



# UNE GÉNÉRALISATION DU LEMME DE YONEDA

*Jacques PENON*

**Résumé.** Dans le cadre des catégories mutantes sur une catégorie monoïdale symétrique  $\mathbb{V}$ , voir [4], on généralise le lemme de Yoneda classique. On montre aussi que le lemme de Yoneda enrichi peut être déduit du cas mutant. On construit encore un plongement de Yoneda qui est un foncteur mutant pleinement fidèle (justifiant ainsi le terme de plongement) vers une catégorie mutante de foncteurs mutants. Toutes les constructions nécessaires à ces résultats se font sans condition particulière pour la catégorie monoïdale  $\mathbb{V}$  contrairement au cas enrichi.

**Abstract.** In the context of mutant categories over a symmetric monoidal category  $\mathbb{V}$ , see [4], we generalize the classical Yoneda lemma. We also show that the enriched Yoneda lemma can be deduced from the mutant case. We also construct a Yoneda embedding which is a full and faithful mutant functor (thus justifying the term embedding) towards a mutant category of mutant functors. All the constructions necessary for these results are done without any special condition for the monoidal category  $\mathbb{V}$  unlike the enriched case.

**Keywords.** Monoidal category. Enriched category. Bicategory.

**Mathematics Subject Classification (2020).** 18D20.

## Introduction

• Le Lemme de Yoneda, en théorie des catégories, occupe une place centrale. Il est, entre autre, à la base de la théorie des faisceaux pour Grothendieck et son école. Depuis, plusieurs généralisations du Lemme sont venues encore étendre sa portée. Nombre d'entre elles, finalement, se sont avérés des cas particuliers du lemme de Yoneda enrichi. Celle que nous proposons

ici est encore une généralisation du cas enrichi. Outre cette généralisation, elle permet aussi d'éviter les conditions préalables, portant sur la catégorie monoïdale de base (comme d'être fermée et complète) nécessaires à sa formulation.

• Nous nous plaçons ici dans le cadre des catégories mutantes sur une catégorie monoïdale symétrique  $\mathbb{V}$  donnée (voir [2] et [4]). Le concept de catégorie mutante est une généralisation de différents concepts d'enrichissement par  $\mathbb{V}$  dont : Les catégories enrichies dans  $\mathbb{V}$  proprement dites (encore appelées  $\mathbb{V}$ -catégories), les catégories  $\mathbb{V}$ -tensorisées (et même les  $\mathbb{V}$ -prétensorisées) et les catégories  $\mathbb{V}$ -cotensorisées (ou encore les  $\mathbb{V}$ -précotensorisées). Toutes ces structures ont été étudiées dans [3]. On rappelle ici, à la section 1, tout ce qui est à savoir, pour notre généralisation du Lemme, sur les catégories mutantes et ses différentes classes d'exemples.

• Nous aurons encore besoin d'autres outils pour arriver à notre théorème central (la généralisation du Lemme de Y.). Afin de donner un fil conducteur à ces différents outils et leurs propriétés, donnons l'expression du plongement de Yoneda mutant :

$$\mathcal{M} \xrightarrow{yon} \mathbb{V}\text{-}\mu(\mathcal{M}^{op}, \hat{\mathcal{V}})$$

où ...

- $\mathbb{V}$  est une catégorie monoïdale symétrique fixée,
- $\mathcal{M}$  est une catégorie mutante sur  $\mathbb{V}$  quelconque,
- $yon$  est le plongement de Yoneda mutant. C'est un foncteur mutant (voir la définition 1.2) qui est pleinement fidèle (voir la définition 2.2 pour la pleine fidélité). Sa construction est réalisée à la section 6.
- Plus généralement, lorsque  $\mathcal{M}$  et  $\mathcal{N}$  sont des catégories mutantes sur une catégorie monoïdale symétrique  $\mathbb{V}$  on construit la catégorie mutante  $\mathbb{V}\text{-}\mu(\mathcal{M}, \mathcal{N})$  dont les objets sont les foncteurs mutants de  $\mathcal{M}$  dans  $\mathcal{N}$  (voir la section 4). Lorsque  $\mathcal{M}$  et  $\mathcal{N}$  sont de saveur E (c.a.d. proviennent de catégories enrichies - par exemple  $\mathbb{M}$  et  $\mathbb{N}$ ). Mais aussi lorsque  $\mathbb{V}$  est fermée, complète et  $|\mathbb{M}|$  petit,  $\mathbb{V}\text{-}\mu(\mathcal{M}, \mathcal{N})$  est elle-même de saveur E. La catégorie enrichie qu'elle produit n'est autre que  $\mathbb{V}[\mathbb{M}, \mathbb{N}]$  c.a.d. celle des  $\mathbb{V}$ -foncteurs et  $\mathbb{V}$ -transformations naturelles de  $\mathbb{M}$  dans  $\mathbb{N}$  (voir [1]).
- $\mathcal{M}^{op}$ , la catégorie mutante opposée à  $\mathcal{M}$  est définie à la section 3. C'est un cas particulier d'une construction générale appelée "changement de base d'une catégorie mutante".

-  $\hat{\mathcal{V}} = \mu c(\hat{\mathbb{V}})$  où  $\mu c : \mathbb{V}\text{-precot} \rightarrow \text{Cat}\mu(\mathbb{V})$  est un 2-foncteur (construit dans [4] et rappelé à la section 1) transformant une catégorie  $\mathbb{V}$ -précotensorisée en une catégorie mutante (sur  $\mathbb{V}$ ).  $\hat{\mathbb{V}}$  est la catégorie des préfaisceaux sur  $\mathbb{V}$  munie canoniquement d'une structure de catégorie  $\mathbb{V}$ -cotensorisée. (voir la section 2, où  $\mathbb{V}$  est remplacée, plus généralement, par une catégorie  $\mathbb{V}$ -prétensorisée).

- Lorsque  $\mathcal{M}$  est de saveur  $E$ , on peut construire un foncteur mutant  $\mathcal{M} \xrightarrow{y_o} \mathbb{V}\text{-}\mu(\mathcal{M}^{op}, \mathcal{V})$  où  $\mathcal{V}$  est la catégorie mutante canonique associée à  $\mathbb{V}$  et on obtient le triangle commutatif à isomorphisme près suivant :

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{M} & \\ y_o \swarrow & & \searrow y_{on} \\ \mathbb{V}\text{-}\mu(\mathcal{M}^{op}, \mathcal{V}) & \xrightarrow{\quad can \quad} & \mathbb{V}\text{-}\mu(\mathcal{M}^{op}, \hat{\mathcal{V}}) \end{array}$$

où la flèche horizontale est un foncteur mutant pleinement fidèle (voir la section 7) construit à partir du foncteur mutant (pleinement fidèle)

$\mu t(\mathbb{V}) \xrightarrow{\mu y} \mu c(\hat{\mathbb{V}})$  (voir la section 2). Lorsque  $\mathbb{V}$  est fermée et complète et  $|\mathcal{M}|$  petit  $y_o$  peut s'identifier au plongement de Yoneda enrichi habituel (voir la proposition 5.2).

- On arrive enfin au Lemme de Yoneda mutant. En fait celui-ci se rapproche plus du Lemme de Y. classique que de sa version enrichie qui s'exprime de façon interne. Par rapport au cas classique il a surtout un degré de liberté supplémentaire. Précisément, si on note  $\hat{\mathcal{M}} = \mathbb{V}\text{-}\mu(\mathcal{M}^{op}, \hat{\mathcal{V}})$  et si on considère un foncteur mutant  $F : \mathcal{M}^{op} \rightarrow \hat{\mathcal{V}}$  quelconque et un objet  $X \in |\mathcal{M}|$ , il s'écrit :  $\hat{\mathcal{M}}(yon(X), F) \simeq \mathbb{C}_X$  où  $\mathbb{C}_X \xrightarrow{U} \mathbb{V}$  est la fibration discrète associée à  $F(X)$  (qui est un préfaisceau). Comme dans le cas classique cela permet de constater que le foncteur mutant  $yon : \mathcal{M} \rightarrow \hat{\mathcal{M}}$  est pleinement fidèle (d'où l'expression "plongement" le désignant).

• Avant de finir cette introduction nous voudrions signaler que lorsque nous nous référons à la théorie, maintenant bien connue, des catégories enrichies, nous avons opté pour nous rapporter de façon précise à un unique ouvrage, à savoir le livre de F. Borceux (voir [1]) et d'utiliser si possible ses notations.

### Remerciements

Nous tenons à remercier l'université du Littoral à Calais et, en particulier, Isar Stubbe l'organisateur du SIC d'octobre 2023 où celui-ci s'y déroulait, pour nous avoir offert la possibilité d'exposer les grandes lignes du travail consigné ici.

## 1. Généralités

• On se place dans le contexte des catégories mutantes. Pour cela quelques rappels s'imposent (voir [4]).

**Définition 1.1.** : (voir aussi [2] sous la dénomination de bicatégorie graduée)  $\mathbb{V}$  étant une catégorie monoïdale fixée quelconque, une *catégorie mutante sur  $\mathbb{V}$*  est la donnée:

- d'une bicatégorie  $\mathcal{M}$ ,
- d'un morphisme strict de bicatégorie  $U : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{V}^b$  (où  $\mathbb{V}^b$  est  $\mathbb{V}$  vue comme une bicatégorie à un seul objet, noté  $\star$ , (alors  $Ob(\mathbb{V}^b) = \{\star\}$ ,  $Fl(\mathbb{V}^b) = Ob(\mathbb{V})$ ,  $2-Cell(\mathbb{V}^b) = Fl(\mathbb{V})$ )).

Ces données satisfont l'unique axiome suivant:

(CM) Pour tout  $X, Y \in |\mathcal{M}|$ ,

$U_{XY} : \mathcal{M}(X, Y) \rightarrow \mathbb{V}^b(UX, UY) = \mathbb{V}^b(\star, \star) = \mathbb{V}$  est une fibration discrète.

Dans la suite, une catégorie mutante est désignée par sa bicatégorie sous-jacente. On note  $\otimes$  la composition horizontale et par un point la composition verticale (en accord avec les compositions dans  $\mathbb{V}^b$ ).

**Définition 1.2.** : Un *foncteur mutant*  $\Phi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  est la donnée d'un morphisme strict de bicatégorie faisant commuter le triangle suivant:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M} & \xrightarrow{\Phi} & \mathcal{N} \\ & \searrow U & \swarrow U \\ & \mathbb{V}^b & \end{array}$$

**Définition 1.3.** : Entre deux foncteurs mutants  $\Phi, \Psi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ , une *transformation naturelle mutante*  $t : \Phi \rightarrow \Psi$  est la donnée d'une famille de flèches  $(\Phi(X) \xrightarrow{t_X} \Psi(X))_{X \in |\mathcal{M}|}$  de  $\underline{\mathcal{N}}$  (la catégorie sous-jacente à  $\mathcal{N}$  - voir la définition 1.5, plus loin) telle que, pour toute flèche  $X \xrightarrow{f} Y$  de  $\mathcal{M}$  le carré suivant commute strictement dans  $\mathcal{N}$  :

$$\begin{array}{ccc} \Phi(X) & \xrightarrow{t_X} & \Psi(X) \\ \Phi(f) \downarrow & & \downarrow \Psi(f) \\ \Phi(Y) & \xrightarrow{t_Y} & \Psi(Y) \end{array}$$

c.a.d.  $\Psi(f)t_X = t_Y\Phi(f)$  (où les compositions ici sont strictes - voir plus loin leurs définitions)

• Catégories mutantes (sur  $\mathbb{V}$ ), foncteurs mutants et transformations naturelles mutantes forment une 2-catégorie notée  $Cat\mu(\mathbb{V})$ .

**Exemples 1.4.** : On distingue principalement trois classes d'exemples de catégories mutantes.

**- Les catégories enrichies dans  $\mathbb{V}$ :**

$\mathbb{C}$  étant une catégorie enrichie dans  $\mathbb{V}$ , on lui associe la catégorie mutante (sur  $\mathbb{V}$ )  $\mu e(\mathbb{C})$ , pour laquelle...

..  $|\mu e(\mathbb{C})| = |\mathbb{C}|$ ,

.. Pour tout  $X, Y \in |\mu e(\mathbb{C})|$ ,  $\mu e(\mathbb{C})(X, Y) = \mathbb{V}/\mathbb{C}(X, Y)$ ,

.. La composition des flèches de  $\mu e(\mathbb{C})$  est donnée, pour un tel couple

$X \xrightarrow{(A,f)} Y \xrightarrow{(B,g)} Z$  par  $(X \xrightarrow{(B,g) \otimes (A,f)} Z) = (X \xrightarrow{(B \otimes A, g \circ f)} Z)$  où

$g \circ f = (B \otimes A \xrightarrow{g \otimes f} \mathbb{C}(Y, Z) \otimes \mathbb{C}(X, Y) \xrightarrow{comp} \mathbb{C}(X, Z))$ ,

.. L'identité pour la loi  $\otimes$  est donnée, pour  $X \in |\mathbb{C}|$ , par

$Id_X = (I, I \xrightarrow{id_X} \mathbb{C}(X, X))$ ,

.. La composition verticale des 2-cellules est la composition dans  $\mathbb{V}$ ,

.. La composition horizontale des 2-cellules est le produit tensoriel dans  $\mathbb{V}$ ,

..  $U : \mu e(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{V}^b$  est donné sur les flèches par  $U(A, f) = A$ .

**- Les catégories  $\mathbb{V}$ -tensorisées** (et plus généralement les catégories  $\mathbb{V}$ -prétensorisées):

où une *catégorie  $\mathbb{V}$ -tensorisées* est la donnée d'une catégorie  $\mathbb{E}$  munie d'un foncteur "produit tensoriel extérieur"  $\mathbb{V} \times \mathbb{E} \xrightarrow{\wedge} \mathbb{E}$  pour lequel,

.. Pour tout  $X \in |\mathbb{E}|$ ,  $I \wedge X \simeq X$  (cet isomorphisme est noté  $s_X$ ),

.. Pour tout  $X \in |\mathbb{E}|$ , pour tout  $A, B \in \mathbb{V}$ ,  $(B \otimes A) \wedge X \simeq B \wedge (A \wedge X)$  (cet isomorphisme est noté  $am_{B,A,X}$ ).

Ces isomorphismes étant naturels et vérifiant des axiomes de cohérence (voir [3])(dans le cas des catégories  $\mathbb{V}$ -prétensorisées  $am_{B,A,X}$  n'est plus nécessairement un isomorphisme).

La catégorie mutante associée, notée  $\mu t(\mathbb{E})$ , se décrit comme suit :

..  $|\mu t(\mathbb{E})| = |\mathbb{E}|$ ,

.. Pour  $X, Y \in |\mathbb{E}|$ , une flèche  $X \rightarrow Y$  dans  $\mu t(\mathbb{E})$ , est un couple  $(A, f)$  où  $A \in \mathbb{V}$  et  $A \wedge X \xrightarrow{f} Y$  est une flèche de  $\mathbb{E}$ ,

.. Pour deux flèches  $(A, f), (A', f') : X \rightarrow Y$ , une 2-cellule  $a : (A, f) \rightarrow (A', f')$  dans  $\mu t(\mathbb{E})$  est une flèche  $a : A \rightarrow A'$  de  $\mathbb{V}$  rendant commutatif le triangle suivant dans  $\mathbb{E}$ :

$$\begin{array}{ccc} A \wedge X & \xrightarrow{a \wedge Id} & A' \wedge X \\ & \searrow f & \swarrow f' \\ & Y & \end{array}$$

.. La composition des flèches de  $\mu t(\mathbb{E})$  est donnée, pour

$X \xrightarrow{(A,f)} Y \xrightarrow{(B,g)} Z$ , par  $(B, g) \otimes (A, f) = (B \otimes A, g \circ f)$  où

$g \circ f = ((B \otimes A) \wedge X \xrightarrow{am} B \wedge (A \wedge X) \xrightarrow{Id \wedge f} B \wedge Y \xrightarrow{g} Z)$

.. L'identité pour la loi  $\otimes$  est donnée, pour  $X \in |\mathbb{E}|$ , par

$Id_X = (I, I \wedge X \xrightarrow{s_X} X)$

.. Le reste de la description de  $\mu t(\mathbb{E})$  est essentiellement comme celle de  $\mu e(\mathbb{C})$ .

.. Dans ([3]) on donne de nombreux exemples de catégories  $\mathbb{V}$ -tensorisées et même  $\mathbb{V}$ -prétensorisées.

- **Les catégories  $\mathbb{V}$ -cotensorisées** (et plus généralement les catégories  $\mathbb{V}$ -précotensorisées):

où une *catégorie  $\mathbb{V}$ -cotensorisée* est la donnée d'une catégorie  $\mathbb{E}$  munie d'un foncteur "Exponentiel"  $\mathbb{E} \times \mathbb{V}^{op} \xrightarrow{Exp} \mathbb{E}$  (on note  $X^A = Exp(X, A)$ ) pour lequel...

.. Pour tout  $X \in |\mathbb{E}|$ ,  $X \simeq X^I$  (cet isomorphisme est noté  $\sigma_X$ ),

.. Pour tout  $X \in |\mathbb{E}|$ , pour tout  $A, B \in \mathbb{V}$ ,  $(X^A)^B \simeq X^{A \otimes B}$  (cet isomorphisme est noté  $\alpha m_{X,A,B}$ )

Ces isomorphismes étant naturels et vérifiant des axiomes de cohérence (voir [3]) (Dans le cas des catégories  $\mathbb{V}$ -précotensorisées  $\alpha m_{X,A,B}$  n'est plus nécessairement un isomorphisme).

La catégorie mutante associée, notée  $\mu c(\mathbb{E})$ , se décrit comme suit :

..  $|\mu c(\mathbb{E})| = |\mathbb{E}|$ ,

.. Pour  $X, Y \in |\mathbb{E}|$ , une flèche  $X \rightarrow Y$  dans  $\mu c(\mathbb{E})$ , est un couple  $(A, f)$  où  $A \in |\mathbb{V}|$  et  $X \xrightarrow{f} Y^A$  est une flèche de  $\mathbb{E}$ .

.. Pour deux flèches  $(A, f), (A', f') : X \rightarrow Y$ , une 2-cellule  $a : (A, f) \rightarrow (A', f')$  dans  $\mu c(\mathbb{E})$  est une flèche  $a : A \rightarrow A'$  de  $\mathbb{V}$  rendant commutatif le triangle suivant dans  $\mathbb{E}$ :

$$\begin{array}{ccc} & X & \\ f' \swarrow & & \searrow f \\ Y^{A'} & \xrightarrow{Id^a} & Y^A \end{array}$$

.. La composition des flèches de  $\mu c(\mathbb{E})$  est donnée, pour

$X \xrightarrow{(A,f)} Y \xrightarrow{(B,g)} Z$ , par  $(B, g) \otimes (A, f) = (B \otimes A, g \circ f)$  où

$g \circ f = (X \xrightarrow{f} Y^A \xrightarrow{g^{Id}} (Z^B)^A \xrightarrow{\alpha m} Z^{B \otimes A})$

.. L'identité pour la loi  $\otimes$  est donnée, pour  $X \in |\mathbb{E}|$ , par

$Id_X = (I, X \xrightarrow{\sigma_X} X^I)$

.. Le reste de la description de  $\mu c(\mathbb{E})$  est essentiellement comme celle de  $\mu e(\mathbb{C})$  et  $\mu t(\mathbb{E})$ .

.. Au paragraphe suivant nous donnons un exemple général de catégories  $\mathbb{V}$ -cotensorisées (et même  $\mathbb{V}$ -précotensorisées).

.. Dans [4] une autre classe d'exemples de catégories mutantes est donnée.

• En plus des catégories enrichies dans  $\mathbb{V}$ , les catégories  $\mathbb{V}$ -tensorisées (resp.  $\mathbb{V}$ -prétensorisées) et les catégories  $\mathbb{V}$ -cotensorisées (resp.  $\mathbb{V}$ -précotensorisées) forment des 2-catégories qui sont notées  $\mathbb{V}\text{-Tens}$  (resp.  $\mathbb{V}\text{-Pretens}$ ) et  $\mathbb{V}\text{-Cotens}$  (resp.  $\mathbb{V}\text{-Precot}$ ).

Pour la description détaillée de ces 2-catégories nous renvoyons à [4]. La 2-catégorie des catégories enrichies dans  $\mathbb{V}$  est notée, comme souvent,  $\mathbb{V}\text{-Cat}$ .

Il y a trois 2-foncteurs canoniques  $\mu_e : \mathbb{V}\text{-Cat} \rightarrow \text{Cat}\mu(\mathbb{V})$ ,  
 $\mu_t : \mathbb{V}\text{-Pretens} \rightarrow \text{Cat}\mu(\mathbb{V})$ ,  $\mu_c : \mathbb{V}\text{-Precot} \rightarrow \text{Cat}\mu(\mathbb{V})$  qui sont 2-pleinement fidèles.

### La composition stricte dans une catégorie mutante

Fixons ici une catégorie mutante  $\mathcal{M}$  sur  $\mathbb{V}$ .

- Étant donné un couple de flèches composables dans  $\mathcal{M} : X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ ,  
 .. Si  $U(g) = I$  et  $U(f) = A$ , on pose  $gf = (u_g^{-1})^*(g \otimes f)$  (où  $I \otimes A \xrightarrow{u_g} A$  est la flèche unité à gauche) dans la fibration discrète  $\mathcal{M}(X, Z) \xrightarrow{U_{XZ}} \mathbb{V}$ .

.. SI  $U(g) = A$  et  $U(f) = I$ , on pose  $gf = (u_d^{-1})^*(g \otimes f)$  (où  $A \otimes I \xrightarrow{u_d} A$  est la flèche unité à droite) dans la fibration discrète  $\mathcal{M}(X, Z) \xrightarrow{U_{XZ}} \mathbb{V}$ .

Dans les deux cas,  $gf$  est appelé le *composé strict* de  $g$  par  $f$ .

- La composition stricte a les propriétés suivantes :

.. Pour  $X \xrightarrow{f} Y$  dans  $\mathcal{M}$ ,  $fId_X = f = Id_Y f$ .

.. Pour  $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} T$  dans  $\mathcal{M}$ , on a  $(hg)f = h(gf)$  lorsque deux des trois flèches sont au moins d'image  $I$  par  $U$ .

.. Dans le cas où seule une des flèches est au moins d'image  $I$  par  $U$  on a :

...  $(h \otimes g)f = h \otimes (gf)$  (quand  $U(f) = I$ ),

...  $(hg) \otimes f = h \otimes (gf)$  (quand  $U(g) = I$ ),

...  $(hg) \otimes f = h(g \otimes f)$  (quand  $U(h) = I$ ).

**Définition 1.5.** On appelle *catégorie sous-jacente* à  $\mathcal{M}$  (et on la note  $\underline{\mathcal{M}}$  la catégorie dont:

- Les objets sont ceux de  $\mathcal{M}$ ,

- Les flèches sont celles de  $\mathcal{M}$  s'envoyant sur  $I$  par  $U$ .

La composition dans  $\underline{\mathcal{M}}$  est la composition stricte.

On construit un 2-foncteur canonique  $\text{Cat}\mu(\mathbb{V}) \xrightarrow{Oub} \mathbb{C}at$  où  $Oub(\mathcal{M}) = \underline{\mathcal{M}}$ .

### Les saveurs d'une catégorie mutante

$\mathcal{M}$  étant une catégorie mutante sur  $\mathbb{V}$ , on construit un foncteur

$Tri_{\mathcal{M}} : \mathbb{V}^{op} \times \underline{\mathcal{M}}^{op} \times \underline{\mathcal{M}} \rightarrow \mathbb{E}ns$  (où simplement  $Tri$ ). Il est défini

- sur un objet  $(A, X, Y)$  par

$Tri(A, X, Y) = \{f \in |\mathcal{M}(X, Y)| / U_{XY}(f) = A\}$ ,

- sur une flèche  $(a, x, y) : (A, X, Y) \rightarrow (A', X', Y')$ ,  $Tri(a, x, y)$  est l'application composée suivante :

$$Tri(A, X, Y) \xrightarrow{a^*(-)} Tri(A', X, Y) \xrightarrow{(-)^x} Tri(A', X', Y) \xrightarrow{y(-)} Tri(A', X', Y')$$

La première application provient de la fibration discrète

$U_{XY} : \mathcal{M}(X, Y) \rightarrow \mathbb{V}$ . Les deux suivantes résultent de la composition stricte dans  $\mathcal{M}$ .

**Définition 1.6.** On dit que  $\mathcal{M}$  est de *saveur*...

1) *enrichie* (ou simplement *de saveur E* si :

Pour tout  $X, Y \in |\mathcal{M}|$ ,  $Tri(-, X, Y) : \mathbb{V}^{op} \rightarrow \mathbb{E}ns$  est représentable,

2) *tensorisée* (ou simplement *de saveur T*) si :

Pour tout  $A \in |\mathbb{V}|$  et  $X \in |\mathcal{M}|$ ,  $Tri(A, X, -) : \underline{\mathcal{M}} \rightarrow \mathbb{E}ns$  est co-représentable,

3) *cotensorisée* (ou simplement *de saveur C*) si :

Pour tout  $A \in |\mathbb{V}|$  et  $Y \in |\mathcal{M}|$ ,  $Tri(A, -, Y) : \underline{\mathcal{M}}^{op} \rightarrow \mathbb{E}ns$  est représentable,

**Proposition 1.7.** 1) Si  $\mathcal{M}$  est de saveur E, alors il existe une catégorie enrichie  $\mathcal{M}^e$  telle que  $\mu e(\mathcal{M}^e) \simeq \mathcal{M}$ .

2) Si  $\mathcal{M}$  est de saveur T, alors il existe une catégorie prétensorisée  $\mathcal{M}^t$  telle que  $\mu t(\mathcal{M}^t) \simeq \mathcal{M}$ .

3) Si  $\mathcal{M}$  est de saveur C, alors il existe une catégorie précotensorisée  $\mathcal{M}^c$  telle que  $\mu c(\mathcal{M}^c) \simeq \mathcal{M}$ .

**Remarque 1.8.** On se sert de cette proposition pour montrer que les trois 2-foncteurs  $\mu e$ ,  $\mu t$  et  $\mu c$  sont 2-pleinement fidèles.

### Critère d'existence des catégories et foncteurs mutants

**Remarque 1.9.** Ce qui suit n'est pas un rappel mais, les propositions qui y figurent ne présentant pas de difficulté particulières, leur démonstrations ont été omises (elles utilisent principalement la structure de fibration discrète qui, remarquons le, est essentiellement graphique).

Pour construire les 2-foncteurs  $\mu e$ ,  $\mu t$  et  $\mu c$  il est utile d'utiliser les propositions suivantes destinées à nous faciliter la tâche.

**Proposition 1.10.**  $\mathbb{V}$  étant fixé, considérons les données suivantes :

- 1) Un 2-magma  $\mathcal{M}$ ,
- 2) un morphisme strict de 2-magma  $U : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{V}$  (où  $\mathbb{V}$  désigne le 2-magma sous-jacent à la bicatégorie  $\mathbb{V}^b$ ),
- 3) trois familles de 2-cellules de  $\mathcal{M}$  :

$$((x \otimes y) \otimes z \xrightarrow{Ass_{xyz}} x \otimes (y \otimes z))_{(x,y,z) \in Comp}$$

$$(x \otimes Id_X \xrightarrow{U_{dx}} x)_{x \in Fl} \quad , \quad (Id_{X'} \otimes x \xrightarrow{U_{gx}} x)_{x \in Fl}$$

où  $Fl$  est l'ensemble des flèches  $X \xrightarrow{x} X'$  de  $\mathcal{M}$  et  $Comp$  est l'ensemble des triplets  $T \xrightarrow{z} Z \xrightarrow{y} Y \xrightarrow{x} X$  de flèches de  $\mathcal{M}$  composables.

Ces trois données devant satisfaire les conditions suivantes :

(PCM1) Pour tout  $X, Y \in |\mathcal{M}|$ ,  $U_{XY} : \mathcal{M}(X, Y) \rightarrow \mathbb{V}$  est une fibration discrète,

(PCM2)  $U(Ass_{xyz}) = ass_{Ux, Uy, Uz}$ ,  $U(U_{dx}) = u_{dUx}$ ,  $U(U_{gx}) = u_{gUx}$ .

Alors il existe une unique structure de catégorie mutante  $\mathcal{M}$  (sur  $\mathbb{V}$ ) prolongeant les données précédentes.

**Proposition 1.11.** Soient  $\mathcal{M}$  et  $\mathcal{N}$  deux catégories mutantes sur  $\mathbb{V}$ . Notons  $\mathcal{M}$  et  $\mathcal{N}$  les 2-graphes sous-jacents à  $\mathcal{M}$  et  $\mathcal{N}$ . Soit maintenant  $F : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  un morphisme de 2-graphe tel que :

- 1) le triangle suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M} & \xrightarrow{F} & \mathcal{N} \\ \downarrow U & & \downarrow U \\ \mathbb{V}^b & & \mathbb{V}^b \end{array}$$

- 2) Pour tout  $X \in |\mathcal{M}|$ ,  $F(Id_X) = Id_{F(X)}$ ,

- 3) Pour tout couple de flèches composables  $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$  de  $\mathcal{M}$ ,  $F(g \otimes f) = F(g) \otimes F(f)$ .

Alors  $F$  est un foncteur mutant de  $\mathcal{M}$  dans  $\mathcal{N}$ .

**Corollaire 1.12.** Soient  $\mathcal{M}$  et  $\mathcal{N}$  deux catégories mutantes sur  $\mathbb{V}$ . Alors  $\mathcal{M} = \mathcal{N}$  ssi

- 1)  $\mathcal{M} = \mathcal{N}$
- 2)  $(\mathcal{M} \xrightarrow{\sim} \mathbb{V}^b) = (\mathcal{N} \xrightarrow{\sim} \mathbb{V}^b)$
- 3) Pour tout  $X \in |\mathcal{M}|$ ,  $Id_X^{\mathcal{M}} = Id_X^{\mathcal{N}}$  (où  $Id_X^{\mathcal{M}}$  est l'identité de  $X$  pour  $\mathcal{M}$ )
- 4) Pour tout couple de flèches composables  $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$  de  $\mathcal{M}$ ,  
 $g \otimes_{\mathcal{M}} f = g \otimes_{\mathcal{N}} f$  (où  $g \otimes_{\mathcal{M}} f$  est la composition des flèches dans  $\mathcal{M}$ ).

**Proposition 1.13.** Soit  $F : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  un foncteur mutant. Alors  $F$  est un isomorphisme ssi :

- 1)  $|F| : |\mathcal{M}| \rightarrow |\mathcal{N}|$  est bijectif,
- 2) Pour tout  $X, X' \in |\mathcal{M}|$ ,  $|F_{XX'}| : |\mathcal{M}(X, X')| \rightarrow |\mathcal{N}(FX, FX')|$ , est bijectif.

**Proposition 1.14.** Soit  $t : F \rightarrow G : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  une transformation naturelle mutante. Si pour tout  $X \in |\mathcal{M}|$ , la flèche  $F(X) \xrightarrow{t_X} G(X)$  est inversible dans  $\mathcal{N}$  alors  $t$  est inversible.

## 2. Un exemple de catégorie cotensorisée

• L'article [3] manque d'exemple authentique de catégorie cotensorisée. C'est à dire que leur catégorie mutante associée ne provienne pas de  $\mathbb{V}\text{-Cat}$  ou de  $\mathbb{V}\text{-Pretens}$ . Nous allons maintenant combler cette lacune en proposant un exemple authentique de catégorie cotensorisée. Il nous sera utile dans la suite.

• Commençons par fixer une catégorie  $\mathbb{C}$  et une catégorie  $\mathbb{V}$ -prétensorisée  $\mathbb{E}$ . On va maintenant munir la catégorie  $\bar{\mathbb{E}} = [\mathbb{E}^{op}, \mathbb{C}]$  d'une structure de catégorie  $\mathbb{V}$ -précotensorisée.

- Pour  $A \in |\mathbb{V}|$ ,  $F \in |\bar{\mathbb{E}}|$  alors  $F^A$  est le foncteur  $F(A \wedge -) : \mathbb{E}^{op} \rightarrow \mathbb{C}$ .

- Pour une flèche  $A' \xrightarrow{a} A$  de  $\mathbb{V}$ ,  $F^a : F^A \rightarrow F^{A'}$  est la transformation naturelle  $F(a \wedge -) : F(A \wedge -) \rightarrow F(A' \wedge -)$ .

- Pour une flèche  $F \xrightarrow{t} F'$  de  $\bar{\mathbb{E}}$  et  $A \in |\mathbb{V}|$ , on a la transformation naturelle  $(F^A \xrightarrow{t^A} F'^A) = (F(A \wedge -) \xrightarrow{t_{A \wedge -}} F'(A \wedge -))$ .

On regroupe tous ces cas particuliers dans le cas général suivant. Pour une

flèche  $(t, a) : (F, A) \rightarrow (F', A')$  de  $\bar{\mathbb{E}} \times \mathbb{V}^{op}$ ,  $t^a : F^A \rightarrow F'^{A'}$  est la transformation naturelle composée suivante :

$$(F^A \xrightarrow{F^a} F^{A'} \xrightarrow{t^{A'}} F'^{A'}) = (F^A \xrightarrow{t^A} F'^A \xrightarrow{F'^a} F'^{A'})$$

On construit ainsi un foncteur  $Exp : \bar{\mathbb{E}} \times \mathbb{V}^{op} \rightarrow \bar{\mathbb{E}}$ .

- On construit ensuite :

.. Pour chaque  $F \in |\bar{\mathbb{E}}|$ , l'isomorphisme  $F \xrightarrow{\sigma_F} F^I$  en posant, pour chaque  $X \in |\bar{\mathbb{E}}|$ ,  $(\sigma_F)_X = (F(X) \xrightarrow{F(s_X)} F(I \wedge X))$ ,

.. Pour tout  $F \in |\bar{\mathbb{E}}|$  et  $A, B \in |\mathbb{V}|$ , la flèche  $(F^A)^B \xrightarrow{\alpha m_{F,A,B}} F^{A \otimes B}$  de  $\bar{\mathbb{E}}$ , en posant, pour tout  $X \in |\bar{\mathbb{E}}|$ ,

$$(\alpha m_{F,A,B})_X = (F(A \wedge (B \wedge X)) \xrightarrow{F(am_{A,B,X})} F((A \otimes B) \wedge X))$$

La naturalité de  $\sigma$  et de  $\alpha m$  résulte de celle de  $s$  et de  $am$ . Enfin les axiomes de cohérence souhaités proviennent de ceux de  $\mathbb{E}$ , ce qui achève d'établir que  $\bar{\mathbb{E}}$ , muni de  $Exp$ ,  $\sigma$  et  $\alpha m$  a une structure de catégorie précotensorisée sur  $\mathbb{V}$ . Remarquons que si  $\mathbb{E}$  est tensorisée alors  $\bar{\mathbb{E}}$  est cotensorisée.

Avant de poursuivre, signalons la proposition suivante qui sera utile dans la section 7.

**Proposition 2.1.**  $\mathbb{E}$  étant une catégorie prétensorisée sur une catégorie monoïdale  $\mathbb{V}$ , soit  $F \xrightarrow{t} G$  une flèche de  $\bar{\mathbb{E}}$ . Notons  $\tilde{t} = (I, \underline{t})$  où

$\underline{t} = (F \xrightarrow{t} G \xrightarrow{\sigma} G^I)$ , la flèche de  $\mu c(\bar{\mathbb{E}})$  correspondante. Soit maintenant  $F' \xrightarrow{f} F$  et  $G \xrightarrow{g} G'$  deux flèches de  $\mu c(\bar{\mathbb{E}})$ . On écrit  $f = (A, \underline{f})$  où  $\underline{f} : F' \rightarrow F^A$  est dans  $\bar{\mathbb{E}}$  et  $g = (B, \underline{g})$  où  $\underline{g} : G \rightarrow G'^B$  est dans  $\bar{\mathbb{E}}$ . Alors on a les compositions strictes suivantes :

- 1)  $g\tilde{t} = (B, \underline{g.t})$  c.a.d.  $F \xrightarrow{t} G \xrightarrow{g} G'^B$ .
- 2)  $\tilde{t}f = (A, t^A.\underline{f})$  c.a.d.  $F' \xrightarrow{f} F^A \xrightarrow{t^A} G^A$

Preuve : 1) On a  $g \otimes \tilde{t} = (B \otimes I, \underline{g \circ t})$  où  $\underline{g \circ t}$  est la flèche composée suivante dans  $\bar{\mathbb{E}}$  :  $F \xrightarrow{t} G \xrightarrow{\sigma} G^I \xrightarrow{\underline{g}^I} (G'^B)^I \xrightarrow{\alpha m} G'^{B \otimes I}$ . Pour établir l'identité demandée, il suffit de vérifier que le triangle suivant commute :

$$\begin{array}{ccc}
 & F & \\
 \swarrow \underline{g \circ t} & & \searrow \underline{g \cdot t} \\
 G' B \otimes I & \xrightarrow{Id^u_d^{-1}} & G' B
 \end{array}$$

2) On procède comme au (1).

### Un plongement de Yoneda vu comme foncteur mutant.

En particulier la catégorie  $\hat{\mathbb{E}} = [\mathbb{E}^{op}, \mathbb{E}ns]$  a canoniquement une structure de cotensorisée. On va voir maintenant que le plongement de Yoneda (classique)  $y : \mathbb{E} \rightarrow \hat{\mathbb{E}}$  se prolonge en un foncteur mutant (noté  $\mu y$ ),  $\mu t(\mathbb{E}) \rightarrow \mu c(\hat{\mathbb{E}})$ . On le construit comme suit :

- Sur les objets, on a  $(|\mu t(\mathbb{E})| \xrightarrow{|\mu y|} |\mu c(\hat{\mathbb{E}})|) = (|\mathbb{E}| \xrightarrow{|y|} |\hat{\mathbb{E}}|)$ .
- Sur une flèche  $(A, f) : X \rightarrow X'$  dans  $\mu t(\mathbb{E})$  (alors  $f : A \wedge X \rightarrow X'$  est une flèche de  $\mathbb{E}$ ) on a  $\mu y(A, f) = (A, \underline{y}(f))$  où  $\underline{y}(f) : y(X) \rightarrow y(X')^A$  est la flèche de  $\hat{\mathbb{E}}$  qui, appliquée en  $Z \in |\mathbb{E}|$ , est l'application  $\mathbb{E}(Z, X) \rightarrow \mathbb{E}(A \wedge Z, X')$  envoyant la flèche  $Z \xrightarrow{x} X$  de  $\mathbb{E}$ , sur le composé suivant :

$$(A \wedge Z \xrightarrow{Id \wedge x} A \wedge X \xrightarrow{f} X').$$

- Sur une 2-cellule  $a : (A, f) \rightarrow (A', f') : X \rightarrow X'$ ,

$$(\mu y(A, f) \xrightarrow{\mu y(a)} \mu y(A', f')) = ((A, \underline{y}(f)) \xrightarrow{a} (A', \underline{y}(f')))$$

C'est une 2-cellule de  $\mu c(\hat{\mathbb{E}})$  car le triangle suivant commute dans  $\hat{\mathbb{E}}$  :

$$\begin{array}{ccc}
 & y(X) & \\
 \swarrow \underline{y}(f') & & \searrow \underline{y}(f) \\
 y(X')^{A'} & \xrightarrow{Id^a} & y(X')^A
 \end{array}$$

..  $\mu y$  est un foncteur mutant car,

... Sur un objet  $X \in |\mu t(\mathbb{E})|$ , on a  $\mu y(Id_X) = Id_{\mu y(X)}$ . En effet,  $Id_X = (I, s)$  (où  $I \wedge X \xrightarrow{s} X$  est la flèche canonique) et  $Id_{\mu y(X)} = (I, \sigma)$  (où  $\underline{y}(X) \xrightarrow{\sigma} y(X)^I$  est tel que  $\sigma_Z = y(X)(I \wedge Z \xrightarrow{s} Z)$ ). Mais

$$\underline{y}(I \wedge X \xrightarrow{s} X) = \sigma \text{ et donc } Id_{\mu y(X)} = (I, \sigma) = \mu y(I, s) = \mu y(Id_X).$$

... Pour un couple de flèches composables de  $\mu t(\mathbb{E})$  :

$$X_0 \xrightarrow{(A_0, f_0)} X_1 \xrightarrow{(A_1, f_1)} X_2, \text{ montrons que } \mu y((A_1, f_1) \otimes (A_0, f_0)) =$$

$\mu y(A_1, f_1) \otimes \mu y(A_0, f_0)$ . On a déjà  $(A_1, f_1) \otimes (A_0, f_0) = (A_1 \otimes A_0, f_1 \circ f_0)$  où  $f_1 \circ f_0 : (A_1 \otimes A_0) \wedge X_0 \rightarrow X_2$  est la flèche composée suivante :

$$(A_1 \otimes A_0) \wedge X_0 \xrightarrow{am} A_1 \wedge (A_0 \wedge X_0) \xrightarrow{Id \wedge f_0} A_1 \wedge X_1 \xrightarrow{f_1} X_2$$

Alors  $\mu y((A_1, f_1) \otimes (A_0, f_0)) = \mu y(A_1 \otimes A_0, f_1 \circ f_0) = (A_1 \otimes A_0, \underline{y}(f_1 \circ f_0))$ , où  $\underline{y}(f_1 \circ f_0) = y(X_0) \rightarrow y(X_2)^{A_1 \otimes A_0}$  est défini en  $Z \in |\mathbb{E}|$  comme étant l'application qui à  $Z \xrightarrow{x_0} X_0$  dans  $\mathbb{E}$  associe le composé  $(C)$  suivant :

$$(A_1 \otimes A_0) \wedge Z \xrightarrow{Id \wedge x_0} (A_1 \otimes A_0) \wedge X_0 \xrightarrow{am} A_1 \wedge (A_0 \wedge X_0) \xrightarrow{Id \wedge f_0} A_1 \wedge X_1 \xrightarrow{f_1} X_2$$

D'un autre côté  $\mu y(A_1, f_1) \otimes \mu y(A_0, f_0) = (A_1, \underline{y}(f_1)) \otimes (A_0, \underline{y}(f_0)) = (A_1 \otimes A_0, \underline{y}(f_1) \circ \underline{y}(f_0))$  où  $\underline{y}(f_1) \circ \underline{y}(f_0) : y(X_0) \rightarrow y(X_2)^{A_1 \otimes A_0}$  est la flèche composée suivante :

$$y(X_0) \xrightarrow{\underline{y}(f_0)} y(X_1)^{A_0} \xrightarrow{\underline{y}(f_1)^{Id}} (y(X_2)^{A_1})^{A_0} \xrightarrow{\alpha m} y(X_2)^{A_1 \otimes A_0}$$

Appliquée à  $Z \in |\mathbb{E}|$ , c'est l'application qui à  $Z \xrightarrow{x_0} X_0$  dans  $\mathbb{E}$  associe le composé  $(C')$  suivant :

$$(A_1 \otimes A_0) \wedge Z \xrightarrow{am} A_1 \wedge (A_0 \wedge Z) \xrightarrow{Id \wedge (Id \wedge x_0)} A_1 \wedge (A_0 \wedge X_0) \xrightarrow{Id \wedge f_0} A_1 \wedge X_1 \xrightarrow{f_1} X_2$$

Or, on voit facilement que les composés  $(C)$  et  $(C')$  coïncident. D'où l'identité voulue. Finalement, en appliquant le critère de la proposition 1.11 on en déduit que  $\mu y : \mu t(\mathbb{E}) \rightarrow \mu c(\hat{\mathbb{E}})$  est un foncteur mutant.

• Avant d'aborder la proposition suivante donnons une définition que nous utiliserons à plusieurs reprises dans le courant de cet article.

**Définition 2.2.** Soit  $\Phi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  un foncteur mutant. On dit qu'il est *pleinement fidèle* si, pour tout  $X, Y \in |\mathcal{M}|$ , le foncteur  $\Phi_{XY} : \mathcal{M}(X, Y) \rightarrow \mathcal{N}(\Phi(X), \Phi(Y))$  est un isomorphisme de catégories.

**Proposition 2.3.** Le foncteur mutant  $\mu y : \mu t(\mathbb{E}) \rightarrow \mu c(\hat{\mathbb{E}})$  est pleinement fidèle.

Preuve : Notons déjà  $\mathcal{E} = \mu t(\mathbb{E})$  et  $\hat{\mathcal{E}} = \mu c(\hat{\mathbb{E}})$ . Soient maintenant  $X, X' \in |\mathcal{E}| = |\mathbb{E}|$ . Montrons que le foncteur  $\mu y_{XX'} : \mathcal{E}(X, X') \rightarrow \hat{\mathcal{E}}(\mu y(X), \mu y(X'))$  est un isomorphisme. Soit  $(A, t)$  dans  $|\hat{\mathcal{E}}(\mu y(X), \mu y(X'))| = |\hat{\mathcal{E}}(y(X), y(X'))|$ . Alors  $t : y(X) \rightarrow y(X')^A$  est une flèche de  $\hat{\mathbb{E}}$ . Désignons par  $\underline{f}$  l'image de  $Id_X$  par

$\mathbb{E}(X, X) \xrightarrow{t_X} \mathbb{E}(A \wedge X, X')$  et posons  $f = (A, \underline{f})$ . Alors  $X \xrightarrow{f} X'$  est une flèche de  $\mathcal{E}$ . Montrons que  $\mu y(f) = (A, t)$ . Appliqué en  $Z \in |\mathbb{E}|$ ,

$\mathbb{E}(Z, X) \xrightarrow{\underline{y}(f)_Z} \mathbb{E}(A \wedge Z, X')$  est l'application qui à  $Z \xrightarrow{x} X$ , dans  $\mathbb{E}$ , associe le composé  $A \wedge Z \xrightarrow{Id \wedge x} A \wedge X \xrightarrow{f} X'$ . En particulier, pour  $x = Id_X$  on a  $\underline{y}(f)_X(Id_X) = \underline{f} = t_X(Id_X)$ . Mais, par le Lemme de Yoneda (classique) on sait que l'application  $\hat{\mathbb{E}}(y(X), y(X')^A) \rightarrow y(X')^A(X), t \mapsto t_X(Id_X)$  est bijective. Donc  $\underline{y}(f) = t$  et donc  $\mu y(f) = (A, t)$ . L'unicité de  $f$  est immédiate.

- Soit maintenant  $f, f' \in |\mathcal{E}(X, X')|$  et  $a : \mu y(f) \rightarrow \mu y(f')$  une 2-cellule de  $\hat{\mathcal{E}}$ . Montrons que  $f \xrightarrow{a} f'$  est une 2-cellule de  $\mathcal{E}$ . Écrivons  $f = (A, \underline{f})$  et  $f' = (A', \underline{f}')$ . Dire que  $\mu y(f) \xrightarrow{a} \mu y(f')$  est une 2-cellule de  $\hat{\mathcal{E}}$  signifie que le triangle suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} & y(X) & \\ \underline{y}(f') \swarrow & & \searrow \underline{y}(f) \\ y(X')^{A'} & \xrightarrow{y(X')^a} & y(X')^A \end{array}$$

Appliqué en  $X$  à  $Id_X \in \mathbb{E}(X, X)$  on obtient les identités suivantes :

$\underline{f} = \underline{y}(f)_X(Id_X) = \mathbb{E}(a \wedge Id_X, Id_{X'}) . \underline{y}(f')_X(Id_X) = \mathbb{E}(a \wedge Id_X, Id_{X'}) (\underline{f}') = \underline{f}' . a \wedge Id_X$  ce qui prouve que  $f \xrightarrow{a} f'$  est une flèche de  $\mathcal{E}(X, X')$ . Cela achève de montrer que  $\mu y$  est pleinement fidèle.

### 3. Changement de base

• Soit  $\Phi = (\Phi, \sigma, sor) : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}$  un foncteur comonoïdal (encore appelé op-monoïdal, colax monoïdal ou oplax monoïdal) où  $\sigma : \Phi(I) \rightarrow I$  et  $sor = (sor_{A,B} : \Phi(A \otimes B) \rightarrow \Phi(A) \otimes \Phi(B))_{(A,B) \in |\mathbb{V}|^2}$ . À chaque catégorie mutante  $\mathcal{N}$  sur  $\mathbb{W}$  on va lui faire correspondre une nouvelle catégorie mutante notée  $\Phi^*(\mathcal{N})$  sur  $\mathbb{V}$ . Mais avant cela considérons la proposition suivante :

**Proposition 3.1.** On suppose que le foncteur comonoïdal  $\Phi$  admet un adjoint à droite  $\Psi$ . Alors on peut compléter canoniquement  $\Psi$  en un foncteur monoïdal.

Preuve : Fixons d'abord une co-unité  $\varepsilon : \Phi\Psi \rightarrow Id_{\mathbb{W}}$  de l'adjonction  $\Phi \dashv \Psi$ . Alors  $e : I \rightarrow \Psi I$  est l'unique flèche de  $\mathbb{V}$  telle que le triangle

suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} \Phi I & \xrightarrow{\Phi e} & \Phi \Psi I \\ & \searrow \sigma & \swarrow \varepsilon_I \\ & I & \end{array}$$

On a aussi, pour  $A, B \in |\mathbb{W}|$ , la flèche  $\Psi A \otimes \Psi B \xrightarrow{ent_{A,B}} \Psi(A \otimes B)$  qui est définie comme étant l'unique flèche de  $\mathbb{V}$  rendant le carré suivant commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \Phi(\Psi A \otimes \Psi B) & \xrightarrow{\Phi(ent_{A,B})} & \Phi \Psi(A \otimes B) \\ \text{\scriptsize } sor_{\Psi A, \Psi B} \downarrow & & \downarrow \varepsilon_{A \otimes B} \\ \Phi \Psi A \otimes \Phi \Psi B & \xrightarrow{\varepsilon_A \otimes \varepsilon_B} & A \otimes B \end{array}$$

On vérifie facilement que  $(\psi, e, ent)$  (où  $ent = (ent_{A,B})_{(A,B) \in |\mathbb{V}|^2}$ ) est un foncteur monoïdal.

### Construction de $\Phi^*(\mathcal{N})$ .

Dans la suite de la construction,  $\Phi^*(\mathcal{N})$ , pour simplifier les notations, est simplement désigné par  $\mathcal{M}$ . On la construit comme suit :

- $|\mathcal{M}| = |\mathcal{N}|$ ,
- pour  $X, Y \in |\mathcal{M}|$ , une flèche  $X \rightarrow Y$  dans  $\mathcal{M}$  est un couple  $(A, f)$  où  $A \in |\mathbb{V}|$  et  $X \xrightarrow{f} Y$  une flèche de  $\mathcal{N}$  telle que  $U(f) = \Phi(A)$ .
- Soient  $(A, f), (A', f') : X \rightarrow Y$  deux flèches de  $\mathcal{M}$ . Une 2-cellule  $(A, f) \rightarrow (A', f')$  est une flèche  $A \xrightarrow{a} A'$  dans  $\mathbb{V}$  telle que  $\Phi(a)^*(f') = f$  (dans  $\mathcal{N}(X, Y)$ ).

.. Le composé des flèches  $X \xrightarrow{(A,f)} Y \xrightarrow{(B,g)} Z$  de  $\mathcal{M}$  est la flèche

$X \xrightarrow{(B \otimes A, g \circ f)} Z$  où  $g \circ f = sor_{B,A}^*(g \otimes f)$  dans  $\mathcal{N}(X, Z)$ .

.. Remarquons que si  $X \in |\mathcal{M}|$ , alors  $Id_X^{\mathcal{M}} = (I, \sigma^*(Id_X^{\mathcal{N}}))$  (où  $Id_X^{\mathcal{N}}$  désigne l'identité de  $X$  dans  $\mathcal{N}$ ).

.. Les composés verticaux et horizontaux des 2-cellules sont dictés par leur pendant dans  $\mathbb{V}$ .

.. Pour le reste de la construction et la preuve que  $\mathcal{M}$ , ainsi construit, est bien une catégorie mutante, il suffit d'appliquer le critère 1.10.

**Remarques 3.2.** 1) Lorsque  $A' \xrightarrow{a} A$  est une flèche de  $\mathbb{V}$  et  $(A, f) : X \rightarrow Y$  une flèche de  $\mathcal{M} = \Phi^*(\mathcal{N})$ , on a l'identité :

$$a^*(A, f) = (A', \Phi(a)^*(f))$$

2) (Caractérisation de la composition stricte dans  $\mathcal{M}$ ). Dans la situation suivante dans  $\mathcal{M} : X \xrightarrow{(A,f)} Y \xrightarrow{(B,g)} Z$ ,

.. Si  $B = I$ , alors  $(I, g)(A, f) = (A, g \times f)$ , où

$$g \times f = (sor_{I,A} \cdot \Phi(u_g)^{-1})^*(g \otimes f)$$

.. Si  $A = I$ , alors  $(B, g)(I, f) = (B, g \rtimes f)$  où

$$g \rtimes f = (sor_{B,I} \cdot \Phi(u_d)^{-1})^*(g \otimes f).$$

**Proposition 3.3.** En notant provisoirement  $\mathcal{M} = \Phi^*(\mathcal{N})$ , on a les implications suivantes :

1) On suppose que  $\Phi I \xrightarrow{\sigma} I$  est inversible, alors :

Si  $\mathcal{N}$  est de saveur T (resp. de saveur C) alors  $\mathcal{M}$  l'est aussi.

2) On suppose que  $\Phi : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}$  admet un adjoint à droite  $\Psi$ , alors :

Si  $\mathcal{N}$  est de saveur E il en est de même de  $\mathcal{M}$ .

Preuve : 1) A) *Le cas de saveur T.* Pour chaque  $B \in |\mathbb{W}|$  et  $X \in |\mathcal{N}|$  on choisit une représentation de  $Tri_{\mathbb{W}}(B, X, -) : \underline{\mathcal{N}} \rightarrow \mathbb{E}ns.$  on l'écrit  $(B \wedge X, val_{B,X})$ . Soit maintenant  $A \in |\mathbb{V}|$  et  $X \in |\mathcal{M}|$ . On montre que  $(\Phi(A) \wedge X, (A, val_{\Phi A, X}))$  est une représentation de  $Tri_{\mathbb{V}}(A, X, -) : \underline{\mathcal{M}} \rightarrow \mathbb{E}ns.$  Pour la propriété universelle, on se donne  $Y \in |\underline{\mathcal{M}}| = |\mathcal{N}|$  et  $(A, f) \in Tri_{\mathbb{V}}(A, X, Y)$ . Comme  $f \in Tri_{\mathbb{W}}(\Phi A, X, Y)$ , on utilise la propriété universelle de la représentation de  $Tri_{\mathbb{W}}(\Phi A, X, -)$ . Il existe donc une unique flèche  $\tilde{f} : \Phi A \wedge X \rightarrow Y$  dans  $\underline{\mathcal{N}}$  telle que  $\tilde{f} val_{\Phi A, X} = f$  (la composition est stricte). On pose ensuite  $\hat{f} = \sigma^*(\tilde{f})$  (dans  $\mathcal{N}(\Phi A \wedge X, Y)$ ). On vérifie alors que  $(I, \hat{f})(A, val_{\Phi A, X}) \stackrel{*1}{=} (A, \hat{f} \rtimes val_{\Phi A, X}) \stackrel{*2}{=} (A, f)$ .

( $\star 1$ ) Voir la remarque précédente,

( $\star 2$ ) car  $\hat{f} \rtimes val_{\Phi A, X} = ((\sigma \otimes Id).sor \cdot \Phi(u_g)^{-1})^*(\tilde{f} \otimes val_{\Phi A, X}) = (u_g^{-1})^*(\tilde{f} \otimes val_{\Phi A, X}) = f val_{\Phi A, X} = f$ .

Pour l'unicité de  $(I, f)$  on procède de façon similaire (en utilisant l'inversibilité de  $\sigma$ ).

B) *Le cas de saveur C* se traite de façon très semblable au (A).

2) *Le cas de saveur E.* Fixons d'abord la co-unité  $\varepsilon : \Phi\Psi \rightarrow Id_{\mathbb{W}}$  de l'adjonction  $\Phi - |\Psi$ . Pour chaque  $X, Y \in |\mathcal{N}|$ , on choisit une représentation

de  $Tri_{\mathbb{W}}(-, X, Y) : \mathbb{W}^{op} \rightarrow \mathbb{E}ns$ . On l'écrit  $(\mathbb{N}(X, Y), ev_{X,Y})$ . Il faut maintenant montrer que le préfaisceau  $Tri_{\mathbb{V}}(-, X, Y) : \mathbb{V}^{op} \rightarrow \mathbb{E}ns$  est représentable. Pour cela, montrons que  $(\Psi\mathbb{N}(X, Y), (\Psi\mathbb{N}(X, Y), \varepsilon^*ev_{X,Y}))$  est une représentation de  $Tri_{\mathbb{V}}(-, X, Y)$  (où  $\varepsilon = \varepsilon_{\mathbb{N}(X,Y)} : \Phi\Psi\mathbb{N}(X, Y) \rightarrow \mathbb{N}(X, Y)$ ). Soit donc  $A \in |\mathbb{V}|$  et  $(A, f) \in Tri_{\mathbb{V}}(A, X, Y)$ . Comme  $f \in Tri_{\mathbb{W}}(\Phi A, X, Y)$ , par la propriété universelle de  $(\mathbb{N}(X, Y), ev_{X,Y})$ , il existe une unique flèche  $\tilde{f} : \Phi A \rightarrow \mathbb{N}(X, Y)$ , dans  $\mathbb{W}$ , telle que  $\tilde{f}^*(ev_{X,Y}) = f$ , dans  $\mathcal{N}(X, Y)$ . Par l'adjonction  $\Phi - |\Psi$ , il existe ensuite une unique flèche  $\hat{f} : A \rightarrow \Psi\mathbb{N}(X, Y)$  dans  $\mathbb{V}$  telle que le triangle suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} \Phi A & \xrightarrow{\Phi \hat{f}} & \Phi \Psi \mathbb{N}(X, Y) \\ & \searrow \tilde{f} & \swarrow \varepsilon \\ & \mathbb{N}(X, Y) & \end{array}$$

Alors, dans  $\mathcal{M}(X, Y)$ ,  $\hat{f}^*(\Psi\mathbb{N}(X, Y), \varepsilon^*ev_{X,Y}) = (A, \Phi(\hat{f})^*\varepsilon^*ev_{X,Y})$  (voir la remarque 3.2). Mais  $\Phi(\hat{f})^*\varepsilon^*ev_{X,Y} = (\varepsilon.\Phi(\hat{f}))^*(ev_{X,Y}) = \tilde{f}^*(ev_{X,Y}) = f$ . Ainsi  $\hat{f}^*(\Psi\mathbb{N}(X, Y), \varepsilon^*ev_{X,Y}) = (A, f)$ . L'unicité de  $\hat{f}$  pour cette propriété vient de celle de sa définition et de l'unicité de  $\tilde{f}$ .

**Remarque 3.4.** • Dans [1], à partir d'un foncteur monoïdal  $\Psi = (\Psi, e, ent)$  de  $\mathbb{W}$  dans  $\mathbb{V}$ , on transporte les catégories enrichies de  $\mathbb{W}$  dans  $\mathbb{V}$  (le terme de "changement de base" est alors employé). Plus précisément, si  $\mathbb{C}$  est enrichi dans  $\mathbb{W}$ , on construit une catégorie enrichie  $\mathbb{C}'$  dans  $\mathbb{V}$ . Elle a les mêmes objets que  $\mathbb{C}$ . Pour  $X, Y \in |\mathbb{C}'|$ ,  $\mathbb{C}'(X, Y) = \Psi\mathbb{C}(X, Y)$ . On a aussi  $(I \xrightarrow{id'_X} \mathbb{C}'(X, X)) = (I \xrightarrow{e} \Psi I \xrightarrow{\Psi id_X} \Psi\mathbb{C}(X, X))$  et encore  $(\mathbb{C}'(Y, Z) \otimes \mathbb{C}'(X, Y) \xrightarrow{comp'} \mathbb{C}'(X, Z)) = (\Psi\mathbb{C}(Y, Z) \otimes \Psi\mathbb{C}(X, Y) \xrightarrow{ent} \Psi(\mathbb{C}(Y, Z) \otimes \mathbb{C}(X, Y)) \xrightarrow{\Psi comp} \Psi\mathbb{C}(X, Z))$ . Notons  $\Psi_*(\mathbb{C}) = \mathbb{C}'$ .

• Si on reprend la partie (2) de la proposition précédente, en notant  $\mathbb{N}$  la catégorie enrichie dans  $\mathbb{W}$  obtenue à partir des représentations  $(\mathbb{N}(X, Y), ev_{XY})$  et  $\mathbb{M}$  la catégorie enrichie dans  $\mathbb{V}$  obtenue à partir des représentations  $(\Psi\mathbb{N}(X, Y), (\Psi\mathbb{N}(X, Y), \varepsilon^*ev_{XY}))$  (voir [4]), on constate que  $\Psi_*(\mathbb{N}) = \mathbb{M}$  (il suffit de vérifier que  $(id'_X)^*(\mathbb{M}(X, X), \varepsilon^*ev_{X,X}) = (I, s^*(Id_X))$ ) et, pour  $X, Y, Z \in |\mathbb{M}|$ ,  $comp'^*_{XYZ}(\mathbb{M}(X, Z), \varepsilon^*ev_{X,Z}) =$

$(\mathbb{M}(Y, Z), \varepsilon^* ev_{Y,Z}) \otimes (\mathbb{M}(X, Y), \varepsilon^* ev_{X,Y})$  où  $id'_X$  et  $comp'_{XYZ}$  proviennent de  $\Psi_*(\mathbb{N})$ .

### La catégorie mutante opposée

• La catégorie mutante opposée est un exemple de changement de base le long d'un foncteur comonoïdal. Ce foncteur comonoïdal est donné par la proposition suivante :

**Proposition 3.5.** Soit  $\mathbb{V}$  une catégorie monoïdale symétrique. Alors il existe canoniquement un foncteur comonoïdal  $\Phi : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}^*$  où  $\mathbb{V}^*$  est la catégorie monoïdale duale de  $\mathbb{V}$  (voir [3] - Elle a la même catégorie sous-jacente et  $A \otimes^* B = B \otimes A$  etc...)

Preuve : - Le foncteur sous-jacent à  $\Phi$  est l'identité dans  $\mathbb{V}$ .

$$- \sigma = Id_I$$

$$- (A \otimes B \xrightarrow{sym_{A,B}} A \otimes^* B) = (A \otimes B \xrightarrow{sym_{A,B}} B \otimes A)$$

•  $\mathbb{V}$  étant supposée être une catégorie monoïdale symétrique, à toute catégorie mutante  $\mathcal{M}$  sur  $\mathbb{V}$  on associe la catégorie mutante (dite opposée), notée  $\mathcal{M}^{op}$ . On l'obtient en posant  $\mathcal{M}^{op} = \Phi^*(\mathcal{M}^*)$  (attention ! Il y a un risque de confusion avec les étoiles), où  $\mathcal{M}^*$  est la catégorie mutante duale de  $\mathcal{M}$  sur  $\mathbb{V}^*$  (voir [3] pour  $\mathbb{V}^*$  et [4] pour  $\mathcal{M}^*$ ) et  $\Phi : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}^*$  a été défini plus haut. Concrètement :

$$- |\mathcal{M}^{op}| = |\mathcal{M}|,$$

$$- \text{Pour } X, Y \in |\mathcal{M}^{op}|, \mathcal{M}^{op}(X, Y) = \mathcal{M}(Y, X) \text{ et } U_{XY}^{op} = U_{YX},$$

$$- \text{Pour } X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \text{ dans } \mathcal{M}^{op} \text{ on a } g \otimes^{op} f = sym^*(f \otimes g) \text{ (où } sym : U(g) \otimes U(f) \rightarrow U(f) \otimes U(g)).$$

**Proposition 3.6.** : Soit  $\mathbb{M}$  une catégorie enrichie dans  $\mathbb{V}$ . Alors :

$$\mu e(\mathbb{M}^{op}) = \mu e(\mathbb{M})^{op}$$

Preuve : Soit  $Z \xrightarrow{g} Y \xrightarrow{f} X$  des flèches de  $\mu e(\mathbb{M})$ . On pose  $f = (A, \underline{f})$  et  $g = (B, \underline{g})$  où  $A \xrightarrow{\underline{f}} \mathbb{M}(Y, X)$  et  $B \xrightarrow{\underline{g}} \mathbb{M}(Z, Y)$ . Leur composé dans  $\mu e(\mathbb{M}^{op})$  est  $(B \otimes A, h)$  où  $h$  est la flèche composée

$$B \otimes A \xrightarrow{g \otimes f} \mathbb{M}(Z, Y) \otimes \mathbb{M}(Y, X) \xrightarrow{sym} \mathbb{M}(Y, X) \otimes \mathbb{M}(Z, Y) \xrightarrow{comp} \mathbb{M}(Z, X).$$

Leur composé dans  $\mu e(\mathbb{M})^{op}$  est  $(B \otimes A, k)$  où  $k$  est la flèche composée

$$B \otimes A \xrightarrow{\text{sym}} A \otimes B \xrightarrow{f \otimes g} \mathbb{M}(Y, X) \otimes \mathbb{M}(Z, Y) \xrightarrow{\text{comp}} \mathbb{M}(Z, X).$$

Or  $h = k$ . D'où l'identité des deux compositions. Le reste de la preuve est sans difficulté.

#### 4. La catégorie mutante $\mathbb{V}\text{-}\mu(\mathcal{M}, \mathcal{N})$

**Convention:** A partir de cette section, on se fixe une catégorie monoïdale symétrique  $\mathbb{V}$ .

**Construction de  $\mathbb{V}\text{-}\mu(\mathcal{M}, \mathcal{N})$**  (où  $\mathcal{M}$  et  $\mathcal{N}$  sont des catégories mutantes sur  $\mathbb{V}$ ):

La catégorie mutante  $\mathbb{V}\text{-}\mu(\mathcal{M}, \mathcal{N})$  est définie comme suit :

- $|\mathbb{V}\text{-}\mu(\mathcal{M}, \mathcal{N})| = |\text{Cat}\mu(\mathbb{V})(\mathcal{M}, \mathcal{N})|$  (voir la section 1).
- Si  $F, G \in |\mathbb{V}\text{-}\mu(\mathcal{M}, \mathcal{N})|$ , une flèche  $F \rightarrow G$  est un couple  $(A, f)$  où  $A \in |\mathbb{V}|$  et  $f = (FX \xrightarrow{f_X} GX)_{X \in |\mathcal{M}|}$  une famille de flèches de  $\mathcal{N}$ , vérifiant les conditions suivantes :

(TNV 1) Pour tout  $X \in |\mathcal{M}|$ ,  $U(f_X) = A$ ,

(TNV 2) Pour toute flèche  $X \xrightarrow{x} X'$  de  $\mathcal{M}$ ,  $\text{sym}^*(Gx \otimes f_X) = f_{X'} \otimes Fx$ , où  $\text{sym} : A \otimes U(x) \rightarrow U(x) \otimes A$  (ou encore, il existe une flèche  $f_{X'} \otimes Fx \xrightarrow{\alpha} Gx \otimes f_X$  dans  $\mathcal{N}(FX, GX')$  telle que  $U(\alpha) = \text{sym}$ ).

- $(A, f), (A', f') : F \rightarrow G$  étant deux flèches parallèles dans  $\mathbb{V}\text{-}\mu(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ , une 2-cellule  $(A, f) \rightarrow (A', f')$  est une flèche  $A \xrightarrow{a} A'$  dans  $\mathbb{V}$  telle que  $\forall X \in |\mathcal{M}|$ ,  $a^*(f'_X) = f_X$ .

.. La composition des flèches de  $\mathbb{V}\text{-}\mu(\mathcal{M}, \mathcal{N})$  est donnée, pour

$F \xrightarrow{(A, f)} G \xrightarrow{(B, g)} H$  par  $(B, g) \otimes (A, f) = (B \otimes A, g \circ f)$  où  $g \circ f$  est la famille  $(FX \xrightarrow{g_X \otimes f_X} HX)_{X \in |\mathcal{M}|}$  (pour la justifier on utilise l'axiome hexagonal de la symétrie dans les catégories monoïdales symétriques).

.. Si  $F \in |\mathbb{V}\text{-}\mu(\mathcal{M}, \mathcal{N})|$ , alors  $\text{Id}_F = (I, \underline{\text{Id}}_F)$  où  $\underline{\text{Id}}_F = (\text{Id}_{FX})_{X \in |\mathcal{M}|}$  (un autre axiome des catégories monoïdales symétrique est utile ici).

.. Pour la composition verticale des 2-cellules

$(A_0, f_0) \xrightarrow{a_0} (A_1, f_1) \xrightarrow{a_1} (A_2, f_2)$  dans  $\mathbb{V}\text{-}\mu(\mathcal{M}, \mathcal{N})(F, G)$  il suffit de remarquer que  $a_1 \cdot a_0 : (A_0, f_0) \rightarrow (A_2, f_2)$  est une flèche de  $\mathbb{V}\text{-}\mu(\mathcal{M}, \mathcal{N})(F, G)$

.. Pour la composition horizontale des 2-cellules  $a_0 : (A_0, f_0) \rightarrow (A'_0, f'_0) : F_0 \rightarrow F_1$  avec  $a_1 : (A_1, f_1) \rightarrow (A'_1, f'_1) : F_1 \rightarrow F_2$ , on montre que

$(A_1, f_1) \otimes (A_0, f_0) \xrightarrow{a_1 \otimes a_0} (A'_1, f'_1) \otimes (A'_0, f'_0)$  est une flèche de

$\mathbb{V}\text{-}\mu(\mathcal{M}, \mathcal{N})(F_0, F_2)$  (immédiat).

.. Pour  $(A, f) : F \rightarrow G$ , alors  $Id_{(A,f)} = ((A, f) \xrightarrow{Id_A} (A, f))$ .

.. La construction du morphisme d'oubli  $U : \mathbb{V}\text{-}\mu(\mathcal{M}, \mathcal{N}) \rightarrow \mathbb{V}$  et le fait qu'il commute avec les compositions et les identités précédentes est tout aussi immédiat.

.. Pour  $F, G \in \mathbb{V}\text{-}\mu(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ , le fait que  $U_{FG} : \mathbb{V}\text{-}\mu(\mathcal{M}, \mathcal{N}) \rightarrow \mathbb{V}$  soit une fibration discrète se montre sans difficulté particulière.

..  $F \xrightarrow{(A,f)} G$  étant une flèche de  $\mathbb{V}\text{-}\mu(\mathcal{M}, \mathcal{N})$  on vérifie que

$$(A, f) \otimes Id_F \xrightarrow{u_d} (A, f) \quad \text{et} \quad Id_G \otimes (A, f) \xrightarrow{u_g} (A, f)$$

sont des 2-cellules de  $\mathbb{V}\text{-}\mu(\mathcal{M}, \mathcal{N})$  ( cela provient de la structure bicatégorique de  $\mathcal{N}$  préservée par  $U$ )

.. De même, dans la situation suivante  $F_0 \xrightarrow{(A_0,f_0)} F_1 \xrightarrow{(A_1,f_1)} F_2 \xrightarrow{(A_2,f_2)} F_3$ , on vérifie que

$ass : ((A_2, f_2) \otimes (A_1, f_1)) \otimes (A_0, f_0) \rightarrow (A_2, f_2) \otimes ((A_1, f_1) \otimes (A_0, f_0))$  est une 2-cellule de  $\mathbb{V}\text{-}\mu(\mathcal{M}, \mathcal{N})$  (cela résulte, la encore, de la structure de bicatégorie de  $\mathcal{N}$  préservée par  $U$ ).

.. Pour achever de prouver que  $\mathbb{V}\text{-}\mu(\mathcal{M}, \mathcal{N})$  est une catégorie mutante sur  $\mathbb{V}$  il suffit d'appliquer le critère 1.10.

• Le lemme suivant est utile pour les compositions strictes dans  $\mathbb{V}\text{-}\mu(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ .

**Lemme 4.1.** Soient  $E, F, G, H$  quatre objets de  $\mathbb{V}\text{-}\mu(\mathcal{M}, \mathcal{N})$  et trois flèches composables :

$$E \xrightarrow{(I,f)} F \xrightarrow{(A,g)} G \xrightarrow{(I,h)} H$$

On a les compositions strictes suivantes :

- 1)  $(A, g)(I, f) = (A, gf)$  où  $gf = (g_X f_X : EX \rightarrow GX)_{X \in |\mathcal{M}|}$ .
- 2)  $(I, h)(A, g) = (A, hg)$  où  $hg = (h_X g_X : FX \rightarrow HX)_{X \in |\mathcal{M}|}$ .

Preuve : Sans difficulté.

**Proposition 4.2.** On a l'isomorphisme  $\underline{\mathbb{V}\text{-}\mu(\mathcal{M}, \mathcal{N})} \simeq Cat\mu(\mathbb{V})(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ .

Preuve : L'isomorphisme  $\gamma : Cat\mu(\mathbb{V})(\mathcal{M}, \mathcal{N}) \rightarrow \underline{\mathbb{V}\text{-}\mu(\mathcal{M}, \mathcal{N})}$  est défini sur les objets par  $|\gamma| = Id$  et sur les flèches, pour  $F \xrightarrow{t} G$  on pose

$\gamma(t) = (I, t)$ . On vérifie facilement que  $\gamma$  est un foncteur puis que c'est un isomorphisme.

- Donnons nous maintenant deux foncteurs mutants :

$$\mathcal{M}' \xrightarrow{\phi} \mathcal{M} \quad \text{et} \quad \mathcal{N} \xrightarrow{\psi} \mathcal{N}'$$

Grâce à eux, on construit de nouveaux foncteurs mutants :

$$\mathbb{V}\text{-}\mu(\mathcal{M}, \mathcal{N}) \xrightarrow{\mathbb{V}\text{-}\mu(\phi, Id)} \mathbb{V}\text{-}\mu(\mathcal{M}', \mathcal{N}) \quad \text{et} \quad \mathbb{V}\text{-}\mu(\mathcal{M}, \mathcal{N}) \xrightarrow{\mathbb{V}\text{-}\mu(Id, \psi)} \mathbb{V}\text{-}\mu(\mathcal{M}, \mathcal{N}')$$

On les obtient comme suit :

**Pour  $\mathbb{V}\text{-}\mu(\phi, Id)$**  (Écrivons le  $\Phi$  pour simplifier).

- Pour  $F \in |\mathbb{V}\text{-}\mu(\mathcal{M}, \mathcal{N})|$ ,  $\Phi(F) = F.\phi$  (composition des foncteurs mutants. Voir [4]. )

- Sur une flèche  $F \xrightarrow{(A, f)} G$ , on a  $\Phi(A, f) = (A, f.\phi)$  où

$f.\phi = (F\phi(X') \xrightarrow{f_{\phi X'}} G\phi(X'))_{X' \in |\mathcal{M}'|}$ . On vérifie facilement que

$F.\phi \xrightarrow{(A, f.\phi)} G.\phi$  est une flèche de  $\mathbb{V}\text{-}\mu(\mathcal{M}', \mathcal{N})$ .

- Sur une 2-cellule  $(A, f) \xrightarrow{a} (A', f') : F \rightarrow G$  de  $\mathbb{V}\text{-}\mu(\mathcal{M}', \mathcal{N})$ , on vérifie facilement que  $a : \Phi(A, f) \rightarrow \Phi(A', f')$  est une 2-cellule de  $\mathbb{V}\text{-}\mu(\mathcal{M}', \mathcal{N})$ .

Pour achever de prouver que  $\Phi = \mathbb{V}\text{-}\mu(\phi, Id)$  est un foncteur mutant il suffit d'appliquer le critère 1.11.

**Pour  $\mathbb{V}\text{-}\mu(Id, \psi)$**  (Écrivons le  $\Psi$  pour simplifier).

- Pour  $F \in |\mathbb{V}\text{-}\mu(\mathcal{M}, \mathcal{N})|$ ,  $\Psi(F) = \psi.F$  (composition des foncteurs mutants)

- Sur une flèche  $F \xrightarrow{(A, f)} G$ , on a  $\Psi(A, f) = (A, \psi.f)$  où

$\psi.f = (\psi(FX) \xrightarrow{\psi(f_X)} \psi(GX))_{X \in |\mathcal{M}|}$ .

- Sur une 2-cellule  $(A, f) \xrightarrow{a} (A', f') : F \rightarrow G$  de  $\mathbb{V}\text{-}\mu(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ , on vérifie facilement que  $a : \Psi(A, f) \rightarrow \Psi(A', f')$  est une 2-cellule de  $\mathbb{V}\text{-}\mu(\mathcal{M}, \mathcal{N}')$ .

On applique enfin le critère ?? pour achever de prouver que  $\Psi = \mathbb{V}\text{-}\mu(Id, \psi)$  est un foncteur mutant.

- La proposition suivante nous sera utile à la section 9.

**Proposition 4.3.** Lorsque  $\Psi : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{N}'$  est pleinement fidèle (voir la définition 2.2) il en va de même pour  $\mathbb{V}\text{-}\mu(Id, \psi) : \mathbb{V}\text{-}\mu(\mathcal{M}, \mathcal{N}) \rightarrow \mathbb{V}\text{-}\mu(\mathcal{M}, \mathcal{N}')$ .

Preuve : Se montre sans difficulté .

## 5. La catégorie mutante $\mathbb{V}\text{-}e(\mathbb{M}, \mathbb{N})$

•  $\mathbb{M}$  et  $\mathbb{N}$  étant des catégories enrichies dans  $\mathbb{V}$  on cherche à décrire plus simplement la catégorie mutante  $\mathbb{V}\text{-}\mu(\mu e(\mathbb{M}), \mu e(\mathbb{N}))$ . Notre but est d'arriver à retrouver la catégorie enrichie  $\mathbb{V}[\mathbb{M}, \mathbb{N}]$  (voir [1] prop. 6.3.1) lorsque  $\mathbb{V}$  a suffisamment de propriétés pour y parvenir.

### • Construction de $\mathbb{V}\text{-}e(\mathbb{M}, \mathbb{N})$ :

La catégorie mutante  $\mathbb{V}\text{-}e(\mathbb{M}, \mathbb{N})$  est définie comme suit :

-  $|\mathbb{V}\text{-}e(\mathbb{M}, \mathbb{N})| = |\mathbb{V}\text{-}Cat(\mathbb{M}, \mathbb{N})|$

- Pour  $F, G \in |\mathbb{V}\text{-}e(\mathbb{M}, \mathbb{N})|$ , une flèche  $F \rightarrow G$  est un couple  $(A, f)$  où  $A \in |\mathbb{V}|$  et  $f = (A \xrightarrow{f_X} \mathbb{N}(FX, GX))_{X \in |\mathbb{M}|}$  une famille de flèches de  $\mathbb{V}$  vérifiant la condition suivante :

(TNVE) Pour tout  $(X, X') \in |\mathbb{M}|^2$  le carré suivant commute dans  $\mathbb{V}$  :

$$\begin{array}{ccc} A \otimes \mathbb{M}(X, X') & \xrightarrow{f_X \otimes Id} & \mathbb{N}(FX, GX) \otimes \mathbb{M}(X, X') \\ f_{X'} \otimes Id \downarrow & & \downarrow v_{XX'} \\ \mathbb{N}(FX', GX') \otimes \mathbb{M}(X, X') & \xrightarrow{u_{XX'}} & \mathbb{N}(FX, GX') \end{array}$$

où  $u_{XX'}$  et  $v_{XX'}$  sont les flèches composées suivantes :

$$u_{XX'} = [\mathbb{N}(FX', GX') \otimes \mathbb{M}(X, X') \xrightarrow{Id \otimes F_{XX'}} \mathbb{N}(FX', GX') \otimes \mathbb{N}(FX, FX') \xrightarrow{comp} \mathbb{N}(FX, GX')] \\ \text{et } v_{XX'} =$$

$$\mathbb{N}(FX, GX) \otimes \mathbb{M}(X, X') \xrightarrow{s} \mathbb{M}(X, X') \otimes \mathbb{N}(FX, GX) \xrightarrow{G \otimes Id} \mathbb{N}(GX, GX') \otimes \mathbb{N}(FX, GX) \xrightarrow{c} \mathbb{N}(FX, GX')$$

où  $s = sym$ ,  $c = comp$ ,  $G = G_{XX'}$

-  $(A, f), (A', f') : F \rightarrow G$  étant deux flèches dans  $\mathbb{V}\text{-}e(\mathbb{M}, \mathbb{N})$ , une 2-cellule  $(A, f) \rightarrow (A', f')$  est une flèche  $A \xrightarrow{a} A'$  dans  $\mathbb{V}$  telle que, pour tout

$X \in |\mathbb{M}|$  le triangle suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{a} & A' \\ & \searrow f_X \quad \swarrow f'_X & \\ & \mathbb{N}(FX, GX) & \end{array}$$

.. La composition des flèches de  $\mathbb{V}\text{-}e(\mathbb{M}, \mathbb{N})$  est donnée, pour

$F \xrightarrow{(A,f)} G \xrightarrow{(B,g)} H$  par  $(B, g) \otimes (A, f) = (B \otimes A, g \circ f)$  où  $g \circ f = (g_X \circ f_X)_{X \in |\mathbb{M}|}$  avec

$$g_X \circ f_X = (B \otimes A \xrightarrow{g_X \otimes f_X} \mathbb{N}(GX, HX) \otimes \mathbb{N}(FX, GX) \xrightarrow{comp} \mathbb{N}(FX, HX))$$

(voir la composition dans  $\mu e(\mathbb{N})$ ).

.. Si  $F \in |\mathbb{V}\text{-}e(\mathbb{M}, \mathbb{N})|$ , alors  $Id_F = (I, Id_F)$  où

$$Id_F = (I \xrightarrow{id_{FX}} \mathbb{N}(FX, FX))_{X \in |\mathbb{M}|}.$$

.. Pour le reste de la construction de  $\mathbb{V}\text{-}e(\mathbb{M}, \mathbb{N})$  on procède comme pour celle de  $\mathbb{V}\text{-}\mu(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ .

**Proposition 5.1.** On a  $\mathbb{V}\text{-}e(\mathbb{M}, \mathbb{N}) \simeq \mathbb{V}\text{-}\mu(\mu e(\mathbb{M}), \mu e(\mathbb{N}))$ .

Preuve : L'isomorphisme  $\varepsilon : \mathbb{V}\text{-}e(\mathbb{M}, \mathbb{N}) \rightarrow \mathbb{V}\text{-}\mu(\mu e(\mathbb{M}), \mu e(\mathbb{N}))$  se construit comme suit :

- Sur un objet  $F \in |\mathbb{V}\text{-}e(\mathbb{M}, \mathbb{N})|$ ,  $\varepsilon(F) = \mu e(F)$  (voir la définition de  $\mu e$  à la section1).

- sur une flèche  $F \xrightarrow{(A,f)} G$ ,  $\varepsilon(A, f) = (A, \bar{f})$  où pour  $X \in |\mathbb{M}|$ ,  $\bar{f}_X = (A, f_X) : FX \rightarrow GX$  dans  $\mu e(\mathbb{N})$ . (Pour montrer que  $\varepsilon(A, f) : \varepsilon(F) \rightarrow \varepsilon(G)$  est une flèche de  $\mathbb{V}\text{-}\mu(\mu e(\mathbb{M}), \mu e(\mathbb{N}))$  il faut montrer que pour tout  $X \xrightarrow{x} X'$  dans  $\mu e(\mathbb{M})$  on a :

$$sym^*(\mu e(G)(x) \otimes \bar{f}_X) = \bar{f}_{X'} \otimes (\mu e(F)(x)) \text{ (où } A \otimes U(x) \xrightarrow{sym} U(x) \otimes A).$$

Écrivons déjà  $x = (B, \underline{x})$  où  $B \xrightarrow{x} \mathbb{M}(X, X')$  est une flèche de  $\mathbb{V}$ . Alors

$\mu e(G)(x) \otimes \bar{f}_X = (B \otimes A, c_d)$  et  $\bar{f}_{X'} \otimes \mu e(F)(x) = (A \otimes B, c_g)$  où  $c_d$  et  $c_g$  sont définis par :

$$c_d = [B \otimes A \xrightarrow{(G_{XX'} \otimes \underline{x}) \otimes f_X} \mathbb{N}(GX, GX') \otimes \mathbb{N}(FX, GX) \xrightarrow{comp} \mathbb{N}(FX, GX')]$$

$$c_g = [A \otimes B \xrightarrow{f_{X'} \otimes (F_{XX'} \otimes \underline{x})} \mathbb{N}(FX', GX') \otimes \mathbb{N}(FX, FX') \xrightarrow{comp} \mathbb{N}(FX, GX')]$$

Or  $sym^*(B \otimes A, c_d) = (A \otimes B, c_d \cdot sym)$ . Il reste donc à montrer que

$c_d.sym = c_g$ . Mais cela résulte des identités suivantes :

$$c_d.sym = v_{XX'}.(f_X \otimes Id).(Id_A \otimes \underline{x}) = u_{XX'}.(f_{X'} \otimes Id).(Id \otimes \underline{x}) = c_g.$$

- Sur une 2-cellule  $(A, f) \xrightarrow{a} (A', f')$ , il faut simplement vérifier que  $a : \varepsilon(A, f) \rightarrow \varepsilon(A', f')$  est une 2-cellule de  $\mathbb{V}\text{-}\mu(\mu e(\mathbb{M}), \mu e(\mathbb{N}))$  ce qui est immédiat.

.. Le reste de la preuve que  $\varepsilon$  est un foncteur mutant est sans difficulté.

.. Montrons que  $\varepsilon$  est un isomorphisme. Sur les objets on utilise le fait que  $\mu e : \mathbb{V}\text{-}Cat \rightarrow Cat\mu(\mathbb{V})$  est pleinement fidèle.

Sur les flèches : Soit  $(A, f) : \varepsilon(F) \rightarrow \varepsilon(G)$  dans  $\mathbb{V}\text{-}\mu(\mu e(\mathbb{M}), \mu e(\mathbb{N}))$ . On pose  $\underline{f} = (A \xrightarrow{f_X} \mathbb{N}(FX, GX))_{X \in |\mathbb{M}|}$  où  $f_X = (A, \underline{f}_X)$  (flèche de  $\mu e(\mathbb{N})$ ). On montre ensuite que  $(A, \underline{f})$  est dans  $|\mathbb{V}\text{-}e(\mathbb{M}, \mathbb{N})(\underline{F}, G)|$ . Pour cela, soit  $(X, X') \in |\mathbb{M}|^2$ . Il faut montrer que le carré (C) (dans l'expression de l'axiome (TNVE)) commute. On considère la flèche  $X \xrightarrow{x} X'$  de  $\mu e(\mathbb{M})$  définie par  $x = (\mathbb{M}(X, X'), Id_{\mathbb{M}(X, X')})$ . Par hypothèse on a  $sym^*(Gx \otimes f_X) = f_{X'} \otimes Fx$ . En explicitant cette identité on obtient la commutation du carré (C) ce qui répond à la question. On a  $\varepsilon(A, \underline{f}) = (A, f)$ . l'unicité de  $(A, \underline{f})$  est immédiate.  $\varepsilon$  est donc bijectif sur les flèches. On n'a plus qu'à appliquer le critère 1.13 pour achever de prouver que  $\varepsilon$  est un isomorphisme.

**Proposition 5.2.** Sous les hypothèses suivantes :

- $\mathbb{V}$  est fermée (en plus d'être symétrique),
- $\mathbb{V}$  est complète,
- $|\mathbb{M}|$  est petit,

Alors  $\mathbb{V}\text{-}e(\mathbb{M}, \mathbb{N})$  est de saveur E.

Preuve : Fixons  $F, G \in |\mathbb{V}\text{-}e(\mathbb{M}, \mathbb{N})|$ . On va montrer que  $Tri(-, F, G) : \mathbb{V}^{op} \rightarrow \mathbb{E}ns$  est représentable.  $\mathbb{V}$  étant fermée, pour chaque  $A \in |\mathbb{V}|$ , notons  $\mathbb{V}^e(A, -)$  un adjoint à droite de  $(-) \otimes A$  et  $Ev^A : \mathbb{V}^e(A, -) \otimes A \rightarrow (-)$  une co-unité de cette adjonction. Notons encore  $\mathbb{V}^e$  la catégorie enrichie sur  $\mathbb{V}$  obtenue grâce à ces choix. Notons encore pour  $(A_i)_{i \in I}$ , une petite famille d'objets de  $\mathbb{V}$ ,  $\prod_{i \in I} A_i \xrightarrow{p_i} A_i$  les projections "canoniques". A partir

des flèches  $u_{XX'}$  et  $v_{XX'}$  données pendant la construction de  $\mathbb{V}\text{-}e(\mathbb{M}, \mathbb{N})$  (où  $X, X' \in |\mathbb{M}|$ ) on construit de nouvelles flèches

$$\tilde{u}_{XX'} : \mathbb{N}(FX', GX') \rightarrow \mathbb{V}^e(\mathbb{M}(X, X'), \mathbb{N}(FX, GX')) \text{ et}$$

$$\tilde{v}_{XX'} : \mathbb{N}(FX, GX) \rightarrow \mathbb{V}^e(\mathbb{M}(X, X'), \mathbb{N}(FX, GX'))$$

telles que  $Ev.(\tilde{u}_{XX'} \otimes Id) = u_{XX'}$  et  $Ev.(\tilde{v}_{XX'} \otimes Id) = v_{XX'}$ . Puis des flèches  $u, v : \prod_{X \in |\mathbb{M}|} \mathbb{N}(FX, GX) \rightarrow \prod_{(X, X') \in |\mathbb{M}|^2} \mathbb{V}^e(\mathbb{M}(X, X'), \mathbb{N}(FX, GX'))$  telles que  $\forall X, X' \in |\mathbb{M}|^2$   $p_{(X, X')}.u = \tilde{u}_{XX'}.p_{X'}$  et  $p_{(X, X')}.v = \tilde{v}_{XX'}.p_X$ . Enfin notons  $[F, G] \xrightarrow{i} \prod_{X \in |\mathbb{M}|} \mathbb{N}(FX, GX)$  l'égalisateur de  $(u, v)$ . D'un autre côté, pour chaque  $X \in |\mathbb{M}|$ , notons  $\pi_X$  le composé suivant

$$[F, G] \xrightarrow{i} \prod_{X \in |\mathbb{M}|} \mathbb{N}(FX, GX) \xrightarrow{p_X} \mathbb{N}(FX, GX)$$

$ev_{FG}$  la famille  $([F, G] \xrightarrow{p_X} \mathbb{N}(FX, GX))_{X \in |\mathbb{M}|}$  et  $ev_{FG} = ([F, G], ev_{FG})$ . Constatons déjà que  $ev_{FG} \in Tri([F, G], F, G)$  et montrons que le couple  $([F, G], ev_{FG})$  est une représentation de  $Tri(-, F, G)$ . Soit  $(A, f) : F \rightarrow G$  une flèche de  $\mathbb{V}\text{-}e(\mathbb{M}, \mathbb{N})$  (c.a.d.  $(A, f) \in Tri(A, F, G)$ ). Posons  $h : A \rightarrow \prod_{X \in |\mathbb{M}|} \mathbb{N}(FX, GX)$  l'unique flèche telle que  $\forall X \in |\mathbb{M}|, p_X.h = f_X$ .

On vérifie que  $h$  égalise  $(u, v)$ . Soit alors  $k : A \rightarrow [F, G]$  l'unique flèche telle que  $i.k = h$ . Elle vérifie  $k^*(ev_{FG}) = (A, f)$ . Elle est même unique pour cette propriété. Cela achève de prouver que  $Tri(-, F, G)$  est représentable. D'où la conclusion voulue.

**Remarque 5.3.** La catégorie enrichie (dans  $\mathbb{V}$ ) canonique associée au choix de représentation donné dans la proposition précédente est notée  $\mathbb{V}[\mathbb{M}, \mathbb{N}]$ . C'est la notation donnée dans [1], prop.6.3.1, pour cette même catégorie enrichie.

**Proposition 5.4.** On a  $\underline{\mathbb{V}[\mathbb{M}, \mathbb{N}]} \simeq \mathbb{V}\text{-}Cat(\mathbb{M}, \mathbb{N})$ .

Preuve : Cet isomorphisme est le composé des isomorphismes suivants :

$$\underline{\mathbb{V}[\mathbb{M}, \mathbb{N}]} \simeq \underline{\mathbb{V}\text{-}e(\mathbb{M}, \mathbb{N})} \simeq \mathbb{V}\text{-}Cat(\mathbb{M}, \mathbb{N})$$

## 6. Le plongement de Yoneda mutant.

- Rappelons que  $\mathbb{V}$  est supposée symétrique.
- On se donne maintenant une catégorie mutante  $\mathcal{M}$  sur  $\mathbb{V}$  telle que :  $\forall A \in |\mathbb{V}|, \forall X, Y \in |\mathcal{M}|, Tri(A, X, Y) \in |\mathbb{E}ns|$ . On va construire un foncteur mutant  $\mathcal{M} \xrightarrow{yon} \mathbb{V}\text{-}\mu(\mathcal{M}^{op}, \hat{\mathcal{V}})$  où  $\mathcal{M}^{op}$  a été défini à la section 3 et

où  $\hat{\mathcal{V}} = \mu c(\hat{\mathcal{V}})$ ,  $\hat{\mathcal{V}}$  étant un cas particulier de la catégorie cotensorisée  $\hat{\mathbb{E}}$  définie à la section 2.

- Pour cela, on part du foncteur  $Tri : \mathbb{V}^{op} \times \underline{\mathcal{M}}^{op} \times \underline{\mathcal{M}} \rightarrow \mathbb{E}ns$ . Grâce à fermeture de  $\mathbb{C}AT$ , on obtient un nouveau foncteur  $hom : \underline{\mathcal{M}}^{op} \times \underline{\mathcal{M}} \rightarrow \hat{\mathcal{V}}$  ( $\hat{\mathcal{V}}$  étant la catégorie des préfaisceaux sur  $\mathbb{V}$ ).

- Soit maintenant  $X \in |\mathcal{M}|$ . On construit un foncteur mutant  $yon(X) : \mathcal{M}^{op} \rightarrow \hat{\mathcal{V}}$ .

.. Sur un objet  $Y \in |\mathcal{M}^{op}| = |\mathcal{M}|$ ,  $yon(X)(Y) = hom(Y, X)$ .

.. Sur une flèche  $Y \xrightarrow{f} Z$  de  $\mathcal{M}^{op}$  (alors  $f : Z \rightarrow Y$  est une flèche de  $\mathcal{M}$ ). (on pose  $A = U(f)$ ) considérons la flèche  $h(f, X) : hom(Y, X) \rightarrow hom(Z, X)^A$  (pour cette dernière notation voir la section 2) dans  $\hat{\mathcal{V}}$  définie en  $B \in |\mathbb{V}|$  par  $h(f, X)_B(g) = f \otimes^{op} g$  (on a bien  $U(f \otimes^{op} g) = A \otimes B$  et donc  $f \otimes^{op} g \in Tri(A \otimes B, Z, X) = hom(Z, X)^A(B)$ ). On peut alors poser  $yon(X)(f) = (A, h(f, X)) : yon(X)(Y) \rightarrow yon(X)(Z)$ .

.. Sur une 2-cellule  $\alpha : f \rightarrow f' : Y \rightarrow Z$  de  $\mathcal{M}^{op}$  (alors  $\alpha : f \rightarrow f' : Z \rightarrow Y$  dans  $\mathcal{M}$ ) (notons  $(A \xrightarrow{a} A') = U(f \xrightarrow{\alpha} f')$ ). On vérifie que  $a : (A, h(f, X)) \rightarrow (A', h(f', X))$  est une flèche de  $\hat{\mathcal{V}}$ , ce qui résulte de la commutation du triangle suivant dans  $\hat{\mathcal{V}}$ :

$$\begin{array}{ccc} & hom(Y, X) & \\ h(f', X) \swarrow & & \searrow h(f, X) \\ hom(Z, X)^{A'} & \xrightarrow{Id^a} & hom(Z, X)^A \end{array}$$

On peut alors poser  $yon(X)(\alpha) = (yon(X)(f) \xrightarrow{a} yon(X)(f'))$ .

.. Montrons qu'on obtient ainsi un foncteur mutant  $\mathcal{M}^{op} \rightarrow \hat{\mathcal{V}}$ .

- Pour tout  $Y \in |\mathcal{M}^{op}|$ ,  $yon(X)(Id_Y) = Id_{yon(X)(Y)}$  (En effet  $yon(X)(Id_Y) = (I, h(Id_Y, X))$  et  $Id_{yon(X)(Y)} = (I, \sigma)$  où, pour  $B \in |\mathbb{V}|$ , et  $g \in Tri(B, Y, X)$ ,  $\sigma_B(g) = u_g^*(g) = h(Id_Y, X)_B(g)$  d'où l'identité voulue).

- Pour un couple de flèches composables  $Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{k} T$  dans  $\mathcal{M}^{op}$ , on a  $yon(X)(k \otimes^{op} g) = yon(X)(k) \otimes yon(X)(g)$  (En effet, si on pose  $B = U(g)$  et  $C = U(k)$ , alors  $yon(X)(k \otimes^{op} g) = (C \otimes B, h(k \otimes^{op} g, X))$  où  $h(k \otimes^{op} g, X) : hom(Y, X) \rightarrow hom(T, X)^{C \otimes B}$  est la flèche de  $\hat{\mathcal{V}}$  définie en  $D \in |\mathbb{V}|$  par  $h(k \otimes^{op} g, X)_D(f) = (k \otimes^{op} g) \otimes^{op} f$ . D'un autre côté  $yon(X)(k) \otimes yon(X)(g) = (C, h(k, X)) \otimes (B, h(g, X)) = (C \otimes B, \delta)$  où

$\delta = h(k, X) \circ h(g, X)$  est la flèche composée suivante:

$$hom(Y, X) \xrightarrow{h(g, X)} hom(Z, X)^B \xrightarrow{h(k, X)^B} (hom(T, X)^C)^B \xrightarrow{\alpha_m} hom(T, X)^{C \otimes B}$$

Appliquée en  $D \in |\mathbb{V}|$  à  $f \in Tri(D, Y, X)$  donne  $\delta_D(f) =$

$$ass^*(k \otimes^{op} (g \otimes^{op} f)) = (k \otimes^{op} g) \otimes^{op} f = h(k \otimes^{op} g, X)_D(f). \text{ D'où l'égalité voulue).}$$

Il reste à appliquer le critère 1.11 pour conclure que  $yon(X)$  est un foncteur mutant.

- Construisons maintenant  $yon$  sur une flèche. Soit  $X \xrightarrow{f} Y$  une flèche de  $\mathcal{M}$ . On construit  $yon(f) : yon(X) \rightarrow yon(Y)$  dans  $\mathbb{V}\text{-}\mu(\mathcal{M}^{op}, \hat{\mathbb{V}})$ . Posons  $A = U(f)$ . On pose aussi  $yon(f) = (A, \underline{yon}(f))$  où  $\underline{yon}(f) = (yon(f)_Z)_{Z \in |\mathcal{M}^{op}|}$  avec  $yon(f)_Z = (A, h(Z, f))$  et  $h(Z, f) : hom(Z, X) \rightarrow hom(Z, Y)^A$  est défini en  $B$  sur  $g \in Tri(B, Z, X)$ , par  $h(Z, f)_B(g) = f \otimes g$  (comme  $U(f \otimes g) = A \otimes B$ ,  $f \otimes g$  est bien dans  $Tri(A \otimes B, Z, Y) = h(Z, Y)^A(B)$ ).  $yon(f)$  est une flèche de  $\mathbb{V}\text{-}\mu(\mathcal{M}^{op}, \hat{\mathbb{V}})$  car  $\forall Z \in |\mathcal{M}^{op}|$ ,  $U(yon(f)_Z) = A$  et pour toute flèche  $Z \xrightarrow{k} T$  de  $\mathcal{M}^{op}$ , si on pose  $C = U(k)$ , on a

$$sym^*(yon(Y)(k) \otimes yon(f)_Z) \underset{(I)}{=} yon(f)_T \otimes yon(X)(k)$$

(où  $C \otimes A \xrightarrow{sym} A \otimes C$ ). En effet  $yon(Y)(k) \otimes yon(f)_Z = (C, h(k, Y)) \otimes (A, h(Z, f)) = (C \otimes A, h(k, Y) \circ h(Z, f))$  et  $yon(f)_T \otimes yon(X)(k) = (A, h(T, f)) \otimes (C, h(k, X)) = (A \otimes C, h(T, f) \circ h(k, X))$ . On aura alors l'identité (I) si le triangle (T) suivant commute dans  $\hat{\mathbb{V}}$  :

$$\begin{array}{ccc} & hom(Z, X) & \\ h(T, f) \circ h(k, X) \swarrow & & \searrow h(k, Y) \circ h(Z, f) \\ hom(T, Y)^{A \otimes C} & \xrightarrow{Id^{sym}} & hom(T, Y)^{C \otimes A} \end{array}$$

Or  $h(k, Y) \circ h(Z, f)$  est le composé suivant :

$$hom(Z, X) \xrightarrow{h(Z, f)} hom(Z, Y)^A \xrightarrow{h(k, Y)^A} (hom(T, Y)^C)^A \xrightarrow{\alpha_m} hom(T, Y)^{C \otimes A}$$

et  $h(T, f) \circ h(k, X)$  est le composé :

$$hom(Z, X) \xrightarrow{h(k, X)} hom(T, X)^C \xrightarrow{h(T, f)^C} (hom(T, Y)^A)^C \xrightarrow{\alpha_m} hom(T, Y)^{A \otimes C}$$

En appliquant en  $B \in |\mathbb{V}|$  à  $g \in Tri(B, Z, X)$  les deux composés possibles

on obtient  $(h(k, Y) \circ h(Z, f))_B(g) = ass^*(k \otimes^{op} (f \otimes g))$  où ici  $ass : (C \otimes A) \otimes B \rightarrow C \otimes (A \otimes B)$  et  $(h(T, f) \circ h(k, X))_B(g) = ass'^*(f \otimes (k \otimes^{op} g))$  où cette fois  $ass' : (A \otimes C) \otimes B \rightarrow A \otimes (C \otimes B)$ . Ainsi, pour montrer la commutation du triangle (T) il nous suffit de montrer l'identité suivante pour tout  $g$  :

$$(sym \otimes Id)^* ass'^*(f \otimes (k \otimes^{op} g)) = ass^*(k \otimes^{op} (f \otimes g))$$

ou encore, en utilisant la définition de  $\otimes^{op}$ , on est ramené à l'identité :  $F_g^*(f \otimes (g \otimes k)) = F_d^*(f \otimes (g \otimes k))$  où  $F_g$  et  $F_d$  sont les composés suivants :

$$((C \otimes A) \otimes B \xrightarrow{sym \otimes Id} (A \otimes C) \otimes B \xrightarrow{ass'} A \otimes (C \otimes B) \xrightarrow{Id \otimes sym} A \otimes (B \otimes C))$$

$$((C \otimes A) \otimes B \xrightarrow{ass} C \otimes (A \otimes B) \xrightarrow{sym} (A \otimes B) \otimes C \xrightarrow{ass} A \otimes (B \otimes C)).$$

Mais  $F_g = F_d$  (par définition d'une symétrie dans une catégorie monoïdale symétrique). D'où l'identité (I) annoncée.

- Pour construire  $yon$  sur une 2-cellule, par exemple  $\alpha : f \rightarrow f' : X \rightarrow Y$ , (on pose  $(A \xrightarrow{a} A') = U(f \xrightarrow{\alpha} f')$ ) il nous faut montrer que  $a : yon(f) \rightarrow yon(f')$  est une 2-cellule de  $\mathbb{V}\text{-}\mu(\mathcal{M}^{op}, \hat{\mathcal{V}})$ , c'est-à-dire que, pour tout  $Z$  dans  $|\mathcal{M}^{op}|$ ,  $a^*(yon(f')_Z) = yon(f)_Z$ , ou encore, que le triangle suivant commute dans  $\hat{\mathcal{V}}$  :

$$\begin{array}{ccc} & hom(Z, X) & \\ h(Z, f') \swarrow & & \searrow h(Z, f) \\ hom(Z, Y)^{A'} & \xrightarrow{Id^a} & hom(Z, Y)^A \end{array}$$

ce que l'on vérifie facilement. On pose alors  $yon(\alpha) = (yon(f) \xrightarrow{a} yon(f'))$ .

- Pour finir de montrer que  $\mathcal{M} \xrightarrow{yon} \mathbb{V}\text{-}\mu(\mathcal{M}^{op}, \hat{\mathcal{V}})$  est un foncteur mutant il nous reste à montrer essentiellement les identités suivantes :

1) Pour tout  $X \in |\mathcal{M}|$ ,  $yon(Id_X) = Id_{yon(X)}$ .

2) Pour tout  $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$  dans  $\mathcal{M}$ , on a  $yon(g \otimes f) = yon(g) \otimes yon(f)$ .

(1) On a  $Id_{yon(X)} = (I, \underline{Id}_{yon(X)})$  où  $\underline{Id}_{yon(X)} = (Id_{hom(Z, X)})_{Z \in |\mathcal{M}|}$  et où  $Id_{hom(Z, X)}$  est une identité dans  $\hat{\mathcal{V}}$  ce qui s'écrit  $Id_{hom(Z, X)} = (I, \sigma)$  où  $hom(Z, X) \xrightarrow{\sigma} hom(Z, X)^I$ . D'un autre côté  $yon(Id_X) = (I, \underline{yon}(Id_X))$

où  $yon(Id_X) = (hom(Z, X) \xrightarrow{(I, h(Z, Id_X))} hom(Z, X))_{Z \in |\mathcal{M}|}$ . Or on vérifie facilement que  $h(Z, Id_X) = \sigma$ . D'où l'identité voulu.

(2) Il nous suffit de vérifier que pour tout  $S \in |\mathcal{M}|$  on a  $h(S, g \otimes f) = h(S, g) \circ h(S, f)$  ou encore que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc}
 & \text{hom}(S, Y)^A & \xrightarrow{h(S, g)^A} (\text{hom}(S, Z)^B)^A \\
 \text{hom}(S, X) & \nearrow h(S, f) & \searrow \alpha m \\
 & \text{hom}(S, Z)^{B \otimes A} &
 \end{array}$$

$\xrightarrow{h(S, g \otimes f)}$

ce que l'on vérifie facilement.

En utilisant le critère 1.11 on achève de prouver que  $\mathcal{M} \xrightarrow{yon} \mathbb{V}\text{-}\mu(\mathcal{M}^{op}, \hat{\mathcal{V}})$  est un foncteur mutant.

## 7. Le plongement en saveur E.

• On suppose maintenant que la catégorie mutante  $\mathcal{M}$  est de saveur E. Cela va nous permettre de construire un foncteur mutant  $\mathcal{M} \xrightarrow{yo} \mathbb{V}\text{-}\mu(\mathcal{M}^{op}, \mathcal{V})$  où  $\mathcal{V} = \mu t(\mathbb{V})$ ,  $\mathbb{V}$  étant vue comme une catégorie tensorisée sur elle-même. Puis on vérifiera que le triangle suivant commute à isomorphisme près :

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{M} & \xrightarrow{yo} & \mathbb{V}\text{-}\mu(\mathcal{M}^{op}, \mathcal{V}) \\
 & \searrow yon & \swarrow \mathbb{V}\text{-}\mu(Id, \mu y) \\
 & \mathbb{V}\text{-}\mu(\mathcal{M}^{op}, \hat{\mathcal{V}}) &
 \end{array}$$

( pour les définitions des foncteurs mutants  $\mu y$  et  $\mathbb{V}\text{-}\mu(Id, \mu y)$  voir les sections 2 et 4).

•  $\mathcal{M}$  étant supposé de saveur E, cela signifie que pour tout  $X, Y$  dans  $|\mathcal{M}|$ , le préfaisceau  $\text{hom}(X, Y)$  est représentable. Choisissons donc une représentation  $(\mathbb{M}(X, Y), ev_{XY})$  de ce préfaisceau. Nous pouvons maintenant construire le foncteur mutant  $yo$ .

- Sur un objet  $X \in |\mathcal{M}|$ , on construit le foncteur mutant  $yo(X) : \mathcal{M}^{op} \rightarrow \mathcal{V}$  en posant :

.. sur un objet  $Y \in |\mathcal{M}^{op}|$ ,  $yo(X)(Y) = \mathbb{M}(Y, X)$ ,

.. sur une flèche  $Y \xrightarrow{f} Y'$  de  $\mathcal{M}^{op}$  (donc  $Y' \xrightarrow{f} Y$  est une flèche de  $\mathcal{M}$ ) après avoir posé  $B = U(f)$ , on définit  $yo(X)(Y) \xrightarrow{yo(X)(f)} yo(X)(Y')$  en posant

$yo(X)(f) = (B, yo(X)(f))$  où  $yo(X)(f) : B \otimes \mathbb{M}(Y, X) \rightarrow \mathbb{M}(Y', X)$  est l'unique flèche de  $\mathbb{V}$  définie par  $\underline{yo(X)}(f)^*(ev_{Y'X}) = f \otimes^{op} ev_{YX}$ ,

.. sur une 2-cellule  $\beta : f \rightarrow f' : Y \rightarrow Y'$  de  $\mathcal{M}^{op}$ , si on pose  $(B \xrightarrow{b} B') = U(f \xrightarrow{\beta} f')$ , on voit que  $b : yo(X)(f) \rightarrow yo(X)(f')$  est une 2-cellule de  $\mathcal{V}$  car  $\underline{yo(X)}(f').(b \otimes Id) = \underline{yo(X)}(f)$  (en effet  $(b \otimes Id)^* \underline{yo(X)}(f')^*(ev_{Y'X}) = (b \otimes Id)^*(f' \otimes^{op} ev_{YX}) = (b \otimes Id)^* sym^*(ev_{YX} \otimes f') = sym^*(Id \otimes b)^*(ev_{YX} \otimes f') = sym^*(ev_{YX} \otimes f) = f \otimes^{op} ev_{YX}$ ). On peut donc poser :

$$yo(X)(f \xrightarrow{\beta} f') = (yo(X)(f) \xrightarrow{b} yo(X)(f')).$$

- Pour établir que  $yo(X)$  est un foncteur mutant  $\mathcal{M}^{op} \rightarrow \mathcal{V}$ , on montre que :

.. Pour tout  $Y \in |\mathcal{M}^{op}|$ , on a  $yo(X)(Id_Y) = Id_{yo(X)(Y)}$  (en effet

$$yo(X)(Id_Y) = (I, \underline{yo(X)}(Id_Y)) = (I, u_g) = Id_{\mathbb{M}(Y, X)} = Id_{yo(X)(Y)},$$

.. Pour tout couple de flèches composables  $Y \xrightarrow{f} Y' \xrightarrow{f'} Y''$  dans  $\mathcal{M}^{op}$  on a  $yo(X)(f' \otimes^{op} f) = yo(X)(f') \otimes yo(X)(f)$  (En effet, posons  $B = U(f)$ ,  $B' = U(f')$ . On a  $yo(X)(f') \otimes yo(X)(f) =$

$(B' \otimes B, \underline{yo(X)}(f') \circ \underline{yo(X)}(f))$  où  $\underline{yo(X)}(f') \circ \underline{yo(X)}(f)$  est la flèche composée suivante :

$$(B' \otimes B) \otimes \mathbb{M}(Y, X) \xrightarrow{ass} B' \otimes (B \otimes \mathbb{M}(Y, X)) \xrightarrow{Id \otimes \underline{yo(X)}(f)} B' \otimes \mathbb{M}(Y', X) \xrightarrow{\underline{yo(X)}(f')} \mathbb{M}(Y'', X).$$

Donc  $(\underline{yo(X)}(f') \circ \underline{yo(X)}(f))^*(ev_{Y''X}) =$

$$ass^*(Id \otimes \underline{yo(X)}(f))^* \underline{yo(X)}(f')^*(ev_{Y''X}) =$$

$$ass^*(Id \otimes \underline{yo(X)}(f))^*(f' \otimes^{op} ev_{Y'X}) = ass^*(f' \otimes^{op} (f \otimes^{op} ev_{YX})) = (f' \otimes^{op} f) \otimes^{op} ev_{YX} = \underline{yo(X)}(f' \otimes^{op} f)^*(ev_{Y''X}). \text{ D'où l'identité voulue.}$$

.. Pour le reste de la preuve, essentiellement, on applique le critère 1.11.

- Sur une flèche  $X \xrightarrow{x} X'$  de  $\mathcal{M}$  (où  $A = U(x)$ ), on construit  $yo(x) : yo(X) \rightarrow yo(X')$  en posant  $yo(x) = (A, \underline{yo(x)})$  où  $\underline{yo(x)} =$

$$(\mathbb{M}(Y, X) \xrightarrow{\underline{yo(x)}_Y} \mathbb{M}(Y, X'))_{Y \in |\mathcal{M}^{op}|} \text{ et où } yo(x)_Y = (A, \underline{yo(x)}_Y), \underline{yo(x)}_Y : A \otimes \mathbb{M}(Y, X) \rightarrow \mathbb{M}(Y, X') \text{ étant l'unique flèche de } \mathbb{V} \text{ telle que } \underline{yo(x)}_Y^*(ev_{YX'}) = x \otimes ev_{YX}. \text{ } yo(x) \text{ est bien une flèche } yo(X) \rightarrow yo(X')$$

dans  $\mathbb{V}\text{-}\mu(\mathcal{M}^{op}, \mathcal{V})$  (En effet,  $Y \xrightarrow{f} Y'$  étant une flèche quelconque de  $\mathcal{M}^{op}$  (on pose  $B = U(f)$ ) on veut montrer que  $sym_{A,B} : yo(x)_{Y'} \otimes yo(X)(f) \rightarrow yo(X')(f) \otimes yo(x)_Y$  est une 2-cellule de  $\mathcal{V}$ . Mais  $yo(X')(f) \otimes yo(x)_Y = (B \otimes A, \underline{yo(X')}(f) \circ \underline{yo(x)}_Y)$  où  $\underline{yo(X')}(f) \circ \underline{yo(x)}_Y$  est le composé  $F$  suivant :

$$(B \otimes A) \otimes \mathbb{M}(Y, X) \xrightarrow{ass} B \otimes (A \otimes \mathbb{M}(Y, X)) \xrightarrow{Id \otimes yo(x)_Y} B \otimes \mathbb{M}(Y, X') \xrightarrow{yo(X')(f)} \mathbb{M}(Y', X')$$

et  $yo(x)_{Y'} \otimes yo(X)(f) = (A \otimes B, \underline{yo(x)}_{Y'} \circ \underline{yo(X)}(f))$  où  $\underline{yo(x)}_{Y'} \circ \underline{yo(X)}(f)$  est le composé  $G$  suivant:

$$(A \otimes B) \otimes \mathbb{M}(Y, X) \xrightarrow{ass} A \otimes (B \otimes \mathbb{M}(Y, X)) \xrightarrow{Id \otimes yo(X)(f)} A \otimes \mathbb{M}(Y', X) \xrightarrow{yo(x)_{Y'}} \mathbb{M}(Y', X')$$

. Il nous faut montrer que le triangle suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} (A \otimes B) \otimes \mathbb{M}(Y, X) & \xrightarrow{sym \otimes Id} & (B \otimes A) \otimes \mathbb{M}(Y, X) \\ & \searrow G & \swarrow F \\ & \mathbb{M}(Y', X') & \end{array}$$

Or  $F^*(ev_{Y', X'}) = (ass.sym.ass)^*(x \otimes (ev_{YX} \otimes f))$

et  $G^*(ev_{Y', X'}) = ((Id \otimes sym).ass)^*(x \otimes (ev_{YX} \otimes f))$  et donc

$(F.(sym \otimes Id))^*(ev_{Y', X'}) = (ass.sym.ass.(sym \otimes Id))^*(x \otimes (ev_{YX} \otimes f))$ .

Mais  $ass.sym.ass.(sym \otimes Id) = (Id \otimes sym).ass$  (axiome de symétrie)

donc  $(F.(sym \otimes Id))^*(ev_{Y', X'}) = G^*(ev_{Y', X'})$  et ainsi  $F.(sym \otimes Id) = G$ .

D'où la conclusion voulue.

- Sur une 2-cellule  $\alpha : x \rightarrow x' : X \rightarrow X'$  de  $\mathcal{M}$  (on pose  $(A \xrightarrow{a} A') = U(x \xrightarrow{\alpha} x')$ ). Il nous faut montrer que  $a : yo(x) \rightarrow yo(x') : yo(X) \rightarrow yo(X')$  est une 2-cellule de  $\mathbb{V}\text{-}\mu(\mathcal{M}^{op}, \mathcal{V})$  ou encore que, pour tout  $Y$  dans  $|\mathcal{M}^{op}|$ ,  $a^*(yo(x')_Y) = yo(x)_Y$  c.a.d. que le triangle suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} A \otimes \mathbb{M}(Y, X) & \xrightarrow{a \otimes Id} & A' \otimes \mathbb{M}(Y, X) \\ & \searrow \underline{yo(x)}_Y & \swarrow \underline{yo(x')}_Y \\ & \mathbb{M}(Y, X') & \end{array}$$

ce que l'on vérifie facilement.

- Montrons qu'on a ainsi construit un foncteur mutant  $\mathcal{M} \rightarrow \mathbb{V}\text{-}\mu(\mathcal{M}^{op}, \mathcal{V})$ .

.. Pour  $X \in |\mathcal{M}|$ , on a  $yo(Id_X) = Id_{yo(X)}$  (En effet  $Id_{yo(X)} = (I, \underline{Id}_{yo(X)})$  où  $\underline{Id}_{yo(X)} = (Id_{\mathbb{M}(Y, X)})_{Y \in |\mathcal{M}^{op}|}$  et

$Id_{\mathbb{M}(Y, X)} = (I, I \otimes \mathbb{M}(Y, X) \xrightarrow{u_g} \mathbb{M}(Y, X))$ . D'un autre côté  $yo(Id_X) =$

$(I, \underline{yo(Id_X)})$  où  $\underline{yo(Id_X)} = (yo(Id_X)_Y)_{Y \in |\mathcal{M}^{op}|}$  avec  $yo(Id_X)_Y =$

$(I, \underline{yo(Id_X)}_Y)$  et  $\underline{yo(Id_X)}_Y : I \otimes \mathbb{M}(Y, X) \rightarrow \mathbb{M}(Y, X)$  est l'unique flèche

de  $\mathbb{V}$  telle que  $\underline{yo(Id_X)}_Y^*(ev_{YX}) = Id_X \otimes ev_{YX}$ . Mais alors  $\underline{yo(Id_X)}_Y = u_g$ ,

d'où l'identité voulue).

.. Pour un couple de flèches composables  $X \xrightarrow{x} X' \xrightarrow{x'} X''$  dans  $\mathcal{M}$  on a  $yo(x' \otimes x) = yo(x') \otimes yo(x)$  (En effet, posons  $A = U(x)$ ,  $A' = U(x')$ , alors  $yo(x') \otimes yo(x) = (A' \otimes A, \underline{yo(x')} \circ \underline{yo(x)})$  où, pour tout  $Y \in |\mathcal{M}^{op}|$ ,  $(\underline{yo(x')} \circ \underline{yo(x)})_Y = yo(x')_Y \otimes yo(x)_Y = (A' \otimes A, \underline{yo(x')}_Y \circ \underline{yo(x)}_Y)$  et où  $\underline{yo(x')}_Y \circ \underline{yo(x)}_Y$  est le composé suivant :

$$(A' \otimes A) \otimes \mathbb{M}(Y, X) \xrightarrow{ass} A' \otimes (A \otimes \mathbb{M}(Y, X)) \xrightarrow{Id \otimes \underline{yo(x)}_Y} A' \otimes \mathbb{M}(Y, X') \xrightarrow{\underline{yo(x')}_Y} \mathbb{M}(Y, X'')$$

Or  $ass^*(Id \otimes \underline{yo(x)}_Y)^* \underline{yo(x')}^*(ev_{YX''}) = (x' \otimes x) \otimes ev_{YX} = \underline{yo(x' \otimes x)}_Y^*(ev_{YX''})$  et donc  $\underline{yo(x')}_Y \circ \underline{yo(x)}_Y = \underline{yo(x' \otimes x)}_Y$ . D'où l'identité voulue).

.. Pour finir de prouver que  $yo$  est un foncteur mutant on applique essentiellement le critère 1.11.

• Il nous faut maintenant établir que  $\mathbb{V}\text{-}\mu(Id, \mu y).yo \simeq yon$ . Notons  $\bar{\mu} = \mathbb{V}\text{-}\mu(Id, \mu y)$  et  $\bar{y} = \bar{\mu}.yo$ . Alors, pour chaque  $X \in |\mathcal{M}|$ ,

$$\bar{y}(X) = (\mathcal{M}^{op} \xrightarrow{yo(X)} \mu t(\mathbb{V}) \xrightarrow{\mu y} \mu c(\hat{\mathbb{V}})).$$

On construit maintenant une transformation naturelle mutante  $\gamma : \bar{y} \rightarrow yon : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{V}\text{-}\mu(\mathcal{M}^{op}, \hat{\mathbb{V}})$ . Pour cela, on commence par considérer pour  $X, Y$  dans  $|\mathcal{M}|$  et  $A \in |\mathbb{V}|$  l'application  $\Gamma_{XY,A} : \mathbb{V}(A, \mathbb{M}(Y, X)) \rightarrow Tri(A, Y, X)$  définie par  $\Gamma_{XY,A}(f) = f^*(ev_{YX})$  dans  $\mathcal{M}(Y, X)$ . On vérifie que  $\Gamma_{XY,A}$  est naturel en  $A$ . On obtient ainsi une flèche  $\Gamma_{XY} : y(\mathbb{M}(Y, X)) \rightarrow hom(Y, X)$  dans  $\hat{\mathbb{V}}$ . Remarquons au passage que  $y(\mathbb{M}(Y, X)) = \bar{y}(X)(Y)$ . On définit ensuite la flèche composée suivante :

$$(\underline{\gamma}_X)_Y = (\bar{y}(X)(Y) \xrightarrow{\Gamma_{XY}} hom(Y, X) \xrightarrow{\sigma} hom(Y, X)^I)$$

puis  $(\gamma_X)_Y = (I, (\underline{\gamma}_X)_Y)$ . Ainsi  $(\gamma_X)_Y : \bar{y}(X)(Y) \rightarrow yon(X)(Y)$  est une flèche de  $\hat{\mathbb{V}}$ . On montre ensuite que  $\underline{\gamma}_X =$

$(\bar{y}(X)(Y) \xrightarrow{(\gamma_X)_Y} yon(X)(Y))_{Y \in |\mathcal{M}^{op}|}$  est une transformation naturelle mutante  $\bar{y}(X) \rightarrow yon(X)$ . Pour cela on se donne une flèche  $Y \xrightarrow{g} Y'$  de  $\mathcal{M}^{op}$  et on montre que le carré suivant commute strictement dans  $\hat{\mathbb{V}}$  :

$$\begin{array}{ccc}
\bar{y}(X)(Y) & \xrightarrow{(\gamma_X)_Y} & yon(X)(Y) \\
\bar{y}(X)(g) \downarrow & & \downarrow yon(X)(g) \\
\bar{y}(X)(Y') & \xrightarrow{(\gamma_X)_{Y'}} & yon(X)(Y')
\end{array}$$

Grâce à la prop.2.1 cela revient à montrer que le carré suivant commute dans  $\hat{\mathbb{V}}$  (où  $B = U(g)$ ) :

$$\begin{array}{ccc}
y(\mathbb{M}(Y, X)) & \xrightarrow{\Gamma_{XY}} & hom(Y, X) \\
\underline{y(yo(X)(g))} \downarrow & & \downarrow h(g, X) \\
y(\mathbb{M}(Y', X))^B & \xrightarrow{\Gamma_{XY'}^B} & hom(Y', X)^B
\end{array}$$

Mais pour tout  $A \in |\mathbb{V}|$  et  $A \xrightarrow{f} \mathbb{M}(Y, X)$ , on a :  $h(g, X)_A \Gamma_{XY, A}(f) = g \otimes^{op} f^*(ev_{YX}) = (Id \otimes f)^*(g \otimes^{op} ev_{YX}) = \Gamma_{XY', B \otimes A} \bar{y}(yo(x)g)_A(f)$ . D'où les commutations voulues. Ainsi  $\underline{\gamma}_X : \bar{y}(X) \rightarrow yon(X)$  est une transformation naturelle mutante. Posons maintenant  $\gamma_X = (I, \underline{\gamma}_X)$ . On a  $\gamma_X : \bar{y}(X) \rightarrow yon(X)$  qui est une flèche de  $\underline{\mathbb{V} - \mu(\mathcal{M}^{op}, \hat{\mathbb{V}})}$  (voir la prop.4.2).

- Montrons maintenant que  $\gamma = (\gamma_X)_{X \in |\mathcal{M}|}$  est une transformation naturelle mutante  $\bar{y} \rightarrow yon$ . Soit donc  $X \xrightarrow{x} X'$  une flèche de  $\mathcal{M}$ . On va montrer que le carré suivant commute strictement dans  $\mathbb{V} - \mu(\mathcal{M}^{op}, \hat{\mathbb{V}})$  :

$$\begin{array}{ccc}
\bar{y}(X) & \xrightarrow{\gamma_X} & yon(X) \\
\bar{y}(x) \downarrow & & \downarrow yon(x) \\
\bar{y}(X') & \xrightarrow{\gamma_{X'}} & yon(X')
\end{array}$$

Posons déjà  $A = U(x)$ . Il faut donc montrer que pour tout  $Y \in |\mathcal{M}^{op}|$  on a, dans  $\hat{\mathbb{V}}$ ,  $yon(x)_Y (\gamma_X)_Y = (\gamma_{X'})_Y \bar{y}(x)_Y$ . (Les compositions sont strictes) (voir le lemme 4.1). Mais grâce, à nouveau, à la prop.2.1 cela revient à montrer que le carré suivant commute dans  $\hat{\mathbb{V}}$  :

$$\begin{array}{ccc}
y(\mathbb{M}(Y, X)) & \xrightarrow{\Gamma_{XY}} & hom(Y, X) \\
\downarrow \underline{y(yo(x))_Y} & & \downarrow h(Y, x) \\
y(\mathbb{M}(Y, X'))^A & \xrightarrow{\Gamma_{X'Y}^A} & hom(Y, X')^A
\end{array}$$

Or, appliqué en  $B \in |\mathbb{V}|$ , sur  $B \xrightarrow{b} \mathbb{M}(Y, X)$ , on obtient :

$\Gamma_{X'Y, A \otimes B} \underline{y(yo(x))_Y}_B(b) = (\underline{yo(x))_Y} \cdot Id \otimes b)^*(ev_{YX'}) = (Id \otimes b)^*(x \otimes ev_{YX}) = x \otimes b^*(ev_{YX}) = h(Y, X)_B \cdot \Gamma_{XY, B}(b)$ , ce qui achève de prouver que  $\gamma : \bar{y} \rightarrow yon$  est une transformation naturelle mutante. Enfin  $\gamma$  est inversible. En effet, pour tout  $X, Y \in |\mathcal{M}|$  et  $A \in |\mathbb{V}|$ ,  $\Gamma_{XY, A}$  est bijectif car  $hom(Y, X)$  est représentable. Donc  $\Gamma_{XY}$  est inversible dans  $\hat{\mathbb{V}}$ . Alors  $(\underline{\gamma}_X)_Y$  est aussi inversible dans  $\hat{\mathbb{V}}$  (car  $\hat{\mathbb{V}} \simeq \hat{\mathbb{V}}$ ). Ceci étant vrai pour tout  $Y$ ,  $\underline{\gamma}_X$  est une transformation naturelle mutante inversible (on applique la prop.1.14 ). Alors  $\gamma_X$  est lui aussi inversible (voir la prop.4.2 ). Et ceci pour tout  $X$ . Enfin, en appliquant à nouveau la prop.1.14 , la transformation naturelle mutante  $\gamma$  est elle même inversible.

## 8. Le Lemme de Yoneda mutant.

• Notre but ici est de montrer le théorème suivant :

**Théorème 8.1.** (le lemme de Yoneda mutant) : Soit  $\mathcal{M}$  une catégorie mutante sur une catégorie monoïdale symétrique  $\mathbb{V}$ . Soit aussi  $F : \mathcal{M}^{op} \rightarrow \hat{\mathbb{V}}$  un foncteur mutant (où  $\hat{\mathbb{V}} = \mu c(\hat{\mathbb{V}})$  et où la structure cotensorisée de  $\hat{\mathbb{V}}$  est défini à la section 2 - Pour  $\mu c$  voir la section 1). On fixe aussi un objet  $X$  de  $\mathcal{M}$ . Notons :

- 1)  $\mathbb{C}_X \xrightarrow{U} \mathbb{V}$  la fibration discrète associée au préfaisceau  $F(X) \in |\hat{\mathbb{V}}| = |\hat{\mathbb{V}}|$ ,
- 2)  $(\mathbb{C}'_X \xrightarrow{U} \mathbb{V}) = (\mathbb{V} - \mu(\mathcal{M}^{op}, \hat{\mathbb{V}})(yon(X), F) \xrightarrow{U_{yon(X), F}} \mathbb{V})$  (autre fibration discrète).

Alors  $(\mathbb{C}'_X, U) \simeq (\mathbb{C}_X, U)$  (un isomorphisme de fibration discrète).

Plus précisément l'isomorphisme  $\theta_X : (\mathbb{C}'_X, U) \rightarrow (\mathbb{C}_X, U)$  est donné sur  $(A, t) \in |\mathbb{C}'_X|$ , par  $\theta_X(A, t) = (A, x)$  où  $x$  est l'image de  $Id_X$  par l'application composée :

$$Tri(I, X, X) \xrightarrow{(t_X)_I} F(X)(A \otimes I) \xrightarrow{F(X)(u_d^{-1})} F(X)(A) \text{ où } t_X = (A, \underline{t}_X).$$

**Preuve :** •  $\theta_X$  est bien défini sur les flèches. Par exemple sur  $(A', t') \xrightarrow{a} (A, t)$  de  $\mathbb{C}_X$ , on voit facilement que  $F(X)(a)(x) = x'$  où  $(A, x) = \theta_X(A, t)$ ,  $(A', x') = \theta_X(A', t')$ .  $\theta_X$  est clairement fonctoriel. C'est même un morphisme de fibration discrète.

• On construit maintenant un nouveau morphisme  $\theta'_X : (\mathbb{C}_X, U) \rightarrow (\mathbb{C}'_X, U)$ .  
- Fixons  $(A, x) \in |\mathbb{C}_X|$  (donc  $x \in F(X)(A)$ ), et soit  $Y \in |\mathcal{M}|$  et  $B \in |\mathbb{V}|$ , on considère l'application  $T_{Y,B} : Tri(B, Y, X) \rightarrow F(Y)(A \otimes B)$  où  $T_{Y,B}(f)$  est l'image de  $x$  par l'application composée :

$$F(X)(A) \xrightarrow{\underline{F}(f)_A} F(Y)(B \otimes A) \xrightarrow{F(Y)(sym)} F(Y)(A \otimes B)$$

$\underline{F}(f) : F(X) \rightarrow F(Y)^B$  provenant de  $F(f) = (B, \underline{F}(f)) : F(X) \rightarrow F(Y)$ , flèche de  $\hat{\mathbb{V}}$ .

..  $T_{Y,B}$  est naturel en  $B$ . (En effet  $B' \xrightarrow{b} B$  étant une flèche de  $\mathbb{V}$ , il nous faut montrer la commutation du carré suivant :

$$\begin{array}{ccc} Tri(B, Y, X) & \xrightarrow{T_{Y,B}} & F(Y)(A \otimes B) \\ b^* \downarrow & & \downarrow F(Y)(Id \otimes b) \\ Tri(B', Y, X) & \xrightarrow{T_{Y,B'}} & F(Y)(A \otimes B') \end{array}$$

Or  $F(Y)(Id_A \otimes b).T_{Y,B}(f) = F(Y)(sym.Id_A \otimes b).\underline{F}(f)_A(x)$  où  $sym = sym_{A,B}$  et  $T_{Y,B'}.b^*(f) = F(Y)(sym').\underline{F}(f')_A(x)$  où  $sym' = sym_{A,B'}$  et  $f' = b^*(f)$ . Mais  $\underline{F}(f') = (F(X) \xrightarrow{\underline{F}(f)} F(Y)^B \xrightarrow{F(Y)^b} F(Y)^{B'})$ , car  $F$  est un foncteur mutant, et donc  $T_{Y,B'}.b^*(f) = F(Y)(b \otimes Id_A.sym').\underline{F}(f)_A(x) = F(Y)(sym.Id_A \otimes b).\underline{F}(f)_A(x) = F(Y)(Id_A \otimes b).T_{Y,B}(f)$ . Notons  $t_Y : hom(Y, X) \rightarrow F(Y)^A$  la transformation naturelle obtenue et  $t_Y = (A, t_Y) : yon(X)(Y) \rightarrow F(Y)$  la flèche de  $\hat{\mathbb{V}}$  correspondante.

.. Après avoir posé  $t = (t_Y)_{Y \in |\mathcal{M}^{op}|}$ , montrons que  $(A, t) : yon(X) \rightarrow F$  est une flèche de  $\mathbb{V}\text{-}\mu(\mathcal{M}^{op}, \hat{\mathbb{V}})$ . Pour cela, montrons que pour toute flèche  $Y \xrightarrow{y} Y'$  de  $\mathcal{M}^{op}$ ,  $t_{Y'} \otimes yon(X)(y) \xrightarrow{sym} F(y) \otimes t_Y$  (où  $sym = sym_{A,B}$ ) est une 2-cellule de  $\hat{\mathbb{V}}$ . On pose  $B = U(y)$ . Alors  $F(y) \otimes t_Y = (B \otimes A, \underline{F}(y) \circ t_Y)$  où  $\underline{F}(y) \circ t_Y$  est le composé suivant dans  $\hat{\mathbb{V}}$  :

$$hom(Y, X) \xrightarrow{t_Y} F(Y)^A \xrightarrow{\underline{F}(y)^A} (F(Y')^B)^A \xrightarrow{\alpha m} F(Y')^{B \otimes A}$$

et  $t_{Y'} \otimes yon(x)(y) = (A \otimes B, \underline{t}_{Y'} \circ h(y, X))$  où  $\underline{t}_{Y'} \circ h(y, X)$  est le composé suivant :

$$hom(Y, X) \xrightarrow{h(y, X)} hom(Y', X)^B \xrightarrow{\underline{t}_{Y'}^B} (F(Y')^A)^B \xrightarrow{\alpha m} F(Y')^{A \otimes B}.$$

Il nous faut donc montrer que le triangle suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} & hom(Y, X) & \\ \underline{F}(y) \circ \underline{t}_{Y'} \swarrow & & \searrow \underline{t}_{Y'} \circ h(y, X) \\ F(Y')^{B \otimes A} & \xrightarrow{Id^{sym}} & F(Y')^{A \otimes B} \end{array}$$

Appliqué en  $C \in |\mathbb{V}|$  sur  $f \in Tri(C, Y, X)$ , cela revient à montrer que le diagramme suivant commute en  $x$  :

$$\begin{array}{ccc} & F(X)(A) & \\ \underline{F}(f)_A \swarrow & & \searrow \underline{F}(y \otimes^{op} f)_A \\ F(Y)(C \otimes A) & & F(Y')((B \otimes C) \otimes A) \\ \downarrow F(Y)(sym) & & \downarrow F(Y')(sym) \\ F(Y)(A \otimes C) & & F(Y')(A \otimes (B \otimes C)) \\ \downarrow \underline{F}(y)_{A \otimes C} & & \downarrow F(Y')(ass) \\ F(Y')(B \otimes (A \otimes C)) & & \\ \downarrow F(Y')(ass) & & \\ F(Y')((B \otimes A) \otimes C) & \xrightarrow{F(Y')(sym \otimes Id)} & F(Y')((A \otimes B) \otimes C) \end{array}$$

ou encore, après avoir utilisé l'axiome hexagonal de symétrie, transporté par  $F(Y')$ , il nous reste à montrer que le diagramme suivant commute en  $x$  :

$$\begin{array}{ccc}
& F(X)(A) & \\
\underline{F}(f)_A \swarrow & & \searrow \underline{F}(y \otimes^{op} f)_A \\
F(Y)(C \otimes A) & & F(Y')((B \otimes C) \otimes A) \\
\downarrow F(Y)(sym) & & \downarrow F(Y')(ass^{-1}) \\
F(Y)(A \otimes C) & & F(Y')(B \otimes (C \otimes A)) \\
& \searrow \underline{F}(y)_{A \otimes C} \quad \swarrow F(Y')(Id \otimes sym) & \\
& F(Y')(B \otimes (A \otimes C)) &
\end{array}$$

Mais  $\underline{F}(y \otimes^{op} f) = (F(X) \xrightarrow{\underline{F}(f)} F(Y)^C \xrightarrow{\underline{F}(y)^C} (F(Y')^B)^C \xrightarrow{\alpha m} F(Y')^{B \otimes C})$ .  
Le diagramme précédant se simplifie encore. Finalement, il nous suffit de montrer que le carré suivant commute :

$$\begin{array}{ccc}
F(Y)(C \otimes A) & \xrightarrow{\underline{F}(y)_{C \otimes A}} & F(Y')(B \otimes (C \otimes A)) \\
\downarrow F(Y)(sym) & & \downarrow F(Y')(Id \otimes sym) \\
F(Y)(A \otimes C) & \xrightarrow{\underline{F}(y)_{A \otimes C}} & F(Y')(B \otimes (A \otimes C))
\end{array}$$

ce qui est immédiat car  $\underline{F}(y) : F(Y) \rightarrow F(Y')^B$  est une transformation naturelle. Ainsi  $(A, t) : yon(X) \rightarrow F$  est une flèche de  $\mathbb{V}\text{-}\mu(\mathcal{M}^{op}, \hat{\mathcal{V}})$ . On peut donc poser  $\theta'_X(A, x) = (A, t)$ .

- Sur une flèche  $(A', x') \xrightarrow{a} (A, x)$  de  $\mathbb{C}_X$ , il nous faut montrer que  $a : \theta'_X(A', x') \rightarrow \theta'_X(A, x)$  est une 2-cellule de  $\mathbb{V}\text{-}\mu(\mathcal{M}^{op}, \hat{\mathcal{V}})$ . Posons  $(A, t) = \theta'_X(A, x)$  et  $(A', t') = \theta'_X(A', x')$ . On doit donc montrer que pour tout  $Y \in |\mathcal{M}^{op}|$ ,  $a^*(t_Y) = t'_Y$ , ou encore que le triangle suivant commute :

$$\begin{array}{ccc}
& hom(Y, X) & \\
t_Y \swarrow & & \searrow t'_Y \\
F(Y)^A & \xrightarrow{Id^a} & F(Y)^{A'}
\end{array}$$

ce que l'on vérifie aisément.

- Le fait que  $\theta'_X$  est fonctoriel est immédiat.

• Il nous reste à montrer que  $\theta_X$  et  $\theta'_X$  sont inverses l'un de l'autre.

**L'identité**  $\theta_X.\theta'_X = Id_{\mathbb{C}_X}$  : Soit  $(A, x) \in |\mathbb{C}_X|$ . Posons  $(A, t) = \theta'_X(A, x)$ . On a  $(\underline{t}_X)_I(Id_X)$  qui est l'image de  $x$  par l'application composée suivante :

$$F(X)(A) \xrightarrow{F(Id_X)_A} F(X)(I \otimes A) \xrightarrow{F(X)(sym)} F(X)(A \otimes I)$$

Or  $\underline{F}(Id_X)_A = F(X)(u_g)$  et  $F(X)(sym).F(X)(u_g) = F(X)(u_d)$ . Alors, si on pose  $\theta_X(A, t) = (A, x')$ , on sait que  $x'$  est l'image de  $Id_X$  par :

$$Tri(I, X, X) \xrightarrow{(\underline{t}_X)_I} F(X)(A \otimes I) \xrightarrow{F(X)(u_d^{-1})} F(X)(A)$$

Mais  $(\underline{t}_X)_I(Id_X) = F(X)(u_d)(x)$ . Ainsi  $x' = x$ . Finalement  $\theta_X.\theta'_X = Id_{\mathbb{C}_X}$ .

**L'identité**  $\theta'_X.\theta_X = Id_{\mathbb{C}'_X}$  : Soit  $(A, t) \in |\mathbb{C}'_X|$ . Posons  $(A, x) = \theta_X(A, t)$  et  $(A, t') = \theta'_X(A, x)$ . Montrons que  $t' = t$ . On peut écrire, lorsque  $Y \in |\mathcal{M}|, B \in |\mathbb{V}|$  et  $f \in Tri(B, Y, X)$ ,

$(\underline{t}'_Y)_B(f) = [F(Y)(sym_{A,B}).\underline{F}(f)_A.F(X)(u_{dA}^{-1}).(\underline{t}_X)_I](Id_X)$  ou encore  
 $(\underline{t}'_Y)_B(f) = [F(Y)(u_{dA}^{-1} \otimes Id_B).F(Y)(sym_{A \otimes I, B}).\underline{F}(f)_{A \otimes I}.(\underline{t}_X)_I](Id_X)$ .  
D'autre part, comme  $(A, t) : yon(X) \rightarrow F$  est une flèche de  $\mathbb{V}\text{-}\mu(\mathcal{M}^{op}, \hat{\mathbb{V}})$ , alors  $sym : t_Y \otimes yon(X)(f) \rightarrow F(f) \otimes t_X : yon(X)(Y) \rightarrow F(Y)$  est une 2-cellule de  $\hat{\mathbb{V}}$ . Ce qui aboutit au diagramme (D) suivant dans  $\mathbb{E}ns$  :

$$\begin{array}{ccc}
& Tri(I, X, X) & \\
(\underline{t}_X)_I \swarrow & & \searrow h(f, X)_I \\
F(X)(A \otimes I) & & Tri(B \otimes I, Y, X) \\
\downarrow \underline{F}(f)_{A \otimes I} & & \downarrow (\underline{t}_Y)_{B \otimes I} \\
F(Y)(B \otimes (A \otimes I)) & & F(Y)(A \otimes (B \otimes I)) \\
\downarrow F(Y)(ass) & & \downarrow F(Y)(ass) \\
F(Y)((B \otimes A) \otimes I) & \xrightarrow{F(Y)(sym \otimes Id)} & F(Y)((A \otimes B) \otimes I)
\end{array}$$

On peut donc écrire :

$$\begin{aligned}
(\underline{t}'_Y)_B(f) &= [F(Y)(u_d^{-1} \otimes Id).F(Y)(sym).\underline{F}(f)_{A \otimes I}.(\underline{t}_X)_I](Id_X) \\
&= [F(Y)(u_d^{-1}).F(Y)(sym \otimes Id).F(Y)(ass).\underline{F}(f)_{A \otimes I}.(\underline{t}_X)_I](Id_X) \\
&\stackrel{(D)}{=} [F(Y)(u_d^{-1}).F(Y)(ass).(\underline{t}_Y)_{B \otimes I}.h(f, X)_I](Id_X)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= [F(Y)(Id \otimes u_d^{-1}).(\underline{t}_Y)_{B \otimes I}.h(f, X)_I](Id_X) \\
&= [(\underline{t}_Y)_B.Tri(u_g^{-1}, Id, Id).Tri(sym, Id, Id).h(f, X)_I](Id_X).
\end{aligned}$$

Mais  $[Tri(u_g^{-1}, Id, Id).Tri(sym, Id, Id).h(f, X)_I](Id_X) = (u_g^{-1})^*.(sym)^*(f \otimes^{op} Id_X) = (u_g^{-1})^*sym^*sym^*(Id_X \otimes f) = (u_g^{-1})^*(Id_X \otimes f) = f$ . Donc  $(\underline{t}'_Y)_B(f) = (\underline{t}_Y)_B(f)$ . Finalement on obtient  $t' = t$  et donc  $\theta'_X.\theta_X = Id$ .

Au final on a montré que  $\theta_X : (\mathbb{C}'_X, U) \rightarrow (\mathbb{C}_X, U)$  est inversible.

**Corollaire 8.2.** Soit  $\mathcal{M}$  une catégorie mutante sur une catégorie monoïdale symétrique  $\mathbb{V}$ . Alors le foncteur mutant  $yon : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{V}\text{-}\mu(\mathcal{M}^{op}, \hat{\mathcal{V}})$  (voir sa construction à la section 6) est pleinement fidèle.

*Preuve :* Soient  $X, Y \in |\mathcal{M}|$ . On applique le lemme de Yoneda mutant au foncteur mutant  $F = yon(Y) : \mathcal{M}^{op} \rightarrow \hat{\mathcal{V}}$ , en remarquant que  $\mathbb{C}_X \simeq \mathcal{M}(X, Y)$ . Si on note  $\gamma : \mathcal{M}(X, Y) \rightarrow \mathbb{C}_X$  cet isomorphisme on montre que le triangle suivant commute :

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{M}(X, Y) & \xrightarrow{yon_{XY}} & \mathbb{V}\text{-}\mu(\mathcal{M}^{op}, \hat{\mathcal{V}})(yon(X), yon(Y)) \\
& \searrow \gamma & \swarrow \theta_X \\
& \mathbb{C}_X &
\end{array}$$

$\theta_X$  et  $\gamma$  étant des isomorphismes,  $yon_{XY}$  en est un aussi. D'où la conclusion voulue.

## 9. Retour au Lemme de Yoneda enrichi.

• Reprenons l'hypothèse de la section 7, c.a.d.  $\mathcal{M}$  est de saveur E. On peut même supposer que  $\mathcal{M} = \mu e(\mathbb{M})$  où  $\mathbb{M}$  est enrichi dans  $\mathbb{V}$ . Supposons aussi que  $\mathbb{V}$  soit fermé (ou encre, de façon équivalente, qu'en tant que catégorie tensorisée - On la note encore  $\mathbb{V}$ - elle soit enrichissable). Pour chaque objet  $A \in |\mathbb{V}|$ , notons  $\tilde{\mathbb{V}}(A, -)$  un adjoint à droite de  $(-) \otimes A$  et  $Ev^A : \tilde{\mathbb{V}}(A, -) \otimes A \rightarrow (-)$  une co-unité de cette adjonction. Notons aussi  $\tilde{\mathbb{V}}$  la catégorie enrichie (dans  $\mathbb{V}$ ) canonique produite par cette adjonction.

**Proposition 9.1.**  $\mu e(\tilde{\mathbb{V}}) \simeq \mu t(\mathbb{V})$ .

**Preuve :** L'isomorphisme  $\gamma : \mu e(\tilde{\mathbb{V}}) \rightarrow \mu t(\mathbb{V})$  est défini, sur les objets par  $|\gamma| = Id$ , sur une flèche  $(A, f) : B \rightarrow C$  par  $\gamma(A, f) = (A, f)$  où  $f = (A \otimes B \xrightarrow{f \otimes Id} \tilde{\mathbb{V}}(B, C) \otimes B \xrightarrow{Ev} C)$ . Le reste de la preuve est sans difficulté.

• Fixons maintenant un objet  $X \in |\mathbb{M}|$  et considérons le foncteur enrichi  $Y(X) : \mathbb{M}^{op} \rightarrow \tilde{\mathbb{V}}$  défini,  
- sur un objet  $S \in |\mathbb{M}|$  par  $Y(X)(S) = \mathbb{M}(S, X)$ ,  
- Pour  $S, S' \in |\mathbb{M}^{op}|$ ,  $Y(X)_{SS'} : \mathbb{M}^{op}(S, S') \rightarrow \tilde{\mathbb{V}}(Y(X)(S), Y(X)(S'))$  est l'unique flèche de  $\mathbb{V}$  rendant le carré suivant commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{M}(S', S) \otimes \mathbb{M}(S, X) & \xrightarrow{Y(X)_{SS'} \otimes Id} & \tilde{\mathbb{V}}(\mathbb{M}(S, X), \mathbb{M}(S', X)) \otimes \mathbb{M}(S, X) \\ \text{sym} \downarrow & & \downarrow Ev \\ \mathbb{M}(S, X) \otimes \mathbb{M}(S', S) & \xrightarrow{comp} & \mathbb{M}(S', X) \end{array}$$

Le fait que  $Y(X)$  soit un foncteur enrichi :  $\mathbb{M}^{op} \rightarrow \tilde{\mathbb{V}}$  est bien connu et sans difficulté particulière à démontrer.

**Proposition 9.2.** Le carré suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} \mu e(\mathbb{M}^{op}) & \xrightarrow{\mu e(Y(X))} & \mu e(\tilde{\mathbb{V}}) \\ Id \downarrow & & \downarrow \gamma \\ \mu e(\mathbb{M})^{op} & \xrightarrow{yo(X)} & \mu t(\mathbb{V}) \end{array}$$

**Preuve :** - Sur un objet  $S \in |\mu e(\mathbb{M}^{op})| = |\mathbb{M}|$ ,  $\gamma \cdot \mu e(Y(X))(S) = \mathbb{M}(S, X) = yo(X)(S)$ .

- Sur une flèche  $S \xrightarrow{(A, f)} S'$  de  $\mu e(\mathbb{M}^{op}) = \mu e(\mathbb{M})^{op}$  (voir la proposition 3.6). Alors on voit que  $(\gamma \cdot \mu e(Y(X)))(A, f) = (A, c)$  où

$A \otimes \mathbb{M}(S, X) \xrightarrow{c} \mathbb{M}(S', X)$  est la flèche composée suivante :

$$A \otimes \mathbb{M}(S, X) \xrightarrow{f \otimes Id} \mathbb{M}(S', S) \otimes \mathbb{M}(S, X) \xrightarrow{sym} \mathbb{M}(S, X) \otimes \mathbb{M}(S', S) \xrightarrow{comp} \mathbb{M}(S', X).$$

D'un autre côté  $yo(X)(A, f) = (A, yo(X)(A, f))$  où  $yo(X)(A, f) : A \otimes \mathbb{M}(S, X) \rightarrow \mathbb{M}(S', X)$  est l'unique flèche de  $\mathbb{V}$  telle que

$yo(X)(A, f)^*(ev_{S'X}) = (A, f) \otimes^{op} ev_{SX}$  (voir la section 7). Or ici  $ev_{SX} = (\mathbb{M}(S, X), Id_{\mathbb{M}(S, X)})$  et d'une façon générale, pour un couple de flèches composables  $S_0 \xrightarrow{(A_0, f_0)} S_1 \xrightarrow{(A_1, f_1)} S_2$  de  $\mu e(\mathbb{M})^{op}$  on a  $(A_1, f_1) \otimes^{op} (A_0, f_0) = (A_1 \otimes A_0, f_1 \circ^{op} f_0)$  où  $f_1 \circ^{op} f_0 =$

$$[A_1 \otimes A_0 \xrightarrow{sym} A_0 \otimes A_1 \xrightarrow{f_0 \otimes f_1} \mathbb{M}(S_1, S_0) \otimes \mathbb{M}(S_2, S_1) \xrightarrow{comp} \mathbb{M}(S_2, S_0)].$$

On obtient ici  $(A, f) \otimes^{op} ev_{SX} = (A \otimes \mathbb{M}(S, X), \bar{f})$  où  $\bar{f} =$

$$[A \otimes \mathbb{M}(S, X) \xrightarrow{sym} \mathbb{M}(S, X) \otimes A \xrightarrow{Id \otimes f} \mathbb{M}(S, X) \otimes \mathbb{M}(S', S) \xrightarrow{comp} \mathbb{M}(S', X)]$$

et donc  $yo(X)(A, f) = \bar{f}$ . Enfin, comme  $\bar{f} = c$ , on a l'identité  $\gamma \cdot \mu e(Y(\bar{X}))(A, f) = yo(X)(A, f)$ . D'où la commutation du carré proposé.

• Considérons maintenant le foncteur mutant

$\mathbb{V}\text{-}e(\mathbb{M}^{op}, \tilde{\mathbb{V}}) \xrightarrow{\Phi} \mathbb{V}\text{-}\mu(\mu e(\mathbb{M})^{op}, \mu c(\hat{\mathbb{V}}))$  obtenu en composant les quatre foncteurs mutants suivants :

$$\begin{array}{c} \mathbb{V}\text{-}e(\mathbb{M}^{op}, \tilde{\mathbb{V}}) \\ \downarrow \varepsilon \quad (\star 1) \\ \mathbb{V}\text{-}\mu(\mu e(\mathbb{M}^{op}), \mu e(\tilde{\mathbb{V}})) \\ \downarrow \mathbb{V}\text{-}\mu(Id, \gamma) \quad (\star 2) \\ \mathbb{V}\text{-}\mu(\mu e(\mathbb{M}^{op}), \mu t(\mathbb{V})) \\ \downarrow \mathbb{V}\text{-}\mu(Id, \mu y) \quad (\star 3) \\ \mathbb{V}\text{-}\mu(\mu e(\mathbb{M})^{op}, \mu c(\hat{\mathbb{V}})) \end{array}$$

( $\star 1$ ) Voir la proposition 5.1, ( $\star 2$ ) voir la section 4 et la proposition 9.1 ( $\star 3$ ) voir les sections 4 et 2

**Proposition 9.3.**  $\Phi$  est pleinement fidèle.

Preuve : Résulte du lemme suivant et des propositions 2.3 et 4.3.

**Lemme 9.4.** Le composé de foncteurs mutants pleinement fidèles est lui même pleinement fidèle.

Preuve : du lemme : Immédiat.

• Soit  $X \in |\mathbb{M}|$  et  $F : \mathbb{M}^{op} \rightarrow \tilde{\mathbb{V}}$  un foncteur enrichi. Alors  $F$  et  $Y(X)$  sont dans  $|\mathbb{V}\text{-}e(\mathbb{M}^{op}, \tilde{\mathbb{V}})|$ . Comme  $\Phi$  est pleinement fidèle, on a l'isomorphisme suivant :

$\mathbb{V}\text{-}e(\mathbb{M}^{op}, \tilde{\mathbb{V}})(Y(X), F) \xrightarrow{\Phi_{Y(X), F}} \mathbb{V}\text{-}\mu(\mu e(\mathbb{M})^{op}, \mu c(\hat{\mathbb{V}}))(\Phi(Y(X)), \Phi(F))$   
où  $\Phi(Y(X)) = \mu y.yo(X) \underset{\star 1}{\simeq} yon(X)$ , ( $\star 1$ ) par la prop.9.2 et ( $\star 2$ ) voir la section 7 (l'isomorphisme  $\mu y.yo(X) \rightarrow yon(X)$  est noté  $\gamma_X$ ) et  $\Phi(F) = \mu y.\hat{F}$  où  $\hat{F} = (\mathbb{V}\text{-}\mu(Id, \gamma).\varepsilon)(F)$ . Et donc  $\Phi(F)(X) = y(\hat{F}(X)) = y(F(X))$ . En d'autres termes,  $\Phi(F)(X)$  est représentable de représentation  $(F(X), Id_{F(X)})$ .

Utilisons maintenant les deux lemmes suivants :

**Lemme 9.5.** Soient  $\mathcal{M}$  une catégorie mutante,  $X \in |\mathcal{M}|$  et  $F : \mathcal{M}^{op} \rightarrow \mu c(\hat{\mathbb{V}})$  un foncteur mutant. On suppose que  $F(X)$ , qui est un préfaisceau, est représentable. Notons  $(R, r)$  une représentation de  $F(X)$  et posons  $(R, \rho) = \theta_X^{-1}(R, r)$  (voir le théorème 8.1). Alors  $(R, \rho)$  est un objet final de  $\mathbb{V}\text{-}\mu(\mathcal{M}^{op}, \mu c(\hat{\mathbb{V}}))(yon(X), F)$ .

Preuve : du lemme : Car  $(R, r)$  est un objet final de  $\mathbb{C}_X$  (voir la notation dans le théorème 8.1)

**Lemme 9.6.** Soient  $\mathbb{A}, \mathbb{B}$  deux catégories enrichies dans  $\mathbb{V}$  telles que  $\mathbb{V}\text{-}e(\mathbb{A}, \mathbb{B})$  soit de saveur E. Soient aussi  $F, G : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{B}$  des foncteurs enrichis. Si on note  $([F, G], ev_{FG})$  une représentation de  $Tri(-, F, G) : \mathbb{V}^{op} \rightarrow \mathbb{E}ns$  où  $Tri = Tri_{\mathbb{V}\text{-}e(\mathbb{A}, \mathbb{B})}$ . Alors  $ev_{FG}$  est un objet final de  $\mathbb{V}\text{-}e(\mathbb{A}, \mathbb{B})(F, G)$ .

Preuve : du lemme : Immédiat.

Dans la catégorie  $\mathbb{C}'_X = \mathbb{V}\text{-}\mu(\mathcal{M}^{op}, \mu c(\hat{\mathbb{V}}))(yon(X), \Phi(F))$  nous disposons donc de deux objets finaux.

- Le premier, par le lemme 9.5, étant  $(F(X), \rho) = \theta_X^{-1}(F(X), Id_{F(X)})$ .
- Le second, par le lemme 9.6, étant la flèche composée stricte suivante :  $([Y(X), F], \rho') =$

$$[yon(X) \xrightarrow{\gamma_X^{-1}} \mu y.yo(X) \xrightarrow{Id} \Phi(Y(X)) \xrightarrow{\Phi(ev)} \Phi(F)]$$

(puisque  $\Phi_{Y(X), F}$  est un isomorphisme). Voir aussi le lemme suivant :

**Lemme 9.7.** Soit  $\mathcal{M}$  une catégorie mutante,  $X, X', S \in |\mathcal{M}|$  et  $f : S \rightarrow X$  une flèche inversible de  $\underline{\mathcal{M}}$ . Alors la composition stricte par  $f$  produit un isomorphisme  $\mathcal{M}(X, X') \rightarrow \mathcal{M}(S, X')$ .

Preuve : du lemme : Sans difficulté.

• Ainsi  $(F(X), \rho) \simeq ([Y(X), F], \rho')$  et donc  $F(X) \simeq [Y(X), F]$ . Encore noté  $\mathbb{V}\text{-Nat}(Y(X), F)$ . On retrouve donc la conclusion du lemme de Yoneda enrichi.

## Références

- [1] F. BORCEUX, *Hand book of Categorical Algebra*, Cambridge University Press (2009), Vol. II (p.291-347).
- [2] R. GUITART, *Tenseurs et Machines*, Cahiers de Topologie et Géométrie Différentielle Catégorique ( 1980),volume XXI-1, p.5-62.
- [3] J. PENON, *L'enrichissement et ses différents points de vue, I*, Cahiers de Topologie et Géométrie Différentielle Catégorique ( 2024),volume LXVI-1, p.5-62.
- [4] J. PENON, *L'enrichissement et ses différents points de vue, II*, Cahiers de Topologie et Géométrie Différentielle Catégorique ( 2024),volume LXVI-3, p.241-271.

Jacques PENON

25, rue Chapsal,

94340, Joinville-le-Pont

France

Email : tryphon.penon@gmail.com