinement fidèles.

Proposition 4.1. : μe : $\mathbb{V}$-$Cat \to Cat\mu(\mathbb{V})$ est 2-pleinement fidèle.

Preuve : Avant de le monter, commençons par prouver le lemme suivant

Lemme 4.2. : Soit $\mathcal{C} \in |\mathbb{V}\text{-}Cat|$, alors,
1) $\mu e(\mathcal{C})$ est de saveur E. On considére, pour chaque $X, Y \in |\mathcal{C}|$, le choix de représentation $(\mathcal{C}(X,Y),\ X \xrightarrow[\mathcal{C}(X,Y)]{ev_{XY}} Y\ )$ de $Tri(-,X,Y) : \underline{V}^{op} \to \underline{Ens}$ où $ev_{XY} = (\mathcal{C}(X,Y), Id_{\mathcal{C}(X,Y)})$ (dans la suite on l'appelera *la représentation canonique*). Alors, pour cette représentation canonique, on obtient
$\mu e(\mathcal{C})^e = \mathcal{C}$.
2) Pour la même représentation, $(\mu e(\mathcal{C}) \xrightarrow{\gamma^e} \mu e(\mu e(\mathcal{C})^e)) = Id$.

Preuve du lemme:1) On remarque que $Tri(A,X,Y) = \{(A,f)/A \in |\underline{V}|,\ f \in \underline{V}(A, \mathcal{C}(X,Y))\}$ et, pour toute flèche $a : A' \to A$ dans $\underline{V}$, on a $Tri(a,X,Y) : (A,f) \mapsto (A', f.a)$. On vérifie alors, très facilement, que $(\mathcal{C}(X,Y), ev_{XY})$ est une représentation de $Tri(-,X,Y)$ et on déduit, au passage, que $\mu e(\mathcal{C})$ est de saveur E. Enfin l'identité $\mu e(\mathcal{C})^e = \mathcal{C}$ s'obtient encore assez simplement.
2) - Sur les objets on a déjà $|\gamma^e| = Id$ (c'est toujours le cas).
- sur une flèche $(A,f) : X \to Y$, comme $f : (A,f) \to (\mathcal{C}(X,Y), Id) = ev_{XY}$ est une flèche de $\mu e(\mathcal{C})(X,Y)$ dont l'image par U est $f : A \to \mathcal{C}(X,Y)$, alors $f^*(ev_{XY}) = (A,f)$ et donc $\gamma^e(A,f) = (A,f)$.
- sur une 2-cellule $a : (A,f) \to (A',f')$, $\gamma^e(a) = U_{XY}(a) = a$.

Preuve de la proposition: Soient $\mathcal{C}, \mathcal{C}' \in |\mathbb{V}\text{-}Cat|$ et $F : \mu e(\mathcal{C}) \to \mu e(\mathcal{C}')$ une flèche de $Cat\mu(\mathbb{V})$. Comme $\mu e(\mathcal{C})$ et $\mu e(\mathcal{C}')$ sont de saveur E (voir Lemme 4.2) il existe un foncteur enrichi $f : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ tel que $\mu e(f) = F$ (résulte de la proposition 3.5) car $\gamma^e = \gamma'^e = Id$ (Lemme 4.2). En fait f est unique. En effet, si $f' : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ est tel que $\mu e(f') = \mu e(f)$, on a :
$(\mathcal{C}(X,Y), f_{XY}) = \mu e(f)(\mathcal{C}(X,Y), Id) = \mu e(f')(\mathcal{C}(X,Y), Id) = (\mathcal{C}(X,Y), f'_{XY})$ et donc $f_{XY} = f'_{XY}$, ceci pour tout $X, Y \in |\mathcal{C}|$.
Comme on a aussi $|f| = |\mu e(f)| = |\mu e(f')| = |f'|$, on obtient $f = f'$.

Si maintenant on se donne des foncteurs enrichis $f, f' : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ et une transformation naturelle mutante $t : \mu e(f) \to \mu e(f')$, toujours par la proposition 3.5, il existe une transformation naturelle enrichie t^e telle que $\mu e(t^e) = t$ (car $\mu e(f)^e = f$, voir l'unicité précédente). t^e est unique car si $t, t' : f \to f'$ sont deux transformations naturelles enrichies telles que $\mu e(t) = \mu e(t')$, alors pour $X \in |\mathcal{C}|,\ (I, t_X) = (I, t'_X)$ implique $t_X = t'_X$. Finalement $t = t'$.

Proposition 4.3. : $\mu t : \mathbb{V}\text{-}Pretens \to Cat\mu(\mathbb{V})$ est 2-pleinement fidèle.

Preuve : La encore, avant de le montrer, commençons par prouver le lemme suivant :

Lemme 4.4. : Soit $\mathbb{E} = (\underline{E}, \wedge, ...) \in |\mathbb{V}\text{-}Pretens|$, alors,
1) $\mu t(\mathbb{E})$ est de saveur T. On considére pour chaque $(A, X) \in |\underline{V}| \times |\underline{E}|$, le choix de co-représentation $(A \wedge X,\ X \xrightarrow[A]{val_{A,X}} A \wedge X\ )$ de $Tri(A, X, -) : \underline{\mu t(\mathbb{E})} \to \underline{Ens}$, où $val_{A,X} = (A, Id_{A \wedge X})$ (on l'appelle *la co-représentation canonique*). Alors, pour cette co-représentation canonique, on a l'isomorphisme $(J, Id) : \mathbb{E} \to \mu t(\mathbb{E})^t$, où $J : \underline{E} \to \underline{\mu t(\mathbb{E})}$ est l'isomorphisme fonctoriel donné par $|J| = Id$ et
$J(X \xrightarrow{f} Y) = (\ I \wedge X \xrightarrow{s_X} X \xrightarrow{f} Y\ )$. Ce (J, Id) est naturel en $\mathbb{E}$.
2) Toujours pour la co-représentation canonique on a l'identité suivante :

$$(\mu t(\mathbb{E}) \xrightarrow{\gamma^t} \mu t(\mu t(\mathbb{E})^t)) = \mu t(\mathbb{E} \xrightarrow{(J,Id)} \mu t(\mathbb{E})^t).$$

Preuve du lemme:1) Ici $Tri(A, X, Y) =$
$\{(A, \alpha)/A \in |\underline{V}|, \alpha \in \underline{E}(A \wedge X, Y)\}$ et pour toute flèche $(I, f) : Y \to Y'$ de $\underline{\mu t(\mathbb{E})},\ Tri(A, X, (I, f))(A, \alpha) = (A, \underline{f}.\alpha)$ où
$\underline{f} = (\ Y \xrightarrow{s^{-1}} I \wedge Y \xrightarrow{f} Y'\ )$. On vérifie facilement que $(A \wedge X, val_{A,X})$ est une co-représentation de $Tri(A, X, -)$ et on en déduit que $\mu t(\mathbb{E})$ est de saveur T. Enfin $\mu t(\mathbb{E})^t = (\underline{\mu t(\mathbb{E})}, \wedge^t, s^t, am^t)$ où $|\underline{\mu t(\mathbb{E})}| = |\underline{E}|$ et $\underline{\mu t(\mathbb{E})}(X, Y) = \{(I, f)/f \in \mathbb{E}(I \wedge X, Y)\}$. Le composé de
$X \xrightarrow{(I,f)} Y \xrightarrow{(I,g)} Z$ est $X \xrightarrow{(I,\underline{g}.f)} Z$. Sur un couple d'objets (A, X) de $|\underline{V}| \times |\underline{\mu t(\mathbb{E})}|,\ A \wedge^t X = A \wedge X$, sur un couple de flèches $(a, x) : (A, X) \to (A', X')$ de $\underline{V} \times \underline{\mu t(\mathbb{E})},\ a \wedge^t x = J(a \wedge J^{-1}(x))$, $s^t_X = J(s_X)$ et $am^t_{A,B,X} = J(am_{A,B,X})$. Enfin la naturalité de (J, Id) se

montre sans difficulté.
2) - Sur les objets on a $|\mu t(J, Id)| = |J| = Id = |\gamma^t|$.
- Sur une flèche $(A, \alpha) : X \to Y,\ \mu t(J, Id)(A, \alpha) = (A, J(\alpha)) = \gamma^t(A, \alpha)$.

Preuve de la proposition: Soient $\mathbb{E}, \mathbb{E}' \in |\mathbb{V}\text{-}Pretens|$ et $\Phi : \mu t(\mathbb{E}) \to \mu t(\mathbb{E}')$ une flèche de $Cat\mu(\mathbb{V})$. On sait que $\mu t(\mathbb{E})$ et $\mu t(\mathbb{E}')$ sont de saveur T (voir Lemme 4.4). Considérons alors, pour chaque $(A, X) \in |\underline{V}| \times |\underline{\mu t(\mathbb{E})}|$, les co-représentations de $Tri(A, X, -)$ données dans le lemme 4.4. On sait qu'il existe un morphisme canonique $\Phi^t : \mu t(\mathbb{E})^t \to \mu t(\mathbb{E}')^t$ qui fait commuter le carré suivant dans $Cat\mu(\mathbb{V})$ (où $\gamma^t = \mu t(J, Id)$ et $\gamma'^t = \mu t(J', Id)$. Voir le Lemme 4.4 et la proposition 3.6):

$$\begin{tikzcd}
\mu t(\mathbb{E}) \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "\gamma^t"'] & \mu t(\mathbb{E}') \arrow[d, "\gamma'^t"] \\
\mu t(\mu t(\mathbb{E})^t) \arrow[r, "\mu t(\Phi^t)"'] & \mu t(\mu t(\mathbb{E}')^t)
\end{tikzcd}$$

On en déduit que $\Phi = \mu t(\tilde{\Phi})$ où

$$\tilde{\Phi} = (\ \mathbb{E} \xrightarrow{(J,Id)} \mu t(\mathbb{E})^t \xrightarrow{\Phi^t} \mu t(\mathbb{E}')^t \xrightarrow{(J^{-1},Id)} \mathbb{E}'\ )$$

Montrons que $\tilde{\Phi}$ est unique. Soient $(F, \Phi), (F', \phi') : \mathbb{E} \to \mathbb{E}'$ des flèches de $\mathbb{V}\text{-}Pretens$. On suppose $\mu t(F, \phi) = \mu t(F', \phi')$. Alors, comme le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{E} \arrow[r, "(J,Id)"] \arrow[d, "(F,\phi)"'] & \mu t(\mathbb{E})^t \arrow[r, "Id"] \arrow[d, "\mu t(F,\phi)^t"'] & \mu t(\mathbb{E})^t \arrow[r, "(J,Id)^{-1}"] \arrow[d, "\mu t(F',\phi')^t"'] & \mathbb{E} \arrow[d, "(F',\phi')"] \\
\mathbb{E}' \arrow[r, "(J',Id)"'] & \mu t(\mathbb{E}')^t \arrow[r, "Id"'] & \mu t(\mathbb{E}')^t \arrow[r, "(J',Id)^{-1}"'] & \mathbb{E}'
\end{tikzcd}$$

on en déduit que $(F, \Phi) = (F', \phi')$.
- Soit maintenant $(F, \Phi), (F', \phi') : \mathbb{E} \to \mathbb{E}'$ deux flèches de $\mathbb{V}\text{-}Pretens$ et $\theta : \mu t(F, \phi) \to \mu t(F', \phi')$ une 2-cellule de $\mathbb{V}\text{-}Pretens$. Comme $\mu t(\mathbb{E})$ et $\mu t(\mathbb{E}')$ sont de saveur T, il existe une 2-cellule $\theta^t : \mu t(F, \phi)^t \to \mu t(F', \phi')^t$ telle que

$$(\ \mu t(\mu t(F, \phi)^t).\gamma^t \xrightarrow{\mu t(\theta^t).Id_{\gamma^t}} \mu t(\mu t(F', \phi')^t).\gamma^t\ ) = (\ \gamma'^t.\mu t(F, \phi) \xrightarrow{Id_{\gamma'^t}.\theta} \gamma'^t.\mu t(F', \phi')\ )$$

(voir la proposition 3.6). Or $\gamma^t = \mu t(J, Id),\ \gamma'^t = \mu t(J', Id)$. On en déduit que $\theta = \mu t(\tilde{\theta})$ où

$$\tilde{\theta} = (\ (J^{-1}, Id).\mu t(F,\phi)^t.(J, Id) \xrightarrow{Id.\theta^t.Id} J^{-1}, Id).\mu t(F',\phi')^t.(J, Id)\ )$$

Montrons que $\tilde{\theta}$ est unique. Soient $(F_0,\phi_0),(F_1,\phi_1) \in |\mathbb{V}\text{-}Pretens(\mathbb{E},\mathbb{E}')|$ et $\theta,\theta' : (F_0,\phi_0) \to (F_1,\phi_1)$ deux flèches parallèles de $\mathbb{V}\text{-}Pretens(\mathbb{E},\mathbb{E}')$ telles que $\mu t(\theta) = \mu t(\theta')$. Alors, pour tout $X \in |\mathbb{E}|$, on a
$(I, J(\theta_X)) = \mu t(\theta)_X = \mu t(\theta')_X = (I, J(\theta'_X))$ et donc
$J(\theta_X) = J(\theta'_X) \Rightarrow\ \theta_X = \theta'_X$ et enfin $\theta = \theta'$.

Proposition 4.5. : $\mu c : \mathbb{V}\text{-}Precot \to Cat\mu(\mathbb{V})$ est 2-pleinement fidèle.

Preuve : Comme $\mu c = et^{opv}.\mu t^{opv}.Red$ (voir la construction de μc) où $et : Cat\mu(\mathbb{V}^*) \to Cat\mu(\mathbb{V})^{opv}$ (ainsi que et^{opv}) et $Red : \mathbb{V}\text{-}Precot \to (\mathbb{V}\text{-}Pretens)^{opv}$ sont des isomorphismes et μt est 2-pleinement fidèle de même que μt^{opv}, on en déduit que μc est lui aussi 2-pleinement fidèle.

• Après ces trois plongements $\mu e,\ \mu t$ et μc intéressons-nous maintenant aux différents foncteurs μp suivants.
Soient $\mathcal{C} \in |\mathbb{V}\text{-}Cat|$ et $\mathbb{E} \in |\mathbb{V}\text{-}Pretens|$. On construit canoniquement un foncteur $\mu p_{\mathcal{C}\mathbb{E}}$: $\mathbb{V}\text{-}Pass(\mathcal{C},\mathbb{E}) \to Cat\mu(\mu e(\mathcal{C}), \mu t(\mathbb{E}))$,
- sur une passerelle $P = (|P|, \pi) \in |\mathbb{V}\text{-}Pass(\mathcal{C},\mathbb{E})|$, par $\mu p_{\mathcal{C}\mathbb{E}}(P) = \Phi$ où Φ est lui-même obtenu...
.. sur les objets par $|\Phi| = |P|$,
.. sur une flèche $(A, f) : X \to Y$ de $\mu e(\mathcal{C})$, par $\Phi(A, f) = (A, \bar{f})$ où
$\bar{f} : A \wedge \Phi(X) \to \Phi(Y)$ est la flèche composée suivante dans $\mathbb{E}$:

$$A \wedge |P|(X) \xrightarrow{f\wedge Id} \mathcal{C}(X,Y) \wedge |P|(X) \xrightarrow{\pi_{XY}} |P|(Y)$$

.. sur une 2-cellule $a : (A, f) \to (A', f')$ de $\mu e(\mathcal{C})$ par
$\Phi(a) = (a : (A, \bar{f}) \to (A', \bar{f'}))$.
On vérifie que $\Phi : \mu e(\mathcal{C}) \to \mu t(\mathbb{E}))$ est un foncteur mutant. La partie un peu délicate est de montrer que pour le couple de flèches composables suivant dans $\mu e(\mathcal{C})$, $\ X \xrightarrow{(A,f)} Y \xrightarrow{(B,g)} Z$ on a
$\Phi((B, g) \otimes (A, f)) = \Phi(B, g) \otimes \Phi(A, f)$. Cela revient à montrer que
$\overline{g \circ f} = \bar{g} \circ \bar{f}$. Or, si on pose $U = \mathcal{C}(X,Y), V = \mathcal{C}(Y,Z)$, on a les identités suivantes :
$\bar{g} \circ \bar{f} = \pi_{YZ}.(g \wedge Id_{PY}).(Id_B \wedge \pi_{XY}).(Id_B \wedge (f \wedge Id_{PX})).am_{B,A,PX} = \pi_{YZ}.(Id_V \wedge \pi_{XY}).am_{V,U,PX}.(g \otimes f) \wedge Id_{PX} =$
$\pi_{XZ}.(comp_{X,Y,Z} \wedge Id_{PX}).((g \otimes f) \wedge Id_{PX}) = \overline{g \circ f}$
- sur un morphisme de passerelles $t : P \to P'$, on construit $\theta = \mu p_{\mathcal{C}\mathbb{E}}(t)$,
.. sur un objet $X \in |\mu e(\mathcal{C})| = |\mathcal{C}|$, en posant
$\theta_X = ((I, J(t_X)) : |P|X \to |P'|X)$ (θ_X est une flèche de $\underline{\mu t(\mathbb{E})}$). Le fait que $\theta = (\theta_X)_{X\in|\mu e(\mathcal{C})|}$ est une 2-cellule $\mu p_{\mathcal{C}\mathbb{E}}(P) \to \mu p_{\mathcal{C}\mathbb{E}}(P')$ se montre sans difficulté.
Enfin, la fonctorialité de $\mu p_{\mathcal{C}\mathbb{E}}$ est très simple à vérifier.

Proposition 4.6. :Soient $\mathcal{C} \in |\mathbb{V}\text{-}Cat|$ et $\mathbb{E} \in |\mathbb{V}\text{-}Pretens|$. Le foncteur $\mu p_{\mathcal{C}\mathbb{E}}$ est un isomorphisme.

Preuve : Notons déjà $M = \mu p_{\mathcal{C}\mathbb{E}}$ et soit $\Phi \in |Cat\mu(\mu e(\mathcal{C}), \mu t(\mathbb{E}))|$. On sait que $\mu e(\mathcal{C})$ est de saveur E et $\mu t(\mathbb{E})$ de saveur T (voir les lemmes 4.2 et 4.4). Choisissons pour eux leur représentation et co-représentation canoniques. Pour la première écrivons là $(\mathcal{C}(X,Y), ev_{XY})$ (pour chaque $X, Y \in |\mathcal{C}|$) et pour la seconde $(A \wedge X, val_{A,X})$ (pour chaque (A, X) de $|\underline{V}| \times |\underline{E}|$). On a alors vu, à la proposition 3.8, qu'il existe une passerelle $\Phi^p : \mu e(\mathcal{C})^e \to \mu t(\mathbb{E})^t$ telle que le carré suivant commute dans $Cat\mu$:

$$\begin{tikzcd}
\mu e(\mathcal{C}) \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "\gamma^e"'] & \mu t(\mathbb{E}) \arrow[d, "\gamma^t"] \\
\mu e(\mu e(\mathcal{C})^e) \arrow[r, "\mu p(\Phi^p)"'] & \mu t(\mu t(\mathbb{E})^t)
\end{tikzcd}$$

Mais, à cause des choix canoniques, on a $\gamma^e = Id$ (voir le lemme 4.2)
et $\gamma^t = \mu t(J, Id)$ (voir le lemme 4.4). Considérons alors la passerelle composée P suivante : $\mathcal{C} \xrightarrow{\Phi^p} \mu t(\mathbb{E})^t \xrightarrow{J^{-1}} \mathbb{E}$ (ce qui a un sens - voir la partie I section 5). On vérifie immédiatement que $M(P) = \Phi$. Pour l'unicité de l'antécédent, soit $P, P' \in |\mathbb{V}\text{-}Pass(\mathcal{C}, \mathbb{E})|$ tels que $M(P) = M(P')$. Écrivons $P = (|P|, \pi)$ et $P' = (|P'|, \pi')$. Alors clairement $|P| = |P'|$ et pour $X, Y \in |\mathcal{C}|$, $(\mathcal{C}(X,Y), \pi_{XY}) = M(P)(\mathcal{C}(X,Y), Id) =$
$M(P')(\mathcal{C}(X,Y), Id) = (\mathcal{C}(X,Y), \pi'_{XY})$ et donc $\pi_{XY} = \pi'_{XY}$. Alors $\pi = \pi'$ et donc $P = P'$.
- Soit maintenant $\theta : \Phi \to \Phi'$ une flèche de $Cat\mu(\mu e(\mathcal{C}), \mu t(\mathbb{E}))$. Comme $\mu e(\mathcal{C})$ est de saveur E et $\mu t(\mathbb{E})$ de saveur T, il existe un morphisme canonique de passerelle $\theta^p : \Phi^p \to \Phi'^p : \mu e(\mathcal{C})^e \to \mu t(\mathbb{E})^t$ tel que
$Id_{\gamma^t}.\theta = \mu p(\theta^p).Id_{\gamma^e}$ (voir la proposition 3.8). Alors, posons $\tau = Id_{J^{-1}}.\theta^p$. C'est une flèche $J^{-1}.\Phi^p \to J^{-1}.\Phi'^p$ dans $\mathbb{V}\text{-}Pass(\mathcal{C}, \mathbb{E})$ telle que $M(\tau) = \theta$. Pour l'unicité de l'antécédent, si on considère $\tau, \tau' : P \to P'$ deux flèches de $\mathbb{V}\text{-}Pass(\mathcal{C}, \mathbb{E})$ telles que $M(\tau) = M(\tau')$. Alors, pour tout $X \in |\mathcal{C}|$,
$(I, J(\tau_X)) = M(\tau)_X = M(\tau')_X = (I, J(\tau'_X)) \Rightarrow J(\tau_X) = J(\tau'_X) \Rightarrow$
$\tau_X = \tau'_X$ et finalement $\tau = \tau'$.

5. Complément sur les saveurs

Proposition 5.1. :Soit $\mathcal{C} \in |\mathbb{V}\text{-}Cat|$. Alors,
1) $\mathcal{C}$ est à tenseurs ssi $\mu e(\mathcal{C})$ est de saveur T.
2) $\mathcal{C}$ est à co-tenseurs ssi $\mu e(\mathcal{C})$ est de saveur C.

Preuve : 1) Dire que $\mathcal{C}$ est à tenseurs c'est dire que, pour tout $A \in |\underline{V}|$ et $X \in |\underline{\mathcal{C}}|$, il y a un objet libre $(A \wedge X, \eta^X_A : A \to \mathcal{C}(X, A \wedge X))$ associé à A pour $\underline{y}^X$. Cela signifie que pour tout $Y \in |\underline{\mathcal{C}}|$ et toute flèche $f : A \to \mathcal{C}(X,Y)$ il existe une unique flèche $\bar{f} : A \wedge X \to Y$ dans $\underline{\mathcal{C}}$ telle que $\underline{y}^X(\bar{f}).\eta_A^X = f$ (dans $\underline{V}$) ce qui s'exprime encore en disant que le diagramme (D_{et}) suivant commute :

$$\begin{tikzcd}
 & A \arrow[dl, "\eta_A^X"'] \arrow[dr, "f"] & \\
\mathcal{C}(X, A\wedge X) \arrow[d, "u_g^{-1}"'] & & \mathcal{C}(X,Y) \\
I \otimes \mathcal{C}(X, A\wedge X) \arrow[rr, "\bar{f}\otimes Id"'] & & \mathcal{C}(A\wedge X, Y) \otimes \mathcal{C}(X, A\wedge X) \arrow[u, "comp"']
\end{tikzcd}$$

D'un autre coté, dire que $\mu e(\mathcal{C})$ est de saveur T c'est dire que, pour tout $A \in |\underline{V}|$ et $X \in |\underline{\mu e(\mathcal{C})}| = |\mathcal{C}|$, il y a une co-représentation $(A \wedge X, val_{A,X})$ de $Tri(A, X, -)$ où $val_{A,X} \in Tri(A, X, A \wedge X)$. Ce $val_{A,X}$ s'écrit donc (A, η_A^X) où $\eta_A^X : A \to \mathcal{C}(X, A \wedge X)$ est une flèche de $\underline{V}$. Cette co-représentation signifie que pour tout $Y \in |\underline{\mu e(\mathcal{C})}|$ et tout $(A, f) \in Tri(A, X, Y)$ (c.a.d. que $f : A \to \mathcal{C}(X,Y)$ est une flèche de $\underline{V}$) il existe une unique flèche $\tilde{f} = (I, \bar{f}) : A \wedge X \to Y$ dans $\underline{\mu e(\mathcal{C})}$ telle que $\tilde{f} val_{A,X} = (A, f)$ ce qui s'écrit encore en disant que f est le composé (I_{et}) suivant dans $\underline{V}$:

$$A \xrightarrow{u_g^{-1}} I \otimes A \xrightarrow{\bar{f}\otimes\eta_A^X} \mathcal{C}(A\wedge X, Y) \otimes \mathcal{C}(X, A \wedge X) \xrightarrow{comp} \mathcal{C}(X,Y)$$

On constate que la commutation de (D_{et}) et l'identité (I_{et}) se déduisent l'une de l'autre et que l'unicité de $\bar{f}$ pour la commutation de (D_{et}) ou pour l'identité (I_{et}) s'entrainent l'une de l'autre. D'où l'équivalence voulue.

2) Dire que $\mathcal{C}$ est à co- tenseurs c'est dire que, pour tout $A \in |\underline{V}|$ et $Y \in |\mathcal{C}|$ il y a un objet libre $(H(Y,A), \varepsilon_{Y,A})$ associé à A pour $\underline{y}_Y$. Cela signifie que pour tout $X \in |\mathcal{C}|$ et toute flèche $f : A \to \mathcal{C}(X,Y)$ il existe une unique flèche $\bar{f} : X \to H(Y,A)$ dans $\underline{\mathcal{C}}$ telle que $\underline{y}_Y(\bar{f}).\varepsilon_{Y,A} = f$ (dans $\underline{V}$) ce qui s'exprime encore en disant que le diagramme (D_{ec}) suivant commute :

$$\begin{tikzcd}
 & A \arrow[dl, "\varepsilon_{Y,A}"'] \arrow[dr, "f"] & \\
\mathcal{C}(H(Y,A), Y) \arrow[d, "u_d^{-1}"'] & & \mathcal{C}(X,Y) \\
\mathcal{C}(H(Y,A), Y) \otimes I \arrow[rr, "Id\otimes\bar{f}"'] & & \mathcal{C}(H(Y,A), Y) \otimes \mathcal{C}(X, H(Y,A)) \arrow[u, "comp"']
\end{tikzcd}$$

D'un autre coté, dire que $\mu e(\mathcal{C})$ est de saveur C c'est dire que, pour tout $A \in |\underline{V}|$ et $Y \in |\underline{\mu e(\mathcal{C})}| = |\mathcal{C}|$, il y a une représentation $(H(Y,A), cov_{Y,A})$ de $Tri(A, -, Y)$ où $cov_{Y,A} \in$

$Tri(A, H(Y, A), Y)$. Il s'écrit donc $cov_{Y,A} = (A, \varepsilon_{Y,A})$
où $\varepsilon_{Y,A} : A \to \mathcal{C}(H(Y, A), Y)$ est une flèche de $\underline{V}$. Cette représentation signifie que pour tout $X \in |\underline{\mu e(\mathcal{C})}|$ et tout $(A, f) \in Tri(A, X, Y)$ (c.a.d. que $f : A \to \mathcal{C}(X, Y)$ est une flèche de $\underline{V}$), il existe une unique flèche $\tilde{f} = (I, \bar{f}) : X \to H(Y, A)$ dans $\underline{\mu e(\mathcal{C})}$ telle que $cov_{Y,A}\tilde{f} = (A, f)$ ce qui s'écrit encore en disant que f est le composé (I_{ec}) suivant dans $\underline{V}$:

$$I \xrightarrow{u_d^{-1}} A \otimes I \xrightarrow{\varepsilon_{Y,A}\otimes\bar{f}} \mathcal{C}(H(Y, A), Y) \otimes \mathcal{C}(X, H(Y, A)) \xrightarrow{comp} \mathcal{C}(X, Y)$$

On constate que la commutation de (D_{ec}) et l'identité (I_{ec}) se déduisent l'une de l'autre et que l'unicité de $\bar{f}$ pour la commutation de (D_{ec}) ou pour l'identité (I_{ec}) s'entrainent l'une de l'autre. D'où l'équivalence voulue.

Proposition 5.2. :Soit $\mathbb{E} \in |\mathbb{V}\text{-}Pretens|$. Alors :
1) $\mathbb{E}$ est enrichissable (voir partie I, section 2) ssi $\mu t(\mathbb{E})$ est de saveur E.
2) $\mathbb{E}$ est cotensorisable (voir partie I, section 3) ssi $\mu t(\mathbb{E})$ est de saveur C.

Preuve : 1) Dire que $\mathbb{E}$ est enrichissable c'est dire que, pour tout $X, Y \in |\mathbb{E}|$ il y a un objet co-libre $(\mathcal{C}(X, Y), Ev^X_Y)$ associé à Y pour le foncteur $(-) \wedge X : \underline{V} \to \underline{E}$. Cela signifie que pour tout $A \in |\underline{V}|$ et toute flèche $f : A \wedge X \to Y$ il existe une unique flèche $\tilde{f} : A \to \mathcal{C}(X, Y)$ dans $\underline{V}$ telle que $f \underset{J_{te}}{=} Ev^X_Y.(\tilde{f} \wedge Id)$ (dans $\underline{E}$).
D'un autre coté, dire que $\mu t(\mathbb{E})$ est de saveur E c'est dire que, pour tout $X, Y \in |\underline{\mu t(\mathbb{E})}| = |\mathbb{E}|$, il y a une représentation $(\mathcal{C}(X, Y), ev_{XY})$ de $Tri(-, X, Y)$ où
$ev_{XY} \in Tri(\mathcal{C}(X, Y), X, Y)$. Il s'écrit donc $ev_{XY} = (\mathcal{C}(X, Y), Ev^X_Y)$ où
$Ev^X_Y : \mathcal{C}(X, Y) \wedge X \to Y$ est une flèche de $\mathbb{E}$. Cette représentation signifie que pour tout $(A, f) \in Tri(A, X, Y)$ il existe une unique flèche $\tilde{f} : A \to \mathcal{C}(X, Y)$ dans $\underline{V}$ telle que $\tilde{f}^*(ev_{XY}) \underset{I_{te}}{=} (A, f)$. On constate que l'identité (J_{te}) et l'identité (I_{te}) coïncident. D'où l'équivalence voulue.
2) Dire que $\mathbb{E}$ est cotensorisable c'est dire que, pour tout $A \in |\underline{V}|$ et tout $Y \in |\mathbb{E}|$ il y a un objet co-libre $(H(Y, A), cv^A_Y)$ associé à Y pour le foncteur $A \wedge (-) : \underline{E} \to \underline{E}$. Cela signifie que pour tout $X \in |\underline{E}|$ et toute flèche $f : A \wedge X \to Y$ de $\underline{E}$ il existe une unique flèche $\tilde{f} : X \to H(Y, A)$ dans $\underline{E}$ telle que $cv^A_Y.(Id \wedge \tilde{f}) \underset{I_{tc}}{=} f$ (dans $\underline{E}$) .
D'un autre coté, dire que $\mu t(\mathbb{E})$ est de saveur C c'est dire que, pour tout $A \in |\underline{V}|$ et tout $Y \in |\mu t(\mathbb{E})| = |\mathbb{E}|$, il y a une représentation $(H(Y, A), cov^A_Y)$ de $Tri(A, -, Y)$ où $cov^A_Y \in Tri(A, H(Y, A), Y)$. Il s'écrit donc $cov^A_Y = (A, cv^A_Y)$ où $cv^A_Y : A \wedge H(Y, A) \to Y$ est une flèche de $\underline{E}$. Cette représentation signifie que pour toute flèche $f : A \wedge X \to Y$ de $\underline{E}$ il existe une unique flèche $\bar{f} : I \wedge X \to H(Y, A)$ dans $\underline{E}$ telle que $cov^A_Y(I, \bar{f}) = (A, f)$ ce

qui s'écrit encore en disant que le diagramme (D_{tc}) suivant commute :

$$\begin{tikzcd}
& & A \wedge X \arrow[dll, "u_d^{-1}\wedge Id"'] \arrow[drr, "f"] & & \\
(A \otimes I) \wedge X \arrow[dr, "am"'] & & & & Y \\
& A \wedge (I \wedge X) \arrow[rr, "Id\wedge \bar{f}"'] & & A \wedge H(Y, A) \arrow[ur, "cv_Y^A"'] &
\end{tikzcd}$$

Clairement $\bar{f}$ et $\tilde{f}$ se définissent l'un par rapport à l'autre par la relation $\tilde{f}.s_X = \bar{f}$ et, au passage, on constate que la commutation de (D_{tc}) et l'identité (I_{tc}) se déduisent l'une de l'autre. Même chose pour l'unicité de $\bar{f}$ et de $\tilde{f}$. D'où l'équivalence voulue.

Proposition 5.3. :Soit $\mathbb{E} \in |\mathbb{V}\text{-}Precot|$. Alors :
1) $\mathbb{E}$ est enrichissable (voir partie I, section 4) ssi $\mu c(\mathbb{E})$ est de saveur E.
2) $\mathbb{E}$ est tensorisable (voir partie I, section 4) ssi $\mu c(\mathbb{E})$ est de saveur T.

Preuve : 1) Dire que $\mathbb{E}$ est enrichissable c'est dire que, pour tout $X, Y \in |\mathbb{E}|$ il y a un objet libre $(\mathcal{C}(X,Y), ve_Y^X)$ associé à X pour le foncteur $Y^{(-)} : \underline{V}^{op} \to \underline{E}$. Cela signifie que pour tout $A \in |\underline{V}|$ et toute flèche $f : X \to Y^A$ de $\underline{E}$, il existe une unique flèche $\tilde{f} : A \to \mathcal{C}(X,Y)$ dans $\underline{V}$ telle que $Y^{\tilde{f}}.ve_Y^X \underset{J_{ce}}{=} f$ (dans $\underline{E}$).

D'un autre coté, dire que $\mu c(\mathbb{E})$ est de saveur E c'est dire que, pour tout $X, Y \in |\underline{\mu c(\mathbb{E})}| = |\mathbb{E}|$, il y a une représentation $(\mathcal{C}(X,Y), ev_Y^X)$ de $Tri(-, X, Y)$ où $ev_Y^X \in Tri(\mathcal{C}(X,Y), X, Y)$. Il s'écrit donc $ev_Y^X = (\mathcal{C}(X,Y), ve_Y^X)$ où $ve_Y^X : X \to Y^{\mathcal{C}(X,Y)}$ est une flèche de $\mathbb{E}$.

Cette représentation signifie que pour tout $(A, f) \in Tri(A, X, Y)$ il existe une unique flèche $\tilde{f} : A \to \mathcal{C}(X,Y)$ dans $\underline{V}$ telle que $\tilde{f}^*(ev_Y^X) \underset{I_{ce}}{=} (A, f)$. On constate que l'identité (J_{ce}) et l'identité (I_{ce}) coïncident. D'où l'équivalence voulue.

2) Dire que $\mathbb{E}$ est tensorisable c'est dire que, pour tout $A \in |\underline{V}|$ et tout $X \in |\mathbb{E}|$ il y a un objet libre $(A \wedge X, Vl_X^A)$ associé à X pour le foncteur $(-)^A : \underline{E} \to \underline{E}$. Cela signifie que pour tout $Y \in |\underline{E}|$ et toute flèche $f : X \to Y^A$ de $\underline{E}$ il existe une unique flèche $\underline{f} : A \wedge X \to Y$ dans $\underline{E}$ telle que $\underline{f}^A.Vl_X^A \underset{I_{ct}}{=} f$ (dans $\underline{E}$) .

D'un autre coté, dire que $\mu c(\mathbb{E})$ est de saveur T c'est dire que, pour tout $A \in |\underline{V}|$ et tout $X \in |\mathbb{E}|$, il y a une co-représentation $(A \wedge X, val_X^A)$ de $Tri(A, X, -) : \underline{\mu c(\mathbb{E})} \to \underline{Ens}$ où $val_X^A \in Tri(A, X, A \wedge X)$. Il s'écrit donc $val_X^A = (A, Vl_X^A)$ où $Vl_X^A : X \to (A \wedge X)^A$ est une flèche de $\underline{E}$. Cette co-représentation signifie que pour toute flèche $f : X \to Y^A$ de $\underline{E}$ il existe une unique flèche $(I, \bar{f}) : A \wedge X \to Y$ dans $\underline{\mu c(\mathbb{E})}$ telle que $(I, \bar{f})val_X^A = (A, f)$

ce qui s'écrit encore en disant que le diagramme (D_{ct}) suivant commute :

$$\begin{tikzcd}
 & & X \arrow[dll, "Vl_X^A"'] \arrow[drr, "f"] & & \\
(A \wedge X)^A \arrow[dr, "\bar{f}^A"'] & & & & Y^A \\
 & (Y^I)^A \arrow[rr, "\alpha m"'] & & Y^{I\otimes A} \arrow[ur, "Y^{u_g^{-1}}"'] &
\end{tikzcd}$$

Clairement $\bar{f}$ et $\underline{f}$ se définissent l'un par rapport à l'autre par la relation $\bar{f} = \sigma_Y.\underline{f}$ et, au passage, on constate que la commutation de (D_{ct}) et l'identité (I_{ct}) se déduisent l'une de l'autre. Même chose pour l'unicité de $\bar{f}$ et de $\underline{f}$. D'où l'équivalence voulue.

• Intéressons nous maintenant aux exemples de catégories mutantes que sont les catégories fibrées (voir l'exemple 4 de 1.3).
Soit $\underline{B}$ une catégorie à produits fibrés et $\mathbb{E} = (\underline{E}, U)$ une catégorie fibrée sur $\underline{B}$. Commençons par considérer la catégorie mutante $\mathcal{B}_B$ associée à $\mathbb{E}$ en B (voir l'exemple 4 de 1.3).

Proposition 5.4. $\mathbb{E}$ est localement petite ssi pour tout $B \in |\underline{B}|$, $\mathcal{B}_B$ est de saveur E.

Preuve : Rappelons qu'on dit que $\mathbb{E}$ est localement petite si pour tout $B \in |\underline{B}|$ et tout $X, X' \in |\mathbb{E}_B|$, le préfaiceau $Q_{XX'}$ sur $\underline{B}/B$ est représentable, où $Q_{XX'} : (\underline{B}/B)^{op} \to \underline{Ens}$ est défini,
- sur un objet $(A, a) \in |(\underline{B}/B)^{op}|$, par $Q_{XX'}(A, a) = \mathbb{E}_A(a^*X, a^*X')$,
- sur une flèche $\alpha : (A', a') \to (A, a)$,
$Q_{XX'}(\alpha) : \mathbb{E}_A(a^*X, a^*X') \to \mathbb{E}_{A'}(a'^*X, a'^*X')$ est défini par
$Q_{XX'}(\alpha)(x) = (\ a'^*X \xrightarrow{can} \alpha^*a^*X \xrightarrow{\alpha^*x} \alpha^*a^*X' \xrightarrow{can^{-1}} a'^*X'\ )$.
L'équivalence proposée va alors résulter immédiatement du lemme suivant :

Lemme 5.5. : $B \in |\underline{B}|$ étant fixé, alors pour tout $X, X' \in |\mathbb{E}_B|$, $Q_{XX'} \simeq Tri(-, X, X')$.

Preuve du lemme: L'isomorphisme $\gamma : Q_{XX'} \to Tri(-, X, X')$ se construit en posant, pour chaque $(A, a) \in |\underline{B}/B|$, $\gamma_{(A,a)}(x) = (A, a, x)$.

Références

[1] J. BENABOU, *Les catégories multiplicatives*, Rap. Sém. Math. Pure, Louvain, no 27 (1972).

[2] R. GUITART, *Tenseurs et Machines*, Cahiers de Topologie et Géométrie Différentielle Catégorique (1980),volume XXI-1, p.5-62.

[3] G.M. KELLY, *Basic Concepts of Enriched Category Theory.* vol.64, Cambridge University Press. Lecture Note. (1982).

[4] J. PENON, *Compatibilité entre deux conceptions d'algèbre sur une opérade*, Cahiers de Topologie et Géométrie Différentielle Catégorique (2018),volume LX-3, p.298-310.

[5] X. ROCHARD, *Théorie tannakienne non additive*, Thèse (1998).

[6] R.J. WOOD, *Indicial methods for relative categories*, Thesis Dalhousie Univ. at Halifax (1978).

Jacques PENON
25, rue Chapsal,
94340, Joinville-le-Pont
France
Email : `tryphon.penon@gmail.com`