CAHIERS DE TOPOLOGIE ET GEOMETRIE DIFFERENTIELLE CATEGORIQUES VOLUME LXVI-4 (2025)

MODULE COTANGENT RELATIF

Michel VAQUIÉ

Résumé. Pour tout objet x dans une catégorie $\mathbf{C}$ il est possible de définir la catégorie des *modules de Beck* au dessus de x, comme la catégorie $(\mathbf{C}_{/x})_{ab}$ des objets en groupe abélien de la catégorie $\mathbf{C}_{/x}$. Nous pouvons en déduire, au moins pour toute catégorie localement présentable, la notion de module *cotangent* Ω_x de x dans $(\mathbf{C}_{/x})_{ab}$.

Dans le cas de la catégorie $\mathbf{Alg}_k$ des k-algèbres commutatives au-dessus d'un anneau k, la catégorie des modules de Beck $(\mathbf{Alg}_{k/A})_{ab}$ au-dessus d'une k-algèbre A est équivalente à la catégorie $\mathbf{Mod}_A$ des A-modules et le module cotangent est égal au module des *différentielles de Kähler* de A.

Le but de cet article est de montrer pour toute catégorie localement présen -table des résultats qui généralisent les propriétés classiques des modules des différentielles de Kähler.

Abstract. For any object x in a category $\mathbf{C}$ it is possible to define the category of *Beck modules* over x as the category $(\mathbf{C}_{/x})_{ab}$ of abelian group objects in the category $\mathbf{C}_{/x}$. We can deduce from this construction, at least for any locally presentable category, the notion of *cotangent* module Ω_x of x in $(\mathbf{C}_{/x})_{ab}$.

In the case of the category $\mathbf{Alg}_k$ of commutative k-algebras over a ring k, the category of Beck modules $(\mathbf{Alg}_{k/A})_{ab}$ over a k-algebra A is equivalent to the category $\mathbf{Mod}_A$ of A-modules and the cotangent module is equal to the module of *Kähler differentials* of A.

The aim of this article is to prove for any locally presentable category some results which generalize the classical properties of modules of Kähler differentials.

Keywords. Module de Beck, module cotangent.
Mathematics Subject Classification (2010). 13A18 (12J10 14E15).

1. Introduction

Soit X une variété différentiable, analytique ou algébrique, pour tout point x de X nous pouvons définir un espace tangent T_xX et pour tout morphisme $g : X \longrightarrow Y$ nous pouvons définir une application différentielle $dg_x : T_xX \longrightarrow T_{g(x)}Y$ qui est une application linéaire qui approxime g au voisinage de $x \in X$. Nous pouvons ainsi considérer les notions d'espace tangent et de différentielle comme une manière de linéariser une catégorie. Pour pouvoir généraliser cette construction nous allons d'abord rappeler la construction de l'espace tangent et de l'application différentielle dans le cadre algébrique.

Soient k un anneau commutatif et A une k-algèbre, alors il existe un A-module $\Omega_{A/k}$, le *module des différentielles de Kähler* ou *module cotangent*, qui représente le foncteur

$$\begin{array}{rccc} Der_k(A,-): & \mathbf{Mod}_A & \longrightarrow & \mathbf{Ens} \\ & M & \mapsto & Der_k(A,M), \end{array}$$

où pour tout A-module M nous notons $Der_k(A,M)$ l'ensemble des *k-dérivations* de A à valeurs dans M.

Alors si X est une variété algébrique sur k, nous pouvons définir le faisceau $\Omega_{X/k}$ des différentielles de Kähler de X comme le faisceau quasi-cohérent sur X défini par le A-module $\Omega_{A/k}$ sur tout ouvert affine $Spec(A)$ de X, et le fibré tangent $TX \longrightarrow X$ est égal par définition au fibré $\mathbb{V}(\Omega_{X/k}) := \mathrm{Spec}(\mathrm{Sym}(\Omega_{X/k}))$.

Pour tout morphisme $f : A \rightarrow B$ dans la catégorie $\mathbf{Alg}_k$ des k-algèbres commutatives il existe une application de B-modules

$$\delta_f : \Omega_A \otimes_A B \longrightarrow \Omega_B \ ,$$

nous en déduisons que pour tout morphisme $g : X \longrightarrow Y$ nous avons un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} TX \arrow[r, "dg"] \arrow[d] & TY \arrow[d] \\ X \arrow[r, "g"] & Y \end{tikzcd}$$

où le morphisme $TX \longrightarrow TY \times_Y X$ correspond à l'application $g^*(Sym(\Omega_Y)) \longrightarrow Sym(\Omega_X)$ induite par l'application naturelle $\delta_g : g^*(\Omega_Y) \longrightarrow \Omega_X$.

Le module cotangent, ou plus généralement le complexe cotangent qui est la version *dérivée* du module cotangent dans le cas d'une variété singulière, permet d'étudier les déformations de la variété, et plus précisément d'étudier les déformations infinitésimales. Pour cela il est utile de considérer les *extensions de carré nul* d'un anneau A. Nous rappelons que pour tout A-module M nous pouvons munir le A-module $A \oplus M$ d'une structure de k-algèbre commutative en posant $(a, m).(a', m') = (aa', am' + a'm)$.

Nous considérons la k-algèbre $B = A \oplus M$ comme un objet de la catégorie $\mathbf{Alg}_{k/A}$, c'est-à-dire comme une k-algèbre munie d'un morphisme $u_B : B \longrightarrow A$, et dont les morphismes sont les triangles commutatifs

$$\begin{tikzcd} B \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "u_B"'] & & C \arrow[dl, "u_C"] \\ & A & \end{tikzcd}$$

Nous remarquons alors que $B = A \oplus M$ n'est pas un objet arbitraire de la catégorie $\mathbf{Alg}_{k/A}$, mais est muni d'une structure *d'objet en groupe abélien*, et que le foncteur qui envoie M sur $A \oplus M$ définit une équivalence de catégories entre la catégorie $\mathbf{Mod}_A$ des A-modules et la catégorie $(\mathbf{Alg}_{k/A})_{ab}$ des objets en groupe abélien dans $\mathbf{Alg}_{k/A}$.

Le foncteur oubli de la structure d'objet en groupe abélien

$$U_A : (\mathbf{Alg}_{k/A})_{ab} \longrightarrow \mathbf{Alg}_{k/A}$$

admet un foncteur adjoint à gauche

$$L_A : \mathbf{Alg}_{k/A} \longrightarrow (\mathbf{Alg}_{k/A})_{ab}$$

et nous avons l'égalité $\Omega_{A/k} = L_A(\star_{\mathbf{Alg}_{k/A}})$, où $\star_{\mathbf{Alg}_{k/A}}$ est l'objet final $id_A : A \longrightarrow A$ de la catégorie $\mathbf{Alg}_{k/A}$.

Il est possible de généraliser cette construction, nous pouvons définir les objets en groupe abélien dans toute catégorie $\mathbf{C}$ comme les objets a de $\mathbf{C}$

tel que le préfaisceau représentable associé par le morphisme de Yoneda $h_a : \mathbf{C}^{op} \longrightarrow \mathbf{Ens}$ est un préfaisceau en groupes abéliens. Alors pour tout objet x de $\mathbf{C}$ nous définissons la catégorie des *modules de Beck* au-dessus de x comme la catégorie $(\mathbf{C}_{/x})_{ab}$ des objets en groupe abélien dans la catégorie $\mathbf{C}_{/x}$. De plus la catégorie $(\mathbf{C}_{/x})_{ab}$ est une catégorie additive, qui est abélienne si la catégorie $\mathbf{C}$ est une catégorie exacte.

Alors si le foncteur *oubli* $U_x : (\mathbf{C}_{/x})_{ab} \longrightarrow \mathbf{C}_{/x}$ admet un adjoint à gauche $L_x : \mathbf{C}_{/x} \longrightarrow (\mathbf{C}_{/x})_{ab}$, nous appelons *module cotangent* de x l'image par L_x de l'objet final $\star_{\mathbf{C}_{/x}} = id_x : x \longrightarrow x$ de $\mathbf{C}_{/x}$, et nous notons

$$\Omega_x = L_x(\star_{\mathbf{C}_{/x}}) .$$

Nous renvoyons aux articles de J.M. Beck [Be] et de D.G. Quillen [Qu] pour le lien entre la catégorie des objets en groupe abélien et la catégorie des modules et à l'article de M. Barr [Ba 1] pour les propriétés de la catégorie des modules de Beck.

Comme dans le cas des k-algèbres commutatives, nous voulons alors définir pour tout morphisme $f : x \longrightarrow y$ dans $\mathbf{C}$ une application entre les modules cotangents Ω_x et Ω_y. Pour f dans $\mathbf{C}$ il existe un foncteur additif $f^*_{ab} : (\mathbf{C}_{/y})_{ab} \longrightarrow (\mathbf{C}_{/x})_{ab}$ entre les catégories des modules de Beck au dessus respectivement de y et de x et nous construisons une application naturelle $[\delta_f] : \Omega_x \longrightarrow f^*_{ab}(\Omega_y)$ dans $(\mathbf{C}_{/x})_{ab}$. Alors si le foncteur f^*_{ab} admet un adjoint à gauche $f^{ab}_! : (\mathbf{C}_{/x})_{ab} \longrightarrow (\mathbf{C}_{/y})_{ab}$ nous en déduisons une application $[\tilde{\delta_f}] : f^{ab}_!(\Omega_x) \longrightarrow \Omega_y$ dans $(\mathbf{C}_{/y})_{ab}$ qui correspond à l'application $\delta_f : \Omega_A \otimes_A B \longrightarrow \Omega_B$ dans le cas de la catégorie $\mathbf{Alg}_k$ des k-algèbres commutatives.

Dans le cadre de la catégorie des k-algèbres l'application δ_f donne des informations sur le morphisme $f : A \longrightarrow B$. En particulier nous avons deux suites exactes fondamentales entre les modules des différentielles de Kähler, et un des objectif de cet article est de généraliser ces suites exactes au cadre d'une catégorie $\mathbf{C}$ localement présentable quelconque.

Pour énoncer ces résultats nous devons d'abord définir pour tout morphisme $f : x \longrightarrow y$ dans la catégorie $\mathbf{C}$ l'analogue du B-module des différentielles relatives $\Omega_{B/A}$ défini pour tout morphisme $f : A \longrightarrow B$ de k-algèbres. Pour cela nous construisons le module Ω_f comme objet dans la catégorie des modules de Beck au dessus de f considéré comme objet de la catégorie $\mathbf{C}_{x/}$ (cf. définition 3.14).

Alors le théorème 3.21 généralise la *première suite exacte fondamentale*, ou *suite exacte de Jacobi-Zariski*, définie entre les modules des différentielles dans le cadre de $\mathbf{Alg}_k$, le théorème 3.22 est inspiré par la *deuxième suite exacte fondamentale* et la compatibilité du module des différentielles avec la localisation, enfin le théorème 3.23 est la généralisation du fait que les modules de différentielles commutent avec *l'extension des scalaires*.

Dans la dernière partie nous étudions comment ces résultats s'énoncent dans les cas des catégories des ensembles, des monoïdes commutatifs et nous revenons sur l'exemple de la catégorie des k-algèbres commutatives.

Je remercie le rapporteur pour ses remarques et ses suggestions qui m'ont permis d'apporter des précisions au texte et j'espère de le rendre plus lisible.

2. Rappels sur les foncteurs adjoints

Soient $\mathbf{C}$ et $\mathbf{D}$ deux catégories, si nous avons une paire de foncteurs adjoints

$$F : \mathbf{C} \underset{\longleftarrow}{\overset{\longrightarrow}{\perp}} \mathbf{D} : G$$

nous notons respectivement $\eta_x : x \longrightarrow GFx$ et $\epsilon_y : FGy \longrightarrow y$ l'unité et la counité de l'adjonction. Nous rappelons que les morphismes composés $\epsilon_{Fx} \circ F\eta_x : Fx \longrightarrow Fx$ et $G\epsilon_y \circ \eta_{Gy} : Gy \longrightarrow Gy$ sont les morphismes identités.

Les bijections naturelles entre $Hom_{\mathbf{C}}(x, Gy)$ et $Hom_{\mathbf{D}}(Fx, y)$ sont définies par :

$$\begin{array}{rcl} Hom_{\mathbf{C}}(x, Gy) & \rightleftarrows & Hom_{\mathbf{D}}(Fx, y) \\ \alpha & \longmapsto & \epsilon_y \circ F\alpha \\ G\beta \circ \eta_x & \longleftarrow\!\shortmid & \beta \end{array}$$

Soit $\mathbf{C}$ une catégorie, pour tout objet x de $\mathbf{C}$ nous notons respectivement $\mathbf{C}_{/x}$ et $\mathbf{C}_{x/}$ les catégories des objets au-dessus de x, c'est-à-dire la catégorie formée des flèches $u : z \longrightarrow x$, et la catégorie des objets au-dessous de x, c'est-à-dire la catégorie formée des flèches $v : x \longrightarrow z$. Pour tout couple d'objets (x, y) de $\mathbf{C}$ nous définissons aussi la catégorie $\mathbf{C}_{x/./y}$ comme la catégorie formée des diagrammes $x \xrightarrow{v} z \xrightarrow{u} y$.

Alors la catégorie $\mathbf{Pt}_{\mathbf{C}}(x)$ des points au dessus de x est la sous-catégorie pleine de $\mathbf{C}_{x/./x}$ formée des diagrammes $x \xrightarrow{v} z \xrightarrow{u} x$, vérifiant $u \circ v = id_x$ (cf. [Bo-Bo], Chapitre 2).

Soit $f : x \longrightarrow y$ un morphisme dans $\mathbf{C}$, alors si la catégorie $\mathbf{C}$ admet des limites finies nous avons une paire de foncteurs adjoints

$$f_! : \mathbf{C}_{/x} \rightleftarrows \mathbf{C}_{/y} : f^*$$

définie par

$$f_! : (z \xrightarrow{u} x) \longmapsto (z \xrightarrow{f \circ u} y)$$
$$f^* : (t \xrightarrow{v} y) \longmapsto (x \times_y t \xrightarrow{p_1} x)$$

De même si la catégorie $\mathbf{C}$ admet des colimites finies nous avons une paire de foncteurs adjoints

$$f_* : \mathbf{C}_{x/} \rightleftarrows \mathbf{C}_{y/} : f^!$$

définie par

$$f_* : (x \xrightarrow{v} t) \longmapsto (y \xrightarrow{q_1} y \coprod\nolimits_x t)$$
$$f^! : (y \xrightarrow{u} z) \longmapsto (x \xrightarrow{u \circ f} z)$$

En particulier dans les cas où y est l'objet final ou dans le cas où x est l'objet initial nous trouvons les paires de foncteurs adjoints suivantes :

$$[x]_! : \mathbf{C}_{/x} \rightleftarrows \mathbf{C} : [x]^* \qquad \text{et} \qquad [y]_* : \mathbf{C} \rightleftarrows \mathbf{C}_{y/} : [y]^!$$

Soit $F : \mathbf{C} \rightleftarrows \mathbf{D} : G$ une paire de foncteurs adjoints, alors pour tout y dans $\mathbf{D}$ nous avons une nouvelle paire de foncteurs adjoints

$$F_{G(y)} : \mathbf{C}_{/G(y)} \rightleftarrows \mathbf{D}_{/y} : G_y$$

définie par

$$F_{G(y)} : (x \xrightarrow{v} G(y)) \longmapsto (F(x) \xrightarrow{\epsilon_y \circ F(v)} y)$$
$$G_y : (z \xrightarrow{u} y) \longmapsto (G(z) \xrightarrow{G(u)} G(y)) \ .$$

De même pour tout x dans $\mathbf{C}$ nous avons une paire de foncteurs adjoints

$$F_x : \mathbf{C}_{x/} \rightleftarrows \mathbf{D}_{F(x)/} : G_{F(x)}$$

définie par

$$F_x : (x \xrightarrow{v} z) \longmapsto (F(x) \xrightarrow{F(v)} F(z))$$
$$G_{F(x)} : (F(x) \xrightarrow{u} y) \longmapsto (x \xrightarrow{G(u)\circ\eta_x} G(y)) \ .$$

Remarque 2.1. Considérons un morphisme $g : z \longrightarrow y$ dans une catégorie $\mathbf{C}$ admettant des colimites finies et la paire de foncteurs adjoints

$$F = [z]_* : \mathbf{C} \rightleftarrows \mathbf{E} = \mathbf{C}_{z/} : [z]^! = G \ .$$

L'image de $(z \xrightarrow{g} y)$ par le foncteur G est y et nous en déduisons la nouvelle paire de foncteurs adjoints $F_y : \mathbf{C}_{/y} \rightleftarrows \mathbf{E}_{/g} : G_g$ définie de la manière suivante :

$$F_y : \quad (b \xrightarrow{l} y) \quad \longmapsto \quad \begin{array}{ccc} z & = & z \\ \downarrow{\scriptstyle q_1} & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ z \coprod b & \xrightarrow[(g,l)]{} & y \end{array} \qquad \text{et}$$

$$G_g : \quad \begin{array}{ccc} z & = & z \\ \downarrow{\scriptstyle u} & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ a & \xrightarrow{h} & y \end{array} \quad \longmapsto \quad (a \xrightarrow{h} y)$$

La catégorie $\mathbf{E}_{/g}$ définie par $\mathbf{E}_{/g} = (\mathbf{C}_{z/})_{/g}$ est égale à la catégorie $(\mathbf{C}_{/y})_{g/}$, c'est la catégorie des diagrammes $z \xrightarrow{v_a} a \xrightarrow{u_a} y$ avec l'égalité $u_a \circ v_a = g$.

La paire de foncteurs adjoints $F_y : \mathbf{C}_{/y} \rightleftarrows \mathbf{E}_{/g} : G_g$ définie précédemment peut aussi être définie comme la paire

$$F_y = [g]_* : \mathbf{C}_{/y} \rightleftarrows \mathbf{E}_{/g} := [g]^! = G_g \ .$$

3. Modules de Beck

3.1 Objets en groupe abélien et modules de Beck

Pour toute catégorie $\mathbf{Y}$ la catégorie $(\mathbf{Y})_{ab}$ des objets en groupe abélien dans $\mathbf{Y}$ est la sous-catégorie formée des objets y de $\mathbf{Y}$ tels que le préfaisceau $h_y : \mathbf{Y}^{op} \longrightarrow \mathbf{Ens}$ représenté par y est un préfaisceau en groupes abéliens. Cela signifie que pour tout z dans $\mathbf{Y}$ l'ensemble $h_y(z) = Hom_{\mathbf{Y}}(z, y)$ est un groupe abélien et que pour tout morphisme $u : z \longrightarrow z'$ dans $\mathbf{Y}$ l'application associée $u^* : h_y(z') \longrightarrow h_y(z)$ est un morphisme de groupes. Un morphisme dans $(\mathbf{Y})_{ab}$ est un morphisme de préfaisceaux en groupes.

Si la catégorie $\mathbf{Y}$ admet des limites finies, il suffit de supposer que $\mathbf{Y}$ admet des produits finis et a un objet final $\star_{\mathbf{Y}}$, un objet en groupe abélien est un objet y de $\mathbf{Y}$ et la donnée de morphismes $m_y : y \times y \longrightarrow y$, $i_y : y \longrightarrow y$ et $e_y : \star_{\mathbf{Y}} \longrightarrow y$ tels que m_y définit une loi de groupe abélien avec i_y pour l'inverse et e_y pour l'élément neutre. Un morphisme dans $(\mathbf{Y})_{ab}$ de y dans y' est un morphisme $f : y \longrightarrow y'$ dans $\mathbf{Y}$ tel que nous ayons $f \circ m_y = m_{y'} \circ (f \times f)$, $f \circ i_y = i_{y'} \circ f$ et $f \circ e_y = e_{y'}$.

Nous rappelons le résultat suivant (cf. [Ba 1], Théorèmes 1.5 et 2.4 du chapitre 2).

Théorème 3.1. *Pour toute catégorie $\mathbf{Y}$ ayant des limites finies la sous-catégorie $(\mathbf{Y})_{ab}$ des objets en groupe abélien est une catégorie additive, qui est localement présentable si $\mathbf{Y}$ l'est.*

De plus si la catégorie $\mathbf{Y}$ est exacte, la catégorie $(\mathbf{Y})_{ab}$ est une catégorie abélienne.

Soit $\mathbf{Y}$ une catégorie admettant des limites finies, alors l'*élément nul* $0_{\mathbf{Y}}$ de la catégorie additive $(\mathbf{Y})_{ab}$ est l'objet final $\star_{\mathbf{Y}}$ muni de la structure de groupe triviale.

Pour tout x dans $(\mathbf{Y})_{ab}$, le morphisme $x \longrightarrow 0_{\mathbf{Y}}$ dans $(\mathbf{Y})_{ab}$ est le morphisme induit par le morphisme $x \longrightarrow \star_{\mathbf{Y}}$ dans $\mathbf{Y}$, et pour tout y dans $(\mathbf{Y})_{ab}$ le morphisme $0_{\mathbf{Y}} \longrightarrow y$ dans $(\mathbf{Y})_{ab}$ est le morphisme induit par l'élément neutre $e_y : \star_{\mathbf{Y}} \longrightarrow y$ de la structure de groupe de y.

En particulier l'élément neutre 0 du groupe abélien $Hom_{(\mathbf{Y})_{ab}}(x, y)$ est le morphisme g dans $\mathbf{Y}$ qui se factorise par l'objet final

$$\star_{\mathbf{Y}} : \begin{tikzcd} x \arrow[r] \arrow[rr, bend left, "g"] & \star_{\mathbf{Y}} \arrow[r] & y \end{tikzcd} .$$

Il existe un foncteur *oubli* $U : (\mathbf{Y})_{ab} \longrightarrow \mathbf{Y}$, et si la catégorie $\mathbf{Y}$ est localement présentable le foncteur U admet un adjoint à gauche L, le foncteur *objet en groupe abélien libre* (cf. [Ba 1], Exercice 1.5-3 du chapitre 6).

Un foncteur exact à gauche $G : \mathbf{Y} \longrightarrow \mathbf{X}$ préserve les limites finies et l'image d'un objet en groupe abélien est un objet en groupe abélien, il induit alors un foncteur additif $G_{ab} : (\mathbf{Y})_{ab} \longrightarrow (\mathbf{X})_{ab}$ tel que le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{tikzcd} (\mathbf{Y})_{ab} \arrow[r, "G_{ab}"] \arrow[d, "U"] & (\mathbf{X})_{ab} \arrow[d, "U"] \\ \mathbf{Y} \arrow[r, "G"] & \mathbf{X} \end{tikzcd}$$

Soit $\mathbf{C}$ une catégorie admettant des limites finies.

Définition 3.2. *La catégorie des modules de Beck au-dessus d'un objet x de $\mathbf{C}$ est la catégorie des objets en groupe abélien dans la catégorie $\mathbf{C}_{/x}$ des objets au-dessus de x : $B_{\mathbf{C}}(x) = (\mathbf{C}_{/x})_{ab}$.*

Nous pouvons définir un foncteur *oubli* U_x de la catégorie des modules de Beck $(\mathbf{C}_{/x})_{ab}$ au-dessus de x dans la catégorie $\mathbf{C}_{/x}$. Si la catégorie $\mathbf{C}$ est localement présentable, il en est de même de la catégorie $\mathbf{C}_{/x}$ et le foncteur U_x admet un adjoint à gauche L_x, qui est appelé *foncteur d'abélianisation* et est noté Ab_x dans [Fr] :

$$L_x : \begin{tikzcd} \mathbf{C}_{/x} \arrow[r, shift left] \arrow[r, phantom, "\perp"] & (\mathbf{C}_{/x})_{ab} \arrow[l, shift left] \end{tikzcd} : U_x$$

Soit $G : \mathbf{D} \longrightarrow \mathbf{C}$ un foncteur exact à gauche, pour tout y dans $\mathbf{D}$ le foncteur $G_y : \mathbf{D}_{/y} \longrightarrow \mathbf{C}_{/G(y)}$ préserve l'objet final et les produits finis, l'image d'un objet en groupe abélien est un objet en groupe abélien. Nous avons donc un foncteur $(G_y)_{ab}$ de la catégorie des modules de Beck au-dessus de y, $B_{\mathbf{D}}(y) = (\mathbf{D}_{/y})_{ab}$, dans la catégorie des modules de Beck au-dessus de $G(y)$, $B_{\mathbf{C}}(G(y)) = (\mathbf{C}_{/G(y)})_{ab}$, qui est additif, tel que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{tikzcd} (\mathbf{D}_{/y})_{ab} \arrow[r, "(G_y)_{ab}"] \arrow[d, "U_y"] & (\mathbf{C}_{/G(y)})_{ab} \arrow[d, "U_{G(y)}"] \\ \mathbf{D}_{/y} \arrow[r, "G_y"] & \mathbf{C}_{/G(y)} \end{tikzcd}$$

Nous noterons $[a] = \left(\begin{tikzcd} a \arrow[r, "u_a"'] & x \arrow[l, bend right, dotted, "e_a"'] \end{tikzcd} \right)$ un élément de la catégorie $(\mathbf{C}_{/x})_{ab}$, cela correspond à un objet a de $\mathbf{C}$ avec un morphisme $u_a : a \longrightarrow x$, à la donnée des morphismes $m_a : a \times_x a \longrightarrow a$, $i_a : a \longrightarrow a$ et $e_a : x \longrightarrow a$ donnés par la structure de groupe, et nous avons l'égalité $u_a \circ e_a = id_x$,

Remarque 3.3. L'existence du morphisme *élément neutre* $e_a : x \longrightarrow a$ définit un foncteur naturel $O_x : (\mathbf{C}_{/x})_{ab} \longrightarrow \mathbf{Pt}_{\mathbf{C}}(x)$, qui est fidèle, et le foncteur oubli $U_x : (\mathbf{C}_{/x})_{ab} \longrightarrow \mathbf{C}_{/x}$ se factorise par le foncteur canonique $G_x : \mathbf{Pt}_{\mathbf{C}}(x) \longrightarrow \mathbf{C}_{/x}$.

De plus le foncteur induit $(G_x)_{ab} : (\mathbf{Pt}_{\mathbf{C}}(x))_{ab} \longrightarrow (\mathbf{C}_{/x})_{ab}$ est une équivalence de catégories.

De même nous noterons $[\alpha]$ un morphisme de $Hom_{(\mathbf{C}_{/x})_{ab}}([a], [b])$, c'est la donnée d'un morphisme α dans $Hom_{\mathbf{C}}(a, b)$ tel que nous ayons le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} & a \arrow[dr, "u_a"] \arrow[dd, "\alpha"] & \\ x \arrow[ur, "e_a"] \arrow[dr, "e_b"'] & & x \\ & b \arrow[ur, "u_b"'] & \end{tikzcd}$$

et compatible aux morphismes m_a et m_b, i_a et i_b.

Lemme 3.4. *Soit α un morphisme dans $Hom_{(\mathbf{C}_{/x})_{ab}}([a],[b])$, alors avec les notations précédentes nous avons*

$$[\alpha] = [0] \iff \alpha = e_b \circ u_a \ .$$

Démonstration. Le morphisme $[\alpha]$ est le morphisme nul dans le groupe abélien $Hom_{(\mathbf{C}_{/x})_{ab}}([a],[b])$ s'il se factorise par $0_{\mathbf{C}_{/x}}$, c'est-à-dire si nous pouvons trouver un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} & a \arrow[d, "\alpha_1"] \arrow[dr, "u_a"] & \\ x \arrow[ur, "e_a"] \arrow[r, "id_x"] \arrow[dr, "e_b"'] & x \arrow[r, "id_x"] \arrow[d, "\alpha_2"] & x \\ & b \arrow[ur, "u_b"'] & \end{tikzcd}$$

□

Définition 3.5. *(1) Le module cotangent, Ω_x de x est le module de Beck au-dessus de x obtenu comme image par L_x de l'objet final $\star_{\mathbf{C}_{/x}} = (\ x \xrightarrow{id_x} x\ )$ de $\mathbf{C}_{/x}$, $\Omega_x = L_x(\star_{\mathbf{C}_{/x}})$.*

(2) Pour tout $[b]$ appartenant à $(\mathbf{C}_{/x})_{ab}$, nous appelons ensemble des dérivations de Beck *de x à valeurs dans $[b]$ l'ensemble*

$$Der_{\mathbf{C}}(x,[b]) := Hom_{(\mathbf{C}_{/x})_{ab}}(\Omega_x,[b]) \simeq Hom_{\mathbf{C}_{/x}}(\star_{\mathbf{C}_{/x}}, b)$$

avec $b = U_x([b])$.

Le module des différentiel Ω_x correspond à un élément $[\omega_x]$, avec ω_x dans $\mathbf{C}$, et par définition nous avons $U_x(\Omega_x) = (\ \omega_x \xrightarrow{u_{\omega_x}} x\ )$. En particulier l'unité $\eta_{\star_{\mathbf{C}_{/x}}}$ de l'adjonction $L_x \dashv U_x$ correspond à un morphisme $\eta_x : x \longrightarrow \omega_x$ vérifiant $u_{\omega_x} \circ \eta_x = id_x$.

Une dérivation θ dans $Der_{\mathbf{C}}(x,[b])$ correspond à un morphisme $[\delta]$ dans $Hom_{(\mathbf{C}_{/x})_{ab}}([\omega_x],[b])$, c'est-à-dire correspond à un morphisme $\delta : \omega_x \longrightarrow b$ tel que le diagramme suivant soit commutatif

$$\begin{tikzcd} & \omega_x \arrow[d, "\delta"] \arrow[dr, "u_{\omega_x}"] & \\ x \arrow[ur, "e_{\omega_x}"] \arrow[dr, "e_b"'] & & x \\ & b \arrow[ur, "u_b"'] & \end{tikzcd}$$

Par adjonction le morphisme $[\delta]$ correspond à un morphisme β dans $Hom_{\mathbf{C}_{/x}}(\star_{\mathbf{C}_{/x}}, b)$, qui est défini par $\beta = U([\delta]) \circ \eta_{\star_{\mathbf{C}_{/x}}}$, c'est-à-dire à un morphisme $\beta : x \longrightarrow b$ vérifiant $u_b \circ \beta = id_x$ tel que nous ayons l'égalité $\beta = \delta \circ \eta_x$. Et réciproquement par adjonction nous associons à un morphisme β dans $Hom_{\mathbf{C}_{/x}}(\star_{\mathbf{C}_{/x}}, b)$ le morphisme $[\delta]$ dans $Hom_{(\mathbf{C}_{/x})_{ab}}([\omega_x], [b])$ défini par $[\delta] = \epsilon_{[b]} \circ L_x(\beta)$.

Remarque 3.6. Pour tout $[b]$ appartenant à $(\mathbf{C}_{/x})_{ab}$, l'ensemble des dérivations de Beck $Der_{\mathbf{C}}(x, [b])$ est canoniquement isomorphe à l'ensemble des sections du morphisme $u_b : b \longrightarrow x$, pour $b = U_x([b])$. Mais la structure de groupe abélien sur cet ensemble dépend de la structure d'objet en groupe abélien dont est muni l'objet b.

Proposition 3.7. *Un élément θ du groupe abélien $Der_{\mathbf{C}}(x, [b])$ est l'élément nul si et seulement si le morphisme β de $Hom_{\mathbf{C}_{/x}}(\star_{\mathbf{C}_{/x}}, b)$ correspondant à θ est égal au morphisme e_b élément neutre de la structure de groupe abélien de $[b]$.*

Démonstration. Par définition l'élément θ est l'élément nul si nous avons $[\delta] = [0]$.

D'après le lemme 3.4, si $[\delta] = [0]$ nous avons $\delta = e_b \circ u_{\omega_x}$ et nous en déduisons $\beta = e_b \circ u_{\omega_x} \circ \eta_x = e_b$.

Réciproquement si $\beta = e_b$ alors β est l'image par U_x du morphisme nul $[0] : 0_{\mathbf{C}_{/x}} \longrightarrow [b]$, nous avons alors le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd} \omega_x = L_x U_x 0_{\mathbf{C}_{/x}} \arrow[r, "L_x(\beta)"] \arrow[d, "\epsilon_{0_{\mathbf{C}_{/x}}}"'] \arrow[dr, "{[\delta]}"] & L_x U_x [b] \arrow[d, "\epsilon_{[b]}"] \\ 0_{\mathbf{C}_{/x}} \arrow[r, "{[0]}"'] & {[b]} \end{tikzcd}$$

et nous en déduisons que $[\delta] = [0]$.

□

Remarque 3.8. D'après la proposition 3.7 l'élément θ du groupe abélien $Der_{\mathbf{C}}(x, [b])$ est l'élément nul si et seulement si la section β du morphisme $u_b : b \longrightarrow x$ est égale à l'élément neutre e_b.

En particulier si x est l'objet initial de la catégorie $\mathbf{C}$ pour tout objet $u_b : b \longrightarrow x$ dans $\mathbf{C}_{/x}$ il existe un seul morphisme $\beta : x \longrightarrow b$ tel que $u_b \circ \beta = id_x$, par conséquent le groupe abélien $Der_{\mathbf{C}}(x, [b])$ est réduit à l'élément nul. En particulier nous avons $\Omega_x = (0)$.

3.2 Catégorie en groupe

Nous considérons maintenant une catégorie $\mathbf{C}$ telle que tout objet a admet une structure de groupe, non nécessairement commutatif, et telle que les morphismes respectent cette structure. Plus précisément nous supposons que pour tout objet a dans $\mathbf{C}$ il existe des morphismes $\mu_a : a \times a \longrightarrow a$, $\iota_a : a \longrightarrow a$ et $\varepsilon_a : \star_{\mathbf{C}} \longrightarrow a$ définissant une structure d'objet en groupe et que pour tout morphisme $f : b \longrightarrow a$ dans $\mathbf{C}$ nous avons $f \circ \mu_b = \mu_a \circ (f \times f)$, $f \circ \iota_b = \iota_a \circ f$ et $f \circ \varepsilon_b = \varepsilon_a$. Et nous notons $c_a : a \times a \longrightarrow a \times a$ le morphisme qui échange les facteurs, en particulier la loi de groupe est commutative si nous avons $\mu_a \circ c_a = \mu_a$.

Soit x un objet dans $\mathbf{C}$ et nous notons comme précédemment m_a, i_a et e_a les morphismes définissant la structure d'objet en groupe abélien d'un objet $[a]$ dans $(\mathbf{C}_{/x})_{ab}$, avec $u_a : a \longrightarrow x$.

Nous avons le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
a \times_x a \arrow[r, "p_1"] \arrow[d, "p_2"'] & a \arrow[d, "u_a"] \\
a \arrow[r, "u_a"] & x
\end{tikzcd}$$

et nous notons $g_a : a \longrightarrow a$ le morphisme $g_a = e_a \circ u_a$, $q_a : a \times_x a \longrightarrow a$ le morphisme $g_a \circ p_1 = g_a \circ p_2$, et $\mu_a^{(3)} : a \times a \times a \longrightarrow a$ le morphisme $\mu_a(\mu_a, id_a) = \mu_a(id_a, \mu_a)$

Proposition 3.9. *Nous avons l'égalité* $m_a = \mu_a^{(3)} \circ \phi$ *où le morphisme* $\phi : a \times_x a \longrightarrow a \times a \times a$ *est défini par* $\phi = (p_2, \iota_a \circ q_a, p_1)$.

Démonstration. C'est un résultat classique qui est une conséquence des remarques suivantes.

Comme les morphismes dans $\mathbf{C}$ respectent la loi de composition μ_a nous avons la commutativité du diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
(a \times_x a) \times (a \times_x a) \arrow[rr, "\simeq"] \arrow[d, "m_a \times m_a"'] & & (a \times a) \times_{(x \times x)} (a \times a) \arrow[d, "\mu_a \times \mu_a"] \\
a \times a \arrow[dr, "\mu_a"] & & a \times_x a \arrow[dl, "m_a"'] \\
& a &
\end{tikzcd}$$

et nous en déduisons que le morphsime composé

$$a \times a \xrightarrow{\psi} (a \times a) \times_{(x \times x)} (a \times a) \xrightarrow{m_a \circ (\mu_a \times \mu_a)} a \ ,$$

avec $\psi = ((g_a \circ p_2, p_1), (p_2, g_a \circ p_1))$, est égal à $\mu_a \circ c_a$.

□

Si nous supposons que les objets de la catégorie $\mathbf{C}$ sont des ensembles munis d'une loi de groupe notée multiplicativement les relations précédentes peuvent s'écrire :

- $m_a(r_1.s_1, r_2.s_2) = m_a(r_1, s_1).m_a(r_2, s_2)$ pour r_1, r_2, s_1, s_2 dans l'ensemble a avec $u_a(r_1) = u_a(s_1)$ et $u_a(r_2) = u_a(s_2)$, et
- $m_a(g_a(s).r, s.g_a(r)) = s.r$ pour r et s quelconques dans a,

et l'égalité de la proposition peut s'écrire

$$m_a(r, s) = s.e_a(t)^{-1}.r \ ,$$

pour r et s appartenant à l'ensemble a avec $t = u_a(r) = u_a(s)$.

Nous avons vu qu'il existe un foncteur oubli de la catégorie $(\mathbf{C}_{/x})_{ab}$ dans la catégorie $\mathbf{Pt}_{\mathbf{C}}(x)$ des points de $\mathbf{C}$ au-dessus de x, et dans le cas d'une catégorie en groupe nous avons le résultat plus précis suivant.

Corollaire 3.10. *La foncteur* $O_x : (\mathbf{C}_{/x})_{ab} \longrightarrow \mathbf{Pt}_{\mathbf{C}}(x)$ *est pleinement fidèle.*

Démonstration. En effet nous déduisons de la proposition précédente que la structure d'objet en groupe abélien de $[a]$ est entièrement déterminée par les morphisme $e_a : x \longrightarrow a$ et $u_a : a \longrightarrow x$.

□

3.3 Suite exacte des modules cotangents

Soit $\mathbf{C}$ une catégorie localement présentable, et soit $f : x \longrightarrow y$ dans $\mathbf{C}$, nous voulons comparer les modules cotangents Ω_x et Ω_y et définir un module cotangent relatif $\Omega_{x/y}$.

Le foncteur $f^* : \mathbf{C}_{/y} \longrightarrow \mathbf{C}_{/x}$ est un adjoint à droite, il est donc exact à gauche et induit un foncteur additif $f^*_{ab} : (\mathbf{C}_{/y})_{ab} \longrightarrow (\mathbf{C}_{/x})_{ab}$ tel que le diagramme suivant soit commutatif

$$\begin{tikzcd} (\mathbf{C}_{/y})_{ab} \arrow[r, "f^*_{ab}"] \arrow[d, "U_y"] & (\mathbf{C}_{/x})_{ab} \arrow[d, "U_x"] \\ \mathbf{C}_{/y} \arrow[r, "f^*"] & \mathbf{C}_{/x} \end{tikzcd}$$

Grâce aux adjonctions $L_y \dashv U_y$ et $L_x \dashv U_x$ nous définissons la transformation de Beck-Chevalley à gauche $L_x f^* \Longrightarrow f^*_{ab} L_y$ ([Ma] **2.16**). Nous déduisons de l'isomorphisme canonique $\star_{\mathbf{C}_{/x}} \xrightarrow{\simeq} f^*(\star_{\mathbf{C}_{/y}})$ un morphisme naturel dans $(\mathbf{C}_{/x})_{ab}$:

$$[\delta_f] : \Omega_x = L_x(\star_{\mathbf{C}_{/x}}) \xrightarrow{\simeq} L_x f^*(\star_{\mathbf{C}_{/y}}) \longrightarrow f^*_{ab} L_y(\star_{\mathbf{C}_{/y}}) = f^*_{ab}(\Omega_y) \ .$$

Remarque 3.11. Si la catégorie $\mathbf{C}$ est une catégorie localement présentable, pour tout objet x dans $\mathbf{C}$ l'adjonction $L_x : \mathbf{C}_{/x} \underset{\longleftarrow}{\overset{\longrightarrow}{\perp}} (\mathbf{C}_{/x})_{ab} : U_x$ est monadique et la catégorie $(\mathbf{C}_{/x})_{ab}$ est encore localement présentable (**Theorem 1** de [Po] [1]).

Nous déduisons alors du théorème **4.5.6.** de [Bo] que le foncteur f^*_{ab} admet toujours un adjoint à gauche $f^{ab}_! : (\mathbf{C}_{/x})_{ab} \longrightarrow (\mathbf{C}_{/y})_{ab}$.

Nous déduisons de l'existence du foncteur adjoint à gauche

$$f^{ab}_! : (\mathbf{C}_{/x})_{ab} \longrightarrow (\mathbf{C}_{/y})_{ab}$$

1. Je remercie Marino Gran pour m'avoir indiqué cette référence

un morphisme $[\tilde{\delta_f}] : f_!^{ab}(\Omega_x) \longrightarrow \Omega_y$ dans $(\mathbf{C}_{/y})_{ab}$, qui peut être construit directement à partir du diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} (\mathbf{C}_{/x})_{ab} \arrow[r, "f_!^{ab}"] & (\mathbf{C}_{/y})_{ab} \\ \mathbf{C}_{/x} \arrow[u, "L_x"'] \arrow[r, "f_!"] & \mathbf{C}_{/y} \arrow[u, "L_y"'] \end{tikzcd}$$

Remarque 3.12. Le morphisme $[\tilde{\delta_f}]$ est égal au morphisme $L_y(\vartheta_f)$ où ϑ_f est le morphisme canonique $\vartheta_f : f_!(\star_{\mathbf{C}_{/x}}) \longrightarrow \star_{\mathbf{C}_{/y}}$ dans $\mathbf{C}_{/y}$.

Le morphisme $[\delta_f]$ induit un morphisme

$$U_x(\Omega_x) \longrightarrow U_x f_{ab}^*(\Omega_y) = f^* U_y(\Omega_y)$$

dans $\mathbf{C}_{/x}$, c'est-à-dire un morphisme $\delta_f : \omega_x \longrightarrow x \times_y \omega_y$ au dessus de x compatible avec les structures d'objets en groupe abélien de ω_x et de $x \times_y \omega_y$. Alors le morphisme $\psi_f : x \longrightarrow x \times_y \omega_y$ dans $Hom_{\mathbf{C}_{/x}}(\star_{\mathbf{C}_{/x}}, U_x f_{ab}^*(\Omega_y))$ correspondant par l'adjonction $L_x \dashv U_x$ au morphisme $[\delta_f]$ est défini par $\psi_f = \delta_f \circ \eta_x$.

Par construction ce morphisme ψ_f est défini par le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd} x \arrow[dr, "\psi_f"] \arrow[drr, bend left, "\eta_y \circ f"] \arrow[ddr, bend right, "id_x"'] & & \\ & x \times_y \omega_y \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"] & \omega_y \arrow[d, "u_{\omega_y}"] \\ & x \arrow[r, "f"] & y \end{tikzcd}$$

et comme nous avons l'égalité $id_y = u_{\omega_y} \circ \eta_y$ nous en déduisons le diagramme suivant formé de carrés cartésiens :

$$\begin{tikzcd}
x \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\psi_f"] & y \arrow[d, "\eta_y"] \\
x \times_y \omega_y \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"] & \omega_y \arrow[d, "u_{\omega_y}"] \\
x \arrow[r, "f"] & y
\end{tikzcd}$$

et nous pouvons ainsi écrire $\delta_f \circ \eta_x = \psi_f = f^*(\eta_y)$.

Pour tout $[b]$ dans $(\mathbf{C}_{/y})_{ab}$ le morphisme $[\delta_f] : \Omega_x \longrightarrow f^*_{ab}(\Omega_y)$ définit un morphisme de groupes abéliens $[\Delta_f]$ de l'ensemble $Der_{\mathbf{C}}(y, [b])$ dans l'ensemble $Der_{\mathbf{C}}(x, f^*_{ab}([b])$:

$$\begin{array}{rcl} [\Delta_f] : Hom_{(\mathbf{C}_{/y})_{ab}}(\Omega_y, [b]) & \longrightarrow & Hom_{(\mathbf{C}_{/x})_{ab}}(\Omega_x, f^*_{ab}([b])) \\ [\delta] & \longmapsto & f^*_{ab}([\delta]) \circ [\delta_f] \end{array}$$

Le morphisme dans $Hom_{\mathbf{C}_{/y}}(\star_{\mathbf{C}_{/y}}, b)$ associé à $[\delta]$ par l'adjonction $L_y \dashv U_y$ est égal à $\beta = \delta \circ \eta_y$, où $\delta = U_y([\delta])$, et de même le morphisme dans $Hom_{\mathbf{C}_{/x}}(\star_{\mathbf{C}_{/x}}, f^*(b))$ associé à $f^*_{ab}([\delta]) \circ [\delta_f]$ par l'adjonction $L_x \dashv U_x$ est égal à $f^*(\delta) \circ \delta_f \circ \eta_x$. Nous déduisons alors de ce qui précède que l'application associée au morphisme de groupes $[\Delta_f]$ par les adjonctions $L_y \dashv U_y$ et $L_x \dashv U_x$ est l'application induite par le foncteur f^* :

$$\begin{array}{rcl} \Delta_f : Hom_{\mathbf{C}_{/y}}(\star_{\mathbf{C}_{/y}}, b) & \longrightarrow & Hom_{\mathbf{C}_{/x}}(\star_{\mathbf{C}_{/x}}, f^*(b)) \\ \beta & \longmapsto & f^*(\beta) \end{array}$$

qui correspond au morphisme canonique entre l'ensemble des sections du morphisme $u_b : b \longrightarrow y$ et l'ensemble des sections du morphisme $u_{x \times_y b}$: $x \times_y b \longrightarrow x$.

Proposition 3.13. *L'élément $[\delta]$ de $Der_{\mathbf{C}}(y, [b])$ appartient au noyau de $[\Delta_f]$ si et seulement si nous avons l'égalité $e_b \circ f = \beta \circ f$, où β est le morphisme de $Hom_{\mathbf{C}_{/y}}(\star_{\mathbf{C}_{/y}}, b)$ associé à $[\delta]$ et où e_b est l'élément neutre de la structure de groupe abélien de $[b]$.*

Démonstration. Soit $[b]$ un objet de $(\mathbf{C}_{/y})_{ab}$ correspondant à un objet $u_b = b \longrightarrow y$ de $\mathbf{C}_{/y}$, alors l'élément neutre $e_a : x \longrightarrow a = x \times_y b$ de l'image $[a] = f^*_{ab}([b])$ est défini par le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd}
x \arrow[dr, "e_a"] \arrow[drr, bend left, "e_b \circ f"] \arrow[ddr, bend right, "id_x"'] & & \\
& x \times_y b \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"] & b \arrow[d, "u_b"] \\
& x \arrow[r, "f"] & y
\end{tikzcd}$$

où $e_b : y \longrightarrow b$ est l'elément neutre de $[b]$.

La proposition est alors une conséquence de la proposition 3.7 et de la description précédente de l'application Δ_f associée au morphisme $[\Delta_f]$. □

Pour tout morphisme $f : x \longrightarrow y$ dans $\mathbf{C}$, nous pouvons considérer f comme un objet de la catégorie $\mathbf{D} = \mathbf{C}_{x/}$, comme précédemment nous avons le couple de foncteurs adjoints

$$L_f : \mathbf{D}_{/f} \underset{\longleftarrow}{\overset{\longrightarrow}{\perp}} (\mathbf{D}_{/f})_{ab} : U_f$$

et nous avons la définition suivante.

Définition 3.14. *Le module cotangent Ω_f est le module de Beck au-dessus de f dans $(\mathbf{D}_{/f})_{ab}$ obtenu comme image par L_f de l'objet final $\star_{\mathbf{D}_{/f}} = (f \xrightarrow{id_f} f)$ de $\mathbf{D}_{/f}$, $\Omega_f = L_f(\star_{\mathbf{D}_{/F}})$.*

Nous considérons alors la paire de foncteurs adjoints

$$F = [x]_* : \mathbf{C} \rightleftarrows \mathbf{C}_{x/} = \mathbf{D} : [x]^! = G$$

où l'image de $(f : x \longrightarrow y)$ par le foncteur G est y, et nous en déduisons la paire de foncteurs adjoints

$$F_y : \mathbf{C}_{/y} \rightleftarrows \mathbf{D}_{/f} : G_f \quad .$$

Les objets de la catégorie $\mathbf{D}_{/f} = (\mathbf{C}_{x/})_{/f}$ sont les diagrammes commutatifs dans $\mathbf{C}$:

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "v_z"] \arrow[d, equal] & z \arrow[d, "u_z"] \\ x \arrow[r, "f"] & y \end{tikzcd}$$

que nous notons (v_z, z, u_z).

Un morphisme de (v_{z_1}, z_1, u_{z_1}) dans (v_{z_2}, z_2, u_{z_2}) est un morphisme $g : z_1 \longrightarrow z_2$ dans $\mathbf{C}$ vérifiant $v_{z_2} = g \circ v_{z_1}$ et $u_{z_1} = u_{z_2} \circ g$, et l'objet final $\star_{\mathbf{D}_{/f}}$ de $\mathbf{D}_{/f}$ est le diagramme (f, y, id_y). La donnée d'un morphisme $[\alpha]$ de $\star_{\mathbf{D}_{/f}}$ dans l'objet (v_z, z, u_z) est la donnée d'un morphisme $s : y \longrightarrow z$ dans $\mathbf{C}$ vérifiant $u_z \circ s = id_y$ et $s \circ f = v_z$.

De même les objets de la catégorie $\mathbf{C}_{/y}$ sont les morphismes $u_t : t \longrightarrow y$ dans $\mathbf{C}$ que nous notons (t, u_t). Un morphisme de (t_1, u_{t_1}) dans (t_2, u_{t_2}) est un morphisme $h : t_1 \longrightarrow t_2$ vérifiant $u_{t_1} = u_{t_2} \circ h$, et l'objet final $\star_{\mathbf{C}_{/y}}$ de $\mathbf{C}_{/y}$ est le morphisme (id_y, y). La donnée d'un morphisme $[\beta]$ de $\star_{\mathbf{C}_{/y}}$ dans l'objet (t, u_t) est la donnée d'un morphisme $s : y \longrightarrow t$ dans $\mathbf{C}$ vérifiant $u_t \circ s = id_y$.

Comme précédement nous notons $[(v_z, z, u_z)]$ (resp. $[(t, u_t)]$), un élément de la catégorie $(\mathbf{D}_{/f})_{ab}$ (resp. $(\mathbf{C}_{/y})_{ab}$), d'image (v_z, z, u_z) (resp. (t, u_t)).

Le foncteur $G_f : \mathbf{D}_{/f} \longrightarrow \mathbf{C}_{/y}$ induit un foncteur $(G_f)_{ab}$ entre les sous-catégories des objets en groupe abéliens, c'est-à-dire nous avons le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} (\mathbf{D}_{/f})_{ab} \arrow[r, "(G_f)_{ab}"] \arrow[d, "U_f"] & (\mathbf{C}_{/y})_{ab} \arrow[d, "U_y"] \\ \mathbf{D}_{/f} \arrow[r, "G_f"] & \mathbf{C}_{/y} \end{tikzcd}$$

Proposition 3.15. *(1) Le foncteur* $G_f : \mathbf{D}_{/f} \longrightarrow \mathbf{C}_{/y}$ *est fidèle.*

(2) Le foncteur $(G_f)_{ab} : (\mathbf{D}_{/f})_{ab} \longrightarrow (\mathbf{C}_{/y})_{ab}$ *est une équivalence de catégories.*

Démonstration. (1) Il suffit de remarquer que le foncteur $G_f : \mathbf{D}_{/f} \longrightarrow \mathbf{C}_{/y}$ envoie (v_z, z, u_z) sur (z, u_z), et un morphisme $g : z_1 \longrightarrow z_2$ sur lui-même.

(2) Nous allons construire le foncteur $(F_y)_{ab}$ inverse du foncteur $(G_f)_{ab}$.

Soit $[(t, u_t)]$ un élément de $(\mathbf{C}_{/y})_{ab}$, le morphisme $e_t : \star_{\mathbf{C}_{/y}} \longrightarrow (t, u_t)$ induit un morphisme $e_t : y \longrightarrow t$ dans $\mathbf{C}$ vérifiant $u_t \circ e_t = id_y$. Nous définissons alors $(F_y)_{ab}([(t, u_t)]) = [(v_t, t, u_t)]$ avec $v_t = e_t \circ f$. Il suffit de vérifier alors que (v_t, t, u_t) est un objet en groupe abélien dans $\mathbf{D}_{/f}$, et que nous avons $(G_f)_{ab} \circ (F_y)_{ab} = id_{(\mathbf{C}_{/y})_{ab}}$ et $(F_y)_{ab} \circ (G_f)_{ab} = id_{(\mathbf{D}_{/f})_{ab}}$.

□

Nous pouvons aussi déduire l'équivalence de catégories

$$(G_f)_{ab} : (\mathbf{D}_{/f})_{ab} \longrightarrow (\mathbf{C}_{/y})_{ab}$$

de l'équivalence de catégories $\mathbf{Pt_D}(f) \longrightarrow \mathbf{Pt_C}(y)$ et des équivalences de catégories $(\mathbf{Pt_D}(f))_{ab} \longrightarrow (\mathbf{D}_{/f})_{ab}$ et $(\mathbf{Pt_C}(y))_{ab} \longrightarrow (\mathbf{C}_{/y})_{ab}$ (cf. remarque 3.3).

Définition 3.16. *Le* module cotangent relatif,*noté $\Omega_{y/x}$, est l'image du module cotangent Ω_f par le foncteur $(G_f)_{ab} : (\mathbf{D}_{/f})_{ab} \longrightarrow (\mathbf{C}_{/y})_{ab}$:*

$$\Omega_{y/x} = (G_f)_{ab}(\Omega_f) .$$

Pour x égal à l'objet initial de la catégorie $\mathbf{C}$, le module cotangent relatif $\Omega_{y/x}$ est canoniquement isomorphe au module cotangent Ω_y.

Remarque 3.17. Nous pouvons décrire tout objet en groupe dans $\mathbf{D}_{/f}$ par un diagramme $x \xrightarrow{v_z} z \underset{e_z}{\overset{u_z}{\rightleftarrows}} y$, avec $u_z \circ e_z = id_y$, $u_z \circ v_z = f$ et $e_z \circ f = v_z$, où le morphisme e_z est défini par l'élément neutre. En particulier le module cotangent Ω_f correspond à un diagramme $x \xrightarrow{v_{\omega_f}} \omega_f \underset{e_{\omega_f}}{\overset{u_{\omega_f}}{\rightleftarrows}} y$.

Nous déduisons du diagramme commutatif précédent et des adjonctions $L_y \dashv U_y$ et $L_x \dashv U_x$ la transformation de Beck-Chevalley à droite $[\Gamma]$: $L_y G_f \Rightarrow (G_f)_{ab} L_f$ ([Ma] **2.16**).

Proposition 3.18. *Pour tout a dans $\mathbf{D}_{/f}$ le morphisme*

$$[\gamma_a] \in Hom_{(\mathbf{C}_{/x})_{ab}}(L_y G_f(a), (G_f)_{ab} L_f(a))$$

défini par la transformation de Beck-Chevalley $[\Gamma]$ est un épimorphisme.

Démonstration. Pour tout a dans $\mathbf{D}_{/f}$ et tout $[b]$ nous déduisons de l'adjonction $L_f \dashv U_f$ et de la pleine fidélité du foncteur $(G_f)_{ab}$ les isomorphismes

$$\begin{array}{rcl} Hom_{\mathbf{D}_{/f}}(a, U_f([b])) & \simeq & Hom_{(\mathbf{D}_{/f})_{ab}}(L_f(a), [b]) \\ & \simeq & Hom_{(\mathbf{C}_{/y})_{ab}}((G_f)_{ab} L_f(a), (G_f)_{ab}([b])) \ , \end{array}$$

et de la commutativité du diagramme précédent et de l'adjonction $L_y \dashv U_y$ les isomorphismes

$$\begin{array}{rcl} Hom_{\mathbf{C}_{/y}}(G_f(a), G_f U_f([b])) & \simeq & Hom_{\mathbf{C}_{/y}}(G_f(a), U_y (G_f)_{ab}([b])) \\ & \simeq & Hom_{(\mathbf{C}_{/y})_{ab}}(L_y G_f(a), (G_f)_{ab}([b])) \ . \end{array}$$

Le foncteur G_f induit une application

$$Hom_{\mathbf{D}_{/f}}(a, U_f([b])) \longrightarrow Hom_{\mathbf{C}_{/y}}(G_f(a), G_f U_f([b])) \ ,$$

d'où une application $\left[\Gamma_a^{(G_f)_{ab}([b])}\right]$ de $Hom_{(\mathbf{C}_{/y})_{ab}}((G_f)_{ab} L_f(a), (G_f)_{ab}([b]))$ dans $Hom_{(\mathbf{C}_{/y})_{ab}}(L_y G_f(a), {G_f}_{ab}([b]))$, qui correspond à la composition par le morphisme $[\gamma_a]$. Cette application correspond aussi, par les isomorphismes précédents à l'application

$$Hom_{\mathbf{D}_{/f}}(a, U_f([b])) \longrightarrow Hom_{\mathbf{C}_{/y}}(G_f(a), G_f U_f([b]))$$

induite par le foncteur G_f, donc est injective d'après la proposition 3.15 (1).

Nous déduisons alors de l'essentielle surjectivité du foncteur $(G_f)_{ab}$ que pour tout $[c]$ dans $(\mathbf{C}_{/y})_{ab}$ l'application

$$\begin{array}{rcl} \left[\Gamma_a^{[c]}\right] : Hom_{(\mathbf{C}_{/y})_{ab}}((G_f)_{ab} L_f(a), [c]) & \longrightarrow & Hom_{(\mathbf{C}_{/y})_{ab}}(L_y G_f(a), [c]) \\ \varphi & \longmapsto & \varphi \circ [\gamma_a] \end{array}$$

est injective, par conséquent $[\gamma_a]$ est un épimorphisme.

$\square$

Pour a égal à l'objet final $\star_{\mathbf{D}_{/f}}$, nous trouvons un épimorphisme naturel :

$$[\gamma_f] : \Omega_y \longrightarrow \Omega_{y/x} \quad ,$$

et nous déduisons que pour tout $[b]$ dans $(\mathbf{D}_{/f})_{ab}$ nous avons un morphisme injectif entre les ensembles des dérivations

$$\left[\Gamma_f^{[b]}\right] : Der_{\mathbf{D}}(f,[b]) \hookrightarrow Der_{\mathbf{C}}(y,(G_f)_{ab}([b])) \ .$$

Remarque 3.19. Le morphisme $[\gamma_f]$ se factorise par

$$\Omega_y \longrightarrow L_y U_y(\Omega_{y/x}) \longrightarrow \Omega_{y/x} \ .$$

Définition 3.20. *Soient $f : X \longrightarrow Y$ et $g : Y \longrightarrow Z$ deux morphismes dans une catégorie additive $\mathbf{A}$, alors on dit que la suite*

$$X \xrightarrow{R} Y \xrightarrow{S} Z \longrightarrow 0$$

est exacte *dans $\mathbf{A}$ si pour tout U dans $\mathbf{A}$ nous avons une suite excate de groupes abéliens*

$$0 \longrightarrow Hom_{\mathbf{A}}(Z,U) \xrightarrow{S^*} Hom_{\mathbf{A}}(Y,U) \xrightarrow{R^*} Hom_{\mathbf{A}}(X,U) \ .$$

Si la catégorie $\mathbf{A}$ est de plus une catégorie exacte, c'est-à dire si $\mathbf{A}$ est une catégorie abélienne, nous retrouvons la définition usuelle de suite exacte.

Théorème 3.21. *Soit $\mathbf{C}$ une catégorie localement présentable, pour tout morphisme $f : x \longrightarrow y$ dans $\mathbf{C}$, nous avons une suite exacte dans $(\mathbf{C}_{/y})_{ab}$:*

$$f_!^{ab}(\Omega_x) \xrightarrow{[\tilde{\delta_f}]} \Omega_y \xrightarrow{[\gamma_f]} \Omega_{y/x} \longrightarrow 0$$

Démonstration. Par définition il faut montrer que pour tout $[c]$ dans $(\mathbf{C}_{/y})_{ab}$ la suite de morphismes induite

$$0 \longrightarrow Hom_{(\mathbf{C}_{/y})_{ab}}(\Omega_{y/x},[c]) \xrightarrow{[\gamma_f]^*} Hom_{(\mathbf{C}_{/y})_{ab}}(\Omega_y,[c]) \xrightarrow{[\tilde{\delta}_f]^*} Hom_{(\mathbf{C}_{/y})_{ab}}(f_!^{ab}(\Omega_x),[c])$$

est une suite exacte de groupes abéliens. De ce qui précède nous en déduisons que c'est équivalent à monter que pour tout $[b]$ dans $(\mathbf{D}_{/f})_{ab}$ la suite de morphismes

$$0 \longrightarrow Hom_{(\mathbf{D}_{/f})_{ab}}(\Omega_f,[b]) \xrightarrow{[\Gamma_f]} Hom_{(\mathbf{C}_{/y})_{ab}}(\Omega_y,(G_f)_{ab}([b])) \xrightarrow{[\Delta_f]} Hom_{(\mathbf{C}_{/x})_{ab}}(\Omega_x, f^*_{ab}(G_f)_{ab}([b]))$$

est exacte.

Comme nous avons déjà vu par la proposition 3.18 que le morphisme $[\Gamma_f]$ est injectif il suffit de monter que nous avons l'égalité :

$$Ker([\Delta_f]) = Im([\Gamma_f]) \ .$$

Nous pouvons écrire le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd}
Hom_{(\mathbf{D}_{/f})_{ab}}(\Omega_f,[b]) \arrow[r, "{[\Gamma_f]}"] \arrow[d, "\simeq"] & Hom_{(\mathbf{C}_{/y})_{ab}}(\Omega_y,(G_f)_{ab}([b])) \arrow[r, "{[\Delta_f]}"] \arrow[d, "\simeq"] & Hom_{(\mathbf{C}_{/x})_{ab}}(\Omega_x, f^*_{ab}(G_f)_{ab}([b])) \arrow[d, "\simeq"] \\
Hom_{\mathbf{D}_{/f}}(\star_{\mathbf{D}_{/f}},U_f([b])) \arrow[r, "\Gamma_f"] & Hom_{\mathbf{C}_{/y}}(\star_{\mathbf{C}_{/y}},U_y(G_f)_{ab}([b])) \arrow[r, "\Delta_f"] & Hom_{\mathbf{C}_{/x}}(\star_{\mathbf{C}_{/x}},U_x f^*_{ab}(G_f)_{ab}([b]))
\end{tikzcd}$$

Avec les notations précédentes nous notons (v_b, b, u_b) l'élément $U_f([b])$ dans la catégorie $\mathbf{D}_{/f}$, (b, u_b) l'élément $U_y(G_f)_{ab}([b]) = G_f U_f([b])$ dans la catégorie $\mathbf{C}_{/y}$, et $(x \times_y b, p_1)$ l'élément $U_x f^*_{ab}(G_f)_{ab}([b]) = f^* G_f U_f([b])$ dans la catégorie $\mathbf{C}_{/x}$.

L'application Γ_f envoie un élément $[\alpha]$ de $Hom_{\mathbf{D}_{/f}}(\star_{\mathbf{D}_{/f}}, U_f([b]))$, correspondant à un morphisme $s : y \longrightarrow b$, sur l'élément $[\beta]$ appartenant à $Hom_{\mathbf{C}_{/y}}(\star_{\mathbf{C}_{/y}}, U_y(G_f)_{ab}([b]))$, correspondant au même morphisme s, en particulier nous retrouvons que l'application Γ_f est injective. Nous en déduisons qu'un élément $[\beta]$ de $Hom_{\mathbf{C}_{/y}}(\star_{\mathbf{C}_{/y}}, U_y(G_f)_{ab}([b]))$ appartient à l'image de l'application Γ_f si et seulement le morphisme $s : y \longrightarrow b$ correspondant vérifie l'égalité $s \circ f = v_b$, c'est-à-dire si et seulement si nous avons l'égalité $s \circ f = e_b \circ f$. Le résultat est alors une conséquence de la proposition 3.13.

□

Sous certaines conditions le module cotangent relatif $\Omega_{y/x}$ est nul ; plus précisément nous avons le résultat suivant.

Théorème 3.22. *Soit* $\mathbf{C}$ *une catégorie localement présentable, et soit* $f : x \longrightarrow y$ *dans* $\mathbf{C}$*, alors si* f *est un épimorphisme dans* $\mathbf{C}$*, l'application* $[\tilde{\delta_f}] : f_!^{ab}(\Omega_x) \longrightarrow \Omega_y$ *est un épimorphisme dans* $(\mathbf{C}_{/y})_{ab}$.

Démonstration. Si $f : x \longrightarrow y$ est un épimorphisme dans $\mathbf{C}$, le morphisme induit $\vartheta_f : f_!(\star_{\mathbf{C}_{/x}}) \longrightarrow \star_{\mathbf{C}_{/y}}$, correspondant à

$$\vartheta_f : (x \xrightarrow{f} y) \longrightarrow (y \xrightarrow{id_y} y)$$

est un épimorphisme dans $\mathbf{C}_{/y}$. Comme le foncteur L_y est un adjoint à gauche, il en est de même du morphisme $L_y(\vartheta_f)$, qui est égal au morphisme $[\tilde{\delta_f}]$ d'après la remarque 3.12.

$\square$

Nous considérons deux objets x et z de $\mathbf{C}$, $y = z \coprod x$, et les morphismes $f = q_2 : x \longrightarrow y$ et $g = q_1 : z \longrightarrow y$. Comme précédemment nous avons la paire de foncteurs adjoints

$$F^{(1)} = [z]_* : \mathbf{C} \rightleftarrows \mathbf{C}_{z/} = \mathbf{E} : [z]^! = G^{(1)} \quad ,$$

l'image de $(g : z \longrightarrow y)$ par le foncteur $G^{(1)}$ est y, nous en déduisons la paire de foncteurs adjoints

$$F_y^{(1)} : \mathbf{C}_{/y} \rightleftarrows \mathbf{E}_{/g} : G_g^{(1)} \quad .$$

Théorème 3.23. *Il existe dans* $(\mathbf{C}_{/y})_{ab}$ *un isomorphisme naturel*

$$f_!^{ab}(\Omega_x) \simeq \Omega_{y/z} \ .$$

Démonstration. Le foncteur $(G_g^{(1)})_{ab} : (\mathbf{E}_{/g})_{ab} \longrightarrow (\mathbf{C}_{/y})_{ab}$ est une équivalence de catégories, le foncteur inverse $(F_y^{(1)})_{ab}$ est l'adjoint à gauche et nous avons le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd}
(\mathbf{C}_{/x})_{ab} \arrow[r, "f_!^{ab}"] & (\mathbf{C}_{/y})_{ab} \arrow[r, "(F_y^{(1)})_{ab}"] & (\mathbf{E}_{/g})_{ab} \\
\mathbf{C}_{/x} \arrow[u, "L_x"'] \arrow[r, "f_!"] & \mathbf{C}_{/y} \arrow[u, "L_y"'] \arrow[r, "F_y^{(1)}"] & \mathbf{E}_{/g} \arrow[u, "L_g"']
\end{tikzcd}$$

Par définition du foncteur $f_!$ nous avons $f_!(\star_{\mathbf{C}_{/x}}) = (f : x \longrightarrow y)$ et d'après la remarque 2.1 nous avons $F_y^{(1)}\,(f : x \longrightarrow y) = \star_{\mathbf{E}_{/g}}$, nous déduisons alors de la commutativité du diagramme précédent l'égalité

$$(F_y^{(1)})_{ab} f_{!ab}(\Omega_x) = \Omega_g \ ,$$

et le théorème est une conséquence de l'égalité $\Omega_{y/z} = (G_g^{(1)})_{ab}(\Omega_g)$.

□

4. Exemples

4.1 Catégorie des ensembles

Nous prenons comme catégorie $\mathbf{C}$ la catégorie $\mathbf{Ens}$ des ensembles. La catégorie des objets en groupe abélien dans $\mathbf{Ens}$ est la catégorie $\mathbf{Ab}$ des groupes abéliens.

Pour tout X dans $\mathbf{Ens}$ la catégorie $(\mathbf{Ens}_{/X})_{ab}$ est la catégorie des applications $u : F \longrightarrow X$ telles que chaque fibre $F_x = u^{-1}(x)$ pour $x \in X$ est un groupe abélien, et les morphismes sont définis par

$$Hom_{(\mathbf{Ens}_{/X})_{ab}}((\ F^{(1)} \xrightarrow{u^{(1)}} X\ ), (\ F^{(2)} \xrightarrow{u^{(2)}} X\ )) = \prod_{x \in X} Hom_{\mathbf{Ab}}(F_x^{(1)}, F_x^{(2)}) \ .$$

Le foncteur $L_X : \mathbf{Ens}_{/X} \longrightarrow (\mathbf{Ens}_{/X})_{ab}$ adjoint à gauche du foncteur $U_X : (\mathbf{Ens}_{/X})_{ab} \longrightarrow \mathbf{Ens}_{/X}$ est défini par

$$L_X(\ E \xrightarrow{\ l\ } X) = (\ F = \mathbb{Z}_X[E] \xrightarrow{\ u\ } X)$$

avec $F_x = \mathbb{Z}[E_x]$ le groupe abélien libre engendré par la fibre E_x pour tout $x \in X$. Nous en déduisons que le module cotangent de l'ensemble X est défini par $\Omega_X = (X \times \mathbb{Z} \xrightarrow{p_1} X)$.

Soit $f : X \longrightarrow Y$ une application dans $\mathbf{Ens}$, alors le foncteur

$$f^*_{ab} : (\mathbf{Ens}_{/Y})_{ab} \longrightarrow (\mathbf{Ens}_{/X})_{ab}$$

envoie l'objet en groupe abélien $(G \xrightarrow{v} Y)$ sur $(F = X \times_Y G \xrightarrow{p_1} X)$ où pour tout $x \in X$ nous avons $F_x = G_{f(x)}$.

Le foncteur $f_!^{ab} : (\mathbf{Ens}_{/X})_{ab} \longrightarrow (\mathbf{Ens}_{/Y})_{ab}$ envoie l'objet en groupe abélien $(F \xrightarrow{u} X)$ sur $(G \xrightarrow{v} Y)$ où pour tout $y \in Y$ nous avons $G_y = \coprod_{f(x)=y} F_x$.

En effet pour $(F^{(1)} \xrightarrow{u^{(1)}} X)$ dans $(\mathbf{Ens}_{/X})_{ab}$ et pour $(G^{(2)} \xrightarrow{v^{(2)}} Y)$ dans $(\mathbf{Ens}_{/Y})_{ab}$ nous avons

$$Hom_{(\mathbf{Ens}_{/X})_{ab}}((\ F^{(1)} \xrightarrow{u^{(1)}} X\ ), f_{ab}^*(\ G^{(2)} \xrightarrow{v^{(2)}} Y\ )) = \prod_{x \in X} Hom_{\mathbf{Ab}}(F_x^{(1)}, G_{f(x)}^{(2)})$$

et

$$Hom_{(\mathbf{Ens}_{/Y})_{ab}}(f_!^{ab}(\ F^{(1)} \xrightarrow{u^{(1)}} X\ ), (\ G^{(2)} \xrightarrow{v^{(2)}} Y\ )) = \prod_{y \in Y} Hom_{\mathbf{Ab}}(\coprod_{f(x)=y} F_x^{(1)}, G_y^{(2)})\ .$$

Pour une application $f : X \longrightarrow Y$ nous avons alors

$$f_!^{ab}(\Omega_X) = \ (G \xrightarrow{v} Y)$$

avec pour tout $y \in Y$ la fibre $G_y = \coprod_{f(x)=y} \mathbb{Z}$ et le morphisme

$$[\tilde{\delta_f}] : f_!^{ab}(\Omega_X) \longrightarrow \Omega_Y$$

est le morphisme qui au dessus de y est défini par

$$\delta_y : \coprod_{f(x)=y} \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}\ .$$

Si l'ensemble $f^{-1}(y) = \{x \in X \mid f(x) = y\}$ est non vide nous avons $\delta_y : \coprod_{f(x)=y} \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ qui est défini par $id_{\mathbb{Z}}$ sur chaque facteur et δ_y est surjectif, et si l'ensemble $f^{-1}(y)$ est vide nous avons $\delta_y : (0) \longrightarrow \mathbb{Z}$. Nous en déduisons que le module cotangent relatif est défini par $\Omega_{Y/X} = (H \longrightarrow Y)$ avec $H_y = (0)$ si y appartient à l'image de l'application f et $H_y = \mathbb{Z}$ sinon.

Nous déduisons de ce qui précède le résultat suivant.

Proposition 4.1. *Le morphisme* $[\tilde{\delta_f}] : f_!^{ab}(\Omega_X) \longrightarrow \Omega_Y$ *est un épimorphisme (resp. un monomorphisme) si et seulement si l'application* $f : X \longrightarrow Y$ *est surjective (resp. injective).*

En particulier $[\tilde{\delta_f}] : f_!^{ab}(\Omega_X) \longrightarrow \Omega_Y$ *est un isomorphisme dans la catégorie* $(\mathbf{Ens}_{/Y})_{ab}$ *si et seulement si* f *est une bijection dans* $\mathbf{Ens}$*.*

4.2 Catégorie des monoïdes commutatifs

Nous considérons maintenant la catégorie $\mathbf{Com}$ des monoïdes associatifs, commutatifs unitaires. Un objet X de $\mathbf{Com}$ est un ensemble muni d'une loi de composition interne $\star : X \times X \longrightarrow X$ associative, commutative et muni d'un élément neutre 1_X pour la loi $\star$. Suivant Michael Barr nous avons la description suivante.

Soit X dans $\mathbf{Com}$, un objet de la catégorie $(\mathbf{Com}_{/X})_{ab}$ est la donnée d'un morphisme de monoïdes $u_A : A \longrightarrow X$ et de morphismes de monoïdes au-dessus de X $m_A : A \times_X A \longrightarrow A$, $i_A : A \longrightarrow A$ et $e_A : X \longrightarrow A$ qui définissent une structure d'objet en groupe abélien.

Nous en déduisons que pour tout $x \in X$ ces morphismes induisent une structure de groupe abélien sur la fibre $A_x = u_A^{-1}(x)$ notée $+_x$ dont l'élément neutre est $0_{A_x} = e_A(x)$. La composition par un élément x de X définit une application de A_y dans $A_{x\star y}$, et comme d'après la démonstration de la proposition 3.9 cette application est un morphisme de groupes abéliens. Cela détermine complètement les objets en groupe abélien dans $\mathbf{Com}_{/X}$, plus précisément nous avons le résultat suivant.

Proposition 4.2. *[Ba 2] Soit* X *un monoïde commutatif, un objet* A *de la catégorie* $(\mathbf{Com}_{/X})_{ab}$ *est la donnée pour tout* x *dans* X *d'un groupe abélien* A_x*, pour tout* x *et* y *dans* X *d'un morphisme de groupes* $h_x^{(A)} : A_y \longrightarrow A_{x\star y}$ *vérifiant* $h_x^{(A)} \circ h_y^{(A)} = h_{x\star y}^{(A)}$*.*

Nous notons un élément de A *sous la forme d'une paire* (x, a) *avec* $x = u_A(x, a)$ *dans* X*,* a *dans* A_x *et la structure de monoïde sur* A *est définie par* $(x, a) \star (y, b) = (x \star y, h_x^{(A)}(b) +_{x\star y} h_y^{(A)}(a))$*.*

Pour tout A dans $(\mathbf{Com}_{/X})_{ab}$ l'espace des dérivations $Der_{\mathbf{Com}}(X, A)$ est égal par définition à l'ensemble $Hom_{\mathbf{Com}_{/X}}(X, A)$. D'après ce qui précède un morphisme s dans $Hom_{\mathbf{Com}_{/X}}(X, A)$ correspond à la donnée pour tout x dans X d'un élément s_x dans A_x vérifiant la propriété suivante

$$s_{x\star y} = (h_x^{(A)}(s_y) +_{x\star y} h_y^{(A)}(s_x)) \ .$$

En particulier pour $x = y$ égal à l'élément neutre 1_X du monoïde X, nous avons $h_x^{(A)} = id$ et nous en déduisons s_{1_X} est égal à l'élément neutre $0_{A_{1_X}}$ du groupe abélien A_{1_X}.

Un morphisme $f : A \longrightarrow B$ dans $(\mathbf{Com}_{/X})_{ab}$ induit pour chaque x dans X un morphisme de groupes abéliens $f_x : A_x \longrightarrow B_x$. Comme f respecte la structure de monoïdes nous avons de plus pour tout a dans A_x et b dans A_y l'égalité $f_{x\star y}(h_x^{(A)}(b) +_{x\star y} h_y^{(A)}(a)) = h_x^{(B)}(f_y(b)) +_{x\star y} h_y^{(B)}(f_x(a))$, ce qui induit pour $b = 0_{A_y}$ l'égalité $f_{x\star y}(h_x^{(A)}(a)) = h_x^{(B)}(f_y(a))$. Nous avons alors le résultat suivant.

Proposition 4.3. *[Ba 2] Un morphisme $f : A \longrightarrow B$ dans $(\mathbf{Com}_{/X})_{ab}$ est défini par la donnée d'une famille de morphismes de groupes abéliens $f_x : A_x \longrightarrow B_x$ vérifiant la relation $f_{x\star y} \circ h_x^{(A)} = h_x^{(B)} \circ f_y$.*

Soit $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme dans $\mathbf{Com}$, nous avons alors la paire de foncteurs adjoints

$$f_! : \mathbf{Com}_{/X} \rightleftarrows \mathbf{Com}_{/Y} : f^*$$

et le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} (\mathbf{Com}_{/Y})_{ab} \arrow[r, "f^*_{ab}"] \arrow[d, "U_Y"] & (\mathbf{Com}_{/X})_{ab} \arrow[d, "U_X"] \\ \mathbf{Com}_{/Y} \arrow[r, "f^*"] & \mathbf{Com}_{/X} \end{tikzcd}$$

où le foncteur f^*_{ab} envoie l'objet B de $(\mathbf{Com}_{/Y})_{ab}$ défini par la famille de groupes abéliens $(B_y)_{y\in Y}$ et les morphismes $h_y^{(B)}$ sur l'objet $A = f^*_{ab}(B)$ de $(\mathbf{Com}_{/X})_{ab}$ défini par la famille de groupes abéliens $(A_x)_{x\in X}$ avec $A_x = B_{f(x)}$ et les morphismes $h_x^{(A)} = h_{f(x)}^{(B)}$.

Soit Ω_X le module cotangent de X et soit $\eta_X : X \longrightarrow \Omega_X$ l'unité de l'adjonction, alors Ω_X correspond à une famille $((\Omega_X)_x)_{x\in X}$ de groupes abéliens et à des morphismes $h_x^{(\Omega_X)} : (\Omega_X)_y \longrightarrow (\Omega_X)_{x\star y}$, et le morphisme η_X correspond à la donnée d'éléments η_x dans $(\Omega_X)_x$ vérifiant

$$\eta_{x\star y} =(h_x^{(\Omega_X)}(\eta_y) +_{x\star y} h_y^{(\Omega_X)}(\eta_x)) \ .$$

Nous considérons le monoïde $X = (\mathbb{N}, +)$, un objet A dans $(\mathbf{Com}_{/\mathbb{N}})_{ab}$ est défini par la donnée de groupes abéliens A_n et de morphismes de groupes $h^{(A)} : A_n \longrightarrow A_{n+1}$, pour tout n appartenant à $\mathbb{N}$, avec les notations précédentes nous avons $h_n^{(A)} = (h^{(A)})^n$. Et de la même manière un morphisme $f : A \longrightarrow B$ dans $(\mathbf{Com}_{/\mathbb{N}})_{ab}$ est défini par une famille de morphismes de groupes abéliens $f_n : A_n \longrightarrow B_n$ vérifiant $f_{n+1} \circ h^{(A)} = h^{(B)} \circ f_n$.

Proposition 4.4. *Le module cotangent $\Omega_{\mathbb{N}}$ est l'objet de $(\mathbf{Com}_{/\mathbb{N}})_{ab}$ défini par*

1. $(\Omega_{\mathbb{N}})_0 = (0)$
2. $(\Omega_{\mathbb{N}})_n = \mathbb{Z}$ *et* $h^{(\Omega_{\mathbb{N}})} : (\Omega_{\mathbb{N}})_n \xrightarrow{id_{\mathbb{Z}}} (\Omega_{\mathbb{N}})_{n+1}$ *pour* $n \geq 1$.

Démonstration. Pour tout A dans $(\mathbf{Com}_{/\mathbb{N}})_{ab}$ l'ensemble $Hom_{\mathbf{Com}_{/\mathbb{N}}}(\mathbb{N}, A)$ est isomorphe au groupe abélien A_1. En effet un élément s_1 dans A_1 détermine un morphisme $s : \mathbb{N} \longrightarrow A$ avec $s_0 = 0_{A_0}$ et pour tout $n \geq 1$ $s_n = n(h^{(A)})^{n-1}(s_1)$.

Un morphisme $f : \Omega_{\mathbb{N}} \longrightarrow A$ dans $(\mathbf{Com}_{/\mathbb{N}})_{ab}$ est entièrement déterminé par le morphisme $f_1 : (\Omega_{\mathbb{N}})_1 \longrightarrow A_1$, en effet nous avons $f_0 = 0$ et $f_n = (h^{(A)})^n \circ f_1$ pour tout $n \geq 1$. Nous déduisons de l'égalité $(\Omega_{\mathbb{N}})_1 = \mathbb{Z}$ que le morphisme f_1 est défini par $f_1(1)$ et nous trouvons alors que l'ensemble $Hom_{(\mathbf{Com}_{/\mathbb{N}})_{ab}}(\Omega_{\mathbb{N}}, A)$ est aussi isomorphe au groupe abélien A_1.

□

4.3 Catégorie des anneaux commutatifs

Soient k un anneau commutatif et $\mathbf{Alg}_k$ la catégorie des k-algèbres commutatives, nous rappelons les définitions et les résulats suivants.

Soient A une k-algèbre et M un A-module, alors une *k-dérivation de A à valeurs dans M* est un morphisme de k-modules $d : A \longrightarrow M$ vérifiant la règle de Leibniz $d(aa') = ad(a') + a'd(a)$. Nous notons $Der_k(A, M)$ l'ensemble des k-dérivations.

Nous appelons *module des différentielles de Kähler* de A sur k le A-module $\Omega_{A/k}$ défini comme le A-module I/I^2, où nous notons I le noyau de la *multiplication* $m : A \otimes_k A \longrightarrow A$, et nous appelons d_A la k-dérivation à valeurs dans $\Omega_{A/k}$ définie par le morphisme qui envoie un élément a de A sur l'image de $1 \otimes a - a \otimes 1$ dans I/I^2.

Alors le foncteur

$$\begin{array}{cccc} Der_k(A, -) : & \mathbf{Mod}_A & \longrightarrow & \mathbf{Ens} \\ & M & \mapsto & Der_k(A, M), \end{array}$$

est représenté par le A-module $\Omega_{A/k}$, où l'isomorphisme naturel en M entre les ensembles $Hom_A(\Omega_{A/k}, M)$ et $Der_k(A, M)$ est défini par la composition par d_A.

Nous voulons comparer les notions introduites à la définition 3.5 avec les notions données ci-dessus.

Proposition 4.5. *Pour toute k-algèbre A la catégorie $\left(\mathbf{Alg}_{k/A}\right)_{ab}$ des objets en groupe abélien de $\mathbf{Alg}_{k/A}$ est équivalente à la catégorie $\mathbf{Mod}_A$ des A-modules.*

Démonstration. Soit B un objet de la catégorie $\left(\mathbf{Alg}_{k/A}\right)_{ab}$ des objets en groupe abélien de $\mathbf{Alg}_{k/A}$, nous avons alors le morphisme élément neutre $e_B : A \longrightarrow B$ et le morphisme composition pour la loi de groupe abélien $m_B : B \times_A B \longrightarrow B$. Comme le morphisme e_B est une section du morphisme $u_B : B \longrightarrow A$, nous en déduisons que B est isomorphe, en tant que A-module, à la somme directe $A \oplus M$ avec $M = Ker(\ u_B : B \longrightarrow A\ )$, et grâce à la proposition 3.9 appliquée à la loi de groupe commutatif sur un anneau nous trouvons que m_B est défini par $m_B(b_1, b_2) = b_1 + b_2 - e_B(a)$ avec $a = u_B(b_1) = u_B(b_2)$.

En appliquant l'égalité "$\mu_B \circ c_B = \mu_B \circ (\mu_B \times \mu_B) \circ \psi$" de la démonstration de la proposition 3.9 pour μ_B la multiplication dans B nous en déduisons que B est isomorphe à la k-algèbre $A \oplus M$ avec la structure de k-algèbre *extension de carré nul*, définie par $(a_1, m_1)(a_2, m_2) = (a_1a_2, a_1m_2 + a_2m_1)$.

Réciproquement nous pouvons associer ainsi à tout A-module M un objet en groupe abélien $B = A \oplus M$, et l'équivalence de catégories est alors une conséquence du corollaire 3.10.

□

Corollaire 4.6. *1) Pour tout A-module M l'ensemble des dérivations de Beck $Der_{\mathbf{Alg}_k}(A, B)$ de A à valeurs dans l'objet en groupe abélien $B = A \oplus M$ est égal à l'ensemble $Der_k(A, M)$ des dérivations de A à valeurs dans M.*

2) Le module cotangent rΩ_A est naturellement isomorphe à la k-algèbre $A \oplus \Omega_{A/k}$, extension de carré nul de A par le module $\Omega_{A/k}$ des différentielles de Kähler.

Démonstration. 1) D'après la remarque 3.6 il suffit de montrer que l'ensemble des sections $s : A \longrightarrow B$ du morphisme $u_B : B \longrightarrow A$ est en bijection canonique avec l'ensemble des dérivations $d : A \longrightarrow M$ de A à valeurs dans M, bijection donnée par l'égalité $s(a) = (a, d(m))$.

2) Par définition la k-algèbre Ω_A et le A-module $\Omega_{A/k}$ représentent respectivement les foncteurs $Der_{\mathbf{Alg}_k}(A, -)$ et $Der_k(A, -)$, par conséquent l'isomorphisme entre Ω_A et $A \oplus \Omega_{A/k}$ est une conséquence de la proposition 4.5 et du résultat précédent.

□

Nous retrouvons la définition classique du module des différentielles de Kähler Ω_A au dessus d'un anneau A, et les théorèmes 3.21, 3.22 et 3.23 sont des généralisations des résultats classiques de le théorie des modules des différentielles de Kähler.

Le théorème 3.21 est une généralisation de la première suite exacte fondamentale, résultat qui énonce que pour tout morphisme $f : A \longrightarrow B$ dans $\mathbf{Alg}_k$ nous avons une suite exacte de B-modules

$$\Omega_{A/k} \otimes_A B \xrightarrow{\delta_f} \Omega_{B/k} \longrightarrow \Omega_{B/A} \longrightarrow 0\ .$$

Le théorème 3.22 est une généralisation du résultat suivant concernant les épimorphismes $f : A \longrightarrow B$ dans $\mathbf{Alg}_k$. La classe des épimorphismes est engendrée par la classe des surjections $f : A \longrightarrow B$ avec $B = A/I$ où l'idéal I de A est le noyau de f, et la classe des localisations $f : A \longrightarrow B$ avec $B = S^{-1}A$ où S est une partie multiplicative de A.

Alors la *deuxième suite exacte fondamentale* énonce que pour toute surjection $f : A \longrightarrow B = A/I$ nous avons une suite exacte de B-modules

$$I/I^2 \longrightarrow \Omega_{A/k} \otimes_A B \xrightarrow{\delta_f} \Omega_{B/k} \longrightarrow 0 \ ,$$

et la compatibilité des modules des différentielles avec la localisation énonce que pour toute localisation $f : A \longrightarrow B = S^{-1}A$ nous avons un isomorphisme de B-modules

$$\delta_f : \Omega_{A/k} \otimes_A B \xrightarrow{\simeq} \Omega_{B/k} \ .$$

Nous en déduisons que pour tout épimorphisme $f : A \longrightarrow B$ l'application $\delta_f : \Omega_{A/k} \otimes_A B \longrightarrow \Omega_{B/k}$ est un épimorphisme dans $\mathbf{Mod}_B$.

Enfin le théorème 3.23 est la généralisation du fait que les modules de différentielles de Kähler commutent avec *l'extension des scalaires*, soient A une k-algèbre, $f : k \longrightarrow k'$ un morphisme d'anneaux et $A' = A \otimes_k k'$, alors nous avons l'isomorphisme de A'-modules

$$\Omega_{A/k} \otimes_A A' \xrightarrow{\simeq} \Omega_{A'/k'} \ .$$

Pour finir nous pouvons faire la remarque suivante.

Remarque 4.7. Comme la catégorie $(\mathbf{Alg}_{k/A})_{ab}$ est équivalente à la catégorie $\mathbf{Mod}_A$, elle est indépendante de l'anneau de base k. C'est une traduction du (2) de la proposition 3.15.

Références

[Ba 1] M. Barr : *Acyclic Models*, Number 17 in CRM Monograph Series. American Math. Soc., 2002.

[Ba 2] M. Barr : Beck modules for monoids. Notes for the talk at **McGill Seminar on Logic, Category Theory, and Computation** the 24 october 2017, www.math.mcgill.ca/˜rags/seminar/Barr-241017-beckmod.pdf

[Ba-Be] M. Barr et J.M. Beck : Acyclic models and triples. Proceedings of the Conference on categorical Algebras, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, NewYork, pages 336-343, 1966.

[Be] J.M. Beck : Triples, Algebras and Cohomologies. Dissertation Columbia University and TAC reprints 2, 59 pp.

[Bo] F. Borceux : Handbook of Categorical Algebra 2, Categories and Structures, Cambridge University Press, 2013.

[Bo-Bo] F. Borceux et D. Bourn : Mal'cev, Protomodular, Homological and Semi-Abelian Categories. Mathematics and its Applications. Springer Science + Business Media, 2004.

[Fr] M. Frankland : Fibered categories of Beck modules (2010), https ://uregina.ca/˜franklam/ Frankland_BeckModules_20100411 .pdf

[Iy] S. Iyengar : André-Quillen homology of commutative algebras. In Interactions between Homotopy Theory and Algebra (Contemp. Math., 436), pages 203-234. AMS 2007.

[Ma] G. Maltsiniotis : Carrés exacts homotopiques, et dérivateurs, Cahiers de Topologie et Géométrie Différentielle Catégoriques, 53 (1), pp. 3-63 (2012).

[Po] H.-E. Porst : Free Internal Groups. Appl. Categor. Struct. 20, pages 31-42 (2012).

[Qu] D.G. Quillen : On the (co-)homology of commutative rings. In Applications of Categorical Algebra (Proc. Sympos. Pure Math., Vol. XVII, New York, 1968), pages 65–87. AMS, 1970.

Michel Vaquié
Institut de Mathématiques de Toulouse UMR 5219
CNRS, Université de Toulouse
118 route de Narbonne

F-31062 Toulouse Cedex 9, France
michel.vaquie@math.univ-toulouse.fr